Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Савченко, Об изменении спектральных свойств матрицы при возмущении достаточно низкого ранга, *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 1, 85–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa100>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:39:51

УДК 512.643+517.983

Об изменении спектральных свойств матрицы при возмущении достаточно низкого ранга

© 2004. С. В. САВЧЕНКО

Пусть A и B — любые две квадратные матрицы одинакового порядка. Существует большое количество статей и даже книг (см., например, [1–3]), в которых строится теория возмущений для собственных значений матрицы $A + \epsilon B$, не входящих в спектр матрицы A . Однако если геометрическая кратность k собственного значения λ матрицы A больше ранга r матрицы B , то λ должно остаться в спектре новой матрицы $A + B$ (здесь и везде в дальнейшем мы не налагаем никаких ограничений на норму матрицы B). Как при переходе от A к $A + B$ изменится часть жордановой формы, соответствующая λ ? Как ни странно, в литературе отсутствует ответ на этот естественный вопрос. В нашей работе мы покажем, что при типичном возмущении B ранга r у λ пропадают r самых больших жордановых клеток, а порядка остальных не изменяются.

Для суммы произведений соответствующих координат любых двух векторов ξ и η введем обозначение (ξ, η) . Тогда любой оператор B ранга r можно представить в виде $B = \sum_{i=1}^r (\cdot, \xi_i) \eta_i$, где $\{\xi_i\}_{i=1}^r$ и $\{\eta_i\}_{i=1}^r$ — две системы линейно независимых векторов. Обозначим через $A(z)$ матрицу скалярных резольвент, ij -элемент которой равен $((zE - A)^{-1} \eta_j, \xi_i)$, где $i, j = 1, \dots, r$. Рассмотрим ограничение оператора $B(zE - A)^{-1}$ на линейную оболочку $\langle \eta_1, \dots, \eta_r \rangle$ векторов $\eta_1, \dots, \eta_r$. Очевидно, что его матрица в базисе $\{\eta_i\}_{i=1}^r$ совпадает с $A(z)$. Так как прямая сумма корневых подпространств оператора $B(zE - A)^{-1}$, соответствующих его ненулевым собственным значениям, содержится в $\langle \eta_1, \dots, \eta_r \rangle$, то справедливо следующее тождество:

$$\frac{\det(zE - A - B)}{\det(zE - A)} = \det(E - B(zE - A)^{-1}) = \det(E - A(z)). \quad (1)$$

Пусть d — количество всех жордановых клеток в жордановой форме матрицы A и $n_1, \dots, n_d$ — их порядки (мы считаем, что клетка с номером p соответствует собственному значению λ_p). Возьмем любой жорданов базис $\{\xi_n^{(p)}\}_{n=1}^{n_p} \quad d$ матрицы A и дуальный к нему жорданов базис $\{\eta_n^{(p)}\}_{n=1}^{n_p} \quad d$ транспонированной матрицы $A^\top$. Здесь $(A - \lambda_p E) \xi_n^{(p)} = \xi_{n-1}^{(p)}$ и $(A^\top - \lambda_p E) \eta_n^{(p)} = \eta_{n-1}^{(p)}$ при $n = 1, \dots, n_p$ (мы считаем, что $\xi_0^{(p)} = \eta_0^{(p)} = 0$). Дуальность означает, что $(\xi_{n'}^{(p')}, \eta_n^{(p)}) = \delta_{n', n_p+1-n} \delta_{p', p}$, где δ — символ Кронекера. Нетрудно показать справедливость представления

$$((zE - A)^{-1} \eta_j, \xi_i) = \sum_{p=1}^d \sum_{n=1}^{n_p} (\eta_n^{(p)}, \eta_j) \sum_{m=1}^{n_p-n+1} (z - \lambda_p)^{-(n_p-n+2-m)} (\xi_m^{(p)}, \xi_i). \quad (2)$$

Обозначим через $\Xi_n^{(p)}$ матрицу, im -элемент которой равен $(\xi_m^{(p)}, \xi_i)$, где $i = 1, \dots, r$ и $m = 1, \dots, n_p - n + 1$. Пусть $\Psi_n^{(p)}$ есть $r \times (n_p - n + 1)$ -матрица, каждый элемент j -й строки которой совпадает с $(\eta_n^{(p)}, \eta_j)$, и $\Delta_n^{(p)}(z)$ — диагональ-

ная матрица с элементами $(z - \lambda_p)^{-n_p+n-1}, \dots, (z - \lambda_p)^{-1}$ на диагонали. Тогда ij -элемент произведения $\Xi_n^{(p)} \Delta_n^{(p)}(z) \Psi_n^{(p)\top}$ совпадает с выражением в (2), следующим после знака суммы $\sum_{n=1}^{n_p}$. Обозначим через Ξ и Ψ матрицы, полученные последовательным расположением друг за другом всех матриц $\Xi_n^{(p)}$ и $\Psi_n^{(p)}$ соответственно, не заключенных, как обычно, в скобки (матрица с индексом $n+1$ следует за матрицей с индексом n , серия матриц с номером $p+1$ следует за серией матриц с номером p). Пусть $\Delta(z) = \Delta_1^{(1)}(z) \oplus \dots \oplus \Delta_{n_d}^{(d)}(z)$ — прямая сумма всех диагональных матриц $\Delta_n^{(p)}(z)$, упорядоченных указанным выше способом. Тогда $A(z) = \Xi \Delta(z) \Psi^\top$. В дальнейшем мы будем считать, что $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \lambda$ и $n_1 \geq \dots \geq n_h > n_{h+1} = \dots = n_r = \dots = n_g > n_{g+1} \geq \dots \geq n_k$. Применяя формулу Бине–Коши (см. формулу (16) гл. I из [4]) к произведению матриц $\Xi \Delta(z)$ и $\Psi^\top$, получим, что порядок полюса функции $\det A(z)$ в точке $z = \lambda$ не больше, чем $n_1 + \dots + n_r$. Кроме того, коэффициент при $(z - \lambda)^{-(n_1 + \dots + n_r)}$ в разложении в ряд Лорана функции $\det A(z)$ совпадает с суммой

$$\sum_{h+1 \leq p_{h+1} < \dots < p_r \leq g} \det \begin{pmatrix} (\xi_1^{(1)}, \xi_1) & \dots & (\xi_1^{(h)}, \xi_1) & (\xi_1^{(p_{h+1})}, \xi_1) & \dots & (\xi_1^{(p_r)}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi_1^{(1)}, \xi_r) & \dots & (\xi_1^{(h)}, \xi_r) & (\xi_1^{(p_{h+1})}, \xi_r) & \dots & (\xi_1^{(p_r)}, \xi_r) \end{pmatrix} \\ \times \det \begin{pmatrix} (\eta_1^{(1)}, \eta_1) & \dots & (\eta_1^{(h)}, \eta_1) & (\eta_1^{(p_{h+1})}, \eta_1) & \dots & (\eta_1^{(p_r)}, \eta_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\eta_1^{(1)}, \eta_r) & \dots & (\eta_1^{(h)}, \eta_r) & (\eta_1^{(p_{h+1})}, \eta_r) & \dots & (\eta_1^{(p_r)}, \eta_r) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Нетрудно показать, что те же самые утверждения справедливы и для функции $\det(E - A(z))$. Обозначим через $n_A(\lambda)$ алгебраическую кратность λ как собственного значения матрицы A . Очевидно, что $n_A(\lambda) = n_1 + \dots + n_k$. В силу тождества (1) справедливо неравенство $n_{A+B}(\lambda) \geq n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r$, причем равенство в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда сумма (3) не равна нулю. Понятно, что это условие является типичным (т.е. справедливым для почти всех наборов векторов $\xi_1, \dots, \xi_r$ и $\eta_1, \dots, \eta_r$).

ТЕОРЕМА 1. Пусть A — произвольная квадратная матрица, и пусть $B = \sum_{i=1}^r (\cdot, \xi_i) \eta_i$ — оператор ранга r . Рассмотрим любое собственное значение λ матрицы A и упорядочим порядки его жордановых клеток по невозрастанию, $n_1 \geq \dots \geq n_k$. Пусть $k \geq r$. Предположим, что имеет место равенство

$$n_{A+B}(\lambda) = n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r. \quad (4)$$

Тогда $n_{r+1}, \dots, n_k$ являются порядками жордановых клеток матрицы $A+B$, соответствующих собственному значению λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $k = r$ очевиден. Предположим, что $k > r$. Если сумма (3) не равна нулю, то не равен нулю хотя бы один из левых определителей в ней. Без ограничения общности можно считать, что

$$\det \begin{pmatrix} (\xi_1^{(1)}, \xi_1) & \dots & (\xi_1^{(r)}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\xi_1^{(1)}, \xi_r) & \dots & (\xi_1^{(r)}, \xi_r) \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{n,1}^{(p)}(\xi_1^{(1)}, \xi_1) + \cdots + \alpha_{n,r}^{(p)}(\xi_1^{(r)}, \xi_1) = \left(\xi_n^{(p)} - \sum_{i=1}^r \sum_{m=1}^{n-1} \alpha_{m,i}^{(p)} \xi_{n-m+1}^{(i)}, \xi_1 \right), \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{n,1}^{(p)}(\xi_1^{(1)}, \xi_r) + \cdots + \alpha_{n,r}^{(p)}(\xi_1^{(r)}, \xi_r) = \left(\xi_n^{(p)} - \sum_{i=1}^r \sum_{m=1}^{n-1} \alpha_{m,i}^{(p)} \xi_{n-m+1}^{(i)}, \xi_r \right), \end{array} \right.$$

Из (1) и (3) следует, что если справедливо равенство (4), то $n_{A+\epsilon B}(\lambda) = n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r$ при любом $\epsilon \neq 0$. В силу доказательства теоремы 1 имеем $BL_{A+B}(\lambda) = 0$. Поэтому корневое подпространство $L_{A+\epsilon B}(\lambda)$ не зависит от $\epsilon \neq 0$ и совпадает с $L_{A+B}(\lambda)$. Обычно в теории возмущений используют матрицу $\mathbf{B}$, pp' -элемент которой равен $(B\xi_1^{(p')}, \eta_1^{(p)})$, где $p, p' = 1, \dots, k$ (см. [3]). Нетрудно показать, что произведение двух определителей в сумме (3) равно главному минору порядка r матрицы $\mathbf{B}$, соответствующему множеству индексов $\{1, \dots, h, p_{h+1}, \dots, p_r\}$. Предположим, что эта сумма не равна нулю и отлична от нуля все главные миноры порядка $q_s \leq h$ матрицы $\mathbf{B}$ в условии (1.6) теоремы 1 из [3]. Кроме того, пусть все ненулевые корни уравнения (1.9) различны. Тогда простая модификация теоремы Лидского, основанная на ее доказательстве, позволяет утверждать, что при разрушении каждой жордановой клетки порядка n_p , где $p = 1, \dots, r$, образуются n_p простых собственных значений матрицы $A + \epsilon B$, которые с точностью до $o(\epsilon^{1/n_p})$ расположены в вершинах правильного n_p -угольника, вписанного в окружность радиуса порядка ϵ^{1/n_p} с центром в точке λ . В силу тождества (1) собственный вектор, соответствующий каждому такому собственному значению $\lambda(\epsilon)$, может быть представлен в виде $(A - \lambda(\epsilon)E)^{-1}(\alpha_1 \eta_1 + \dots + \alpha_r \eta_r)$, где коэффициенты α_i являются координатами решения уравнения $\epsilon A(\lambda(\epsilon))\alpha = \alpha$.

ПРИМЕЧАНИЕ. В январе 2002 г. результаты о типичном изменении спектральных свойств при возмущении ранга r были сообщены (без доказательства) автором Ж. Моро (J. Moro) и Ф. Допико (F. Dopico) из Мадридского университета. Им также был отослан препринт, в котором содержится полное решение проблемы для случая $r = 1$. Недавно они проинформировали автора, что ими подготовлена статья “Low rank perturbation of Jordan structure” для представления в SIAM Journal on Matrix Analysis and its Applications, в которой утверждение теоремы 1 настоящей работы доказывается в чисто матричных терминах, без использования резольвентной техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
2. *Baumgartel H.* Analytic Perturbation Theory for Matrices and Operators. Birkhäuser, Basel, 1985.
3. *Лидский В. Б.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **6**, №1, 52–60 (1966).
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., Наука, 1967.

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН
e-mail: sav@icp.ac.ru

Поступило в редакцию
3 октября 2002 г.

УДК 517.57

Экстремальные тригонометрические и степенные многочлены нескольких переменных

© 2004. Л. А. Сахнович

1. Рассмотрим множество σ_P степенных неотрицательных многочленов от нескольких переменных. Обозначим через Q_P класс многочленов из σ_P , которые могут быть представлены в виде суммы квадратов. В классической работе Д. Гильберта [1] показано, что Q_P не совпадает с σ_P . В настоящей заметке мы попытались выработать общий подход к исследованию экстремальных элементов выпуклых множеств Q_P . Статья базируется на следующей методике:

- 1) мы исследуем неотрицательные тригонометрические многочлены и затем с помощью преобразования Кальдерона переходим к степенным многочленам;
- 2) в статье дан способ построения опорных гиперплоскостей выпуклых множеств Q_P ; этот факт играет важную роль в нашем подходе.

Обозначим через $\sigma(N_1, N_2, N_3)$ множество тригонометрических многочленов

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{|k| \leq N_1} \sum_{|\ell| \leq N_2} \sum_{|m| \leq N_3} q(k, \ell, m) e^{i(k\alpha + \ell\beta + m\gamma)}, \quad (1)$$

удовлетворяющих условию $f(\alpha, \beta, \gamma) \geq 0$ ($\alpha = \bar{\alpha}$, $\beta = \bar{\beta}$, $\gamma = \bar{\gamma}$). Обозначим через $Q(N_1, N_2, N_3)$ семейство тригонометрических многочленов класса $\sigma(N_1, N_2, N_3)$, допускающих представление

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{j=1}^r |F_j(\alpha, \beta, \gamma)|^2,$$

где

$$F_j(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{0 \leq k \leq N_1} \sum_{0 \leq \ell \leq N_2} \sum_{0 \leq m \leq N_3} q_j(k, \ell, m) e^{i(k\alpha + \ell\beta + m\gamma)}.$$

2. Ясно, что множество $Q(N_1, N_2, N_3)$ выпуклое. Кроме множества неотрицательных тригонометрических многочленов, введем класс $\sigma_P(2N_1, 2N_2, 2N_3)$ степенных неотрицательных многочленов вида

$$f(x, y, z) = \sum_{0 \leq k \leq 2N_1} \sum_{0 \leq \ell \leq 2N_2} \sum_{0 \leq m \leq 2N_3} a_{k, \ell, m} x^k y^\ell z^m.$$