Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Норвидас, Функциональное исчисление эрмитовых элементов и неравенства Бернштейна, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 2, 79–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa10>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru

подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:58:14

Функциональное исчисление эрмитовых элементов и неравенства Бернштейна

© 2006. С. Норвидас

Пусть A — банахова алгебра с единицей. Элемент $a \in A$ называется эрмитовым, если $\|\exp(it a)\| = 1$ при $t \in \mathbb{R}$. Норма такого элемента равна его спектральному радиусу, и это утверждение доказывается в рамках стандартного голоморфного функционального исчисления. Для эрмитовых элементов голоморфное исчисление допускает расширение (см. [1, 2]), которое позволяет описать случаи совпадения нормы и спектрального радиуса для элементов вида $\varphi(a)$ для широкого класса функций φ [1]. Мы рассматриваем вопросы такого

исчисления, связанные с оценками величины $\|\varphi(a)\|_A$ через подходящие нормы функции φ .

Пусть $M(\mathbb{R})$ — банахова алгебра комплексных конечных борелевских мер на $\mathbb{R}$ со сверткой в качестве умножения и полной вариацией в качестве нормы и $B(\mathbb{R})$ — алгебра их преобразований Фурье–Стилтьеса с нормой $\|\hat{\mu}\|_{B(\mathbb{R})} = \|\mu\|_{M(\mathbb{R})}$. Для эрмитова элемента $a \in A$ и $\varphi = \hat{\mu} \in B(\mathbb{R})$ можно положить $\varphi(a) = \hat{\mu}(a) = \int_{\mathbb{R}} \exp(iat) d\mu(t)$. Поскольку спектр $\text{Sp}(a)$ эрмитова элемента a вещественный, из равенства $\varphi_1 = \varphi_2$ в $\mathbb{R}$ -окрестности этого спектра вытекает, что $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$. Поэтому каждый эрмитов элемент a порождает гомоморфизм $\theta_a: \varphi \rightarrow \varphi(a)$ алгебры символов $B(\mathbb{R})/Z(\text{Sp}(a))$ в A , где $Z(\text{Sp}(a))$ — замыкание идеала функций из $B(\mathbb{R})$, равных нулю в окрестности спектра $\text{Sp}(a)$. Поскольку θ_a не увеличивает нормы,

$$\|\varphi\|_{C(\text{Sp}(a))} \leq \|\varphi(a)\|_A \leq \|\varphi\|_{B(\mathbb{R})/Z(\text{Sp}(a))}, \quad (1)$$

где $C(\text{Sp}(a))$ — обычная алгебра непрерывных на $\text{Sp}(a)$ функций. Равенство $\|\varphi\|_{C(\text{Sp}(a))} = \|\varphi(a)\|_A$ означает совпадение нормы и спектрального радиуса элемента $\varphi(a)$. Мы изучим правую оценку в (1) и укажем операторную модель вычисления нормы $\|\varphi\|_{B(\mathbb{R})/Z(K)}$ для произвольного компакта $K \subset \mathbb{R}$.

Пусть $J(K)$ — идеал тех $\mu \in M(\mathbb{R})$, для которых $\hat{\mu} \in Z(K)$, а B_K — аннулятор идеала $J(K)$ в $L^\infty(\mathbb{R})$. Пространство B_K состоит из тех функций из $L^\infty(\mathbb{R})$, спектр Бьёрлинга которых содержится в K . Поэтому элементы из B_K можно отождествлять с соответствующими целыми функциями экспоненциального типа. Согласно неравенству Бернштейна, в B_K действует эрмитов оператор $D = -i d/dx$. Поскольку $\text{Sp}(D) = K$, каждый символ $\varphi \in B(\mathbb{R})/Z(K)$ однозначно определяет на B_K оператор $\varphi(D)$ по формуле $(\varphi(D)f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+t) d\mu(t)$, где μ — любая мера из соответствующего символу φ класса смежности $\mu_\varphi(K)$ в $M(\mathbb{R})/J(K)$. Мера $\mu \in \mu_\varphi(K)$, для которой $\|\mu\|_{M(\mathbb{R})} = \|\mu_\varphi(K)\|_{M(\mathbb{R})/J(K)}$, будем называть экстремальной. Следующая теорема содержится по существу в работах Бьёрлинга [3] и Горина [4], где она рассматривалась при разных дополнительных условиях на K .

ТЕОРЕМА 1. Пусть K — компакт в $\mathbb{R}$ и $\varphi \in B(\mathbb{R})/Z(K)$. Тогда $\|\varphi\|_{B(\mathbb{R})/Z(K)} = \|\mu_\varphi(K)\|_{M(\mathbb{R})/J(K)} = \|\varphi(D)\|_K$, где $\|\varphi(D)\|_K$ — норма оператора $\varphi(D)$ в B_K . Оператор $\varphi(D)$ обладает в B_K экстремальными, т. е. существуют такие $f \in B_K$, что $\|f\| = 1$ и $(\varphi(D)f)(0) = \|\varphi(D)\|_K$. Мера $\mu \in \mu_\varphi(K)$ является экстремальной тогда и только тогда, когда $f \cdot \mu = |\mu|$ для каждой экстремали f , где $|\mu|$ — вариация меры μ .

Это утверждение сводит вычисление $\|\varphi\|_{B(\mathbb{R})/Z(K)}$ к вычислению нормы оператора $\varphi(D)$ в B_K . Из него также следует, что если норма оператора $\varphi(D)$ в B_K достигается уже на семействе $\{e^{i(\alpha x + \beta)}, \alpha \in K, \beta \in \mathbb{R}\}$, то в (1) оба неравенства превращаются в равенства. В противном случае имеет место неравенство $\|\varphi\|_{C(K)} < \|\varphi\|_{B(\mathbb{R})/Z(K)}$. Тогда для вычисления $\|\varphi\|_{B(\mathbb{R})/Z(K)}$ необходимы более тонкие средства. Задача упрощается, если в $\mu_\varphi(K)$ имеются экстремальные меры. Тогда в некоторых случаях задачи описания экстремальных мер в $\mu_\varphi(K)$ и экстремалей оператора $\varphi(D)$ в B_K оказываются эквивалентными. Рассмотрим такой случай.

Пусть $\varphi(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k$, $c_k \in \mathbb{C}$. Пусть $K = [-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$. Известно, что если $\varphi(D)$ имеет в $B_\sigma = B_{[-\sigma, \sigma]}$ экстремаль f , для которой $|f(x)| \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$, то в

$\mu_\varphi(K)$ существует единственная экстремальная мера [3, 5]. Этот факт позволяет в следующих теоремах описать экстремали $\varphi(D)$ (с возможным последующим вычислением экстремальной меры и нормы $\|\varphi\|_{B(\mathbb{R})/Z(K)}$).

ТЕОРЕМА 2. Пусть f — экстремаль оператора $\varphi(D)$ в пространстве B_σ . Если $|f(x)| \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$, то существует такой полином p без вещественных нулей степени $\deg p \leq \deg \varphi - 1$, для которого функция

$$g(z) = \frac{(pf(z) + p^*f^*(z))^2}{4pp^*(z)},$$

где $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$, удовлетворяет уравнению экстремали

$$u(z)(pp^*(z))^2[g'(z)]^2 = 4\sigma^2 v^2(z)g(z)[1 - g(z)];$$

здесь u — некоторый положительный, а v — вещественный полиномы, для которых $\deg u \leq 2(\deg \varphi + \deg p - 1)$, $\deg v \leq \deg \varphi + 3\deg p - 1$ и $\deg v = 2\deg p + \frac{1}{2}\deg u$.

В следующей теореме используются те же обозначения, что и в теореме 2.

ТЕОРЕМА 3. Если f — экстремаль оператора $\varphi(D)$ в B_σ , то

$$f(x) = \frac{\sqrt{pp^*(x)}}{p(x)} \left(\sin(\sigma A(x)) + i \frac{t(x)}{\sqrt{u(x)}} \cos(\sigma A(x)) \right), \quad x \in \mathbb{R};$$

здесь t — некоторый вещественный полином и $\deg t \leq \deg \varphi + \deg p - 1$, $\deg t \leq \frac{1}{2}\deg u$, функции $\sqrt{pp^*}$ и $\sqrt{u}$ — арифметические значения корней, A — некоторая первообразная в $\mathbb{R}$ функции $v/(pp^*\sqrt{u})$, а старшие коэффициенты полиномов u , v и pp^* равны единице.

Теоремам о норме и экстремальных дифференциальных операторов в B_K , которые принято называть неравенствами Бернштейна, посвящена обширная литература. В [1] указано, что большинство известных точных неравенств соответствуют случаю равенства $\|\varphi(D)\| = \|\varphi\|_{C(K)}$ в (1), т.е. норма таких $\varphi(D)$ достигается уже на экспоненциальных экстремальных. Наиболее общий из известных ранее результатов о полиномиальных неравенствах Бернштейна содержится в [6], где в B_σ изучен случай произвольного эрмитова полинома φ , т.е. такого полинома φ , что $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$, $t \in \mathbb{R}$. Эквивалентная экстремальная задача в случае вещественных коэффициентов решена в [7] и [8]. Указанные выше теоремы 2 и 3 решают вопрос об уравнении и общем виде экстремалей для произвольного комплексного полиномиального оператора $\varphi(D)$ в B_σ , приведенный в сборнике нерешенных проблем [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Горин Е. А. Вестник Харьк. гос. унив., Прикл. матем. и мех., **45** (205), 77–105 (1980).
2. König H. Arch. Math., **28** (4), 422–430 (1977).
3. Beurling A. Collected Works, Vol. 2, Birkhauser, Boston, 1989.
4. Gorin E. A. In: Lecture Notes in Math., Vol. 1043 (1984), pp. 646–651.
5. Крейн М. Г. Уч. зап. Куйбышевского пед. ин-та, **7**, 123–147 (1943).
6. Boas R. P., Shaeffer A. C. Amer. J. Math., **79**, 857–884 (1957).
7. Ахизер Н. И. Теория функций, функц. анализ и их прил., **1**, 111–135 (1965).
8. Норвидас С. Литовский матем. сб., **38** (2), 248–259 (1998).