Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Сахнович, Экстремальные тригонометрические и степенные многочлены нескольких переменных, *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 1, 88–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:52:30

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
2. *Baumgartel H.* Analytic Perturbation Theory for Matrices and Operators. Birkhäuser, Basel, 1985.
3. *Лидский В. Б.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **6**, №1, 52–60 (1966).
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., Наука, 1967.

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН
e-mail: sav@icp.ac.ru

Поступило в редакцию
3 октября 2002 г.

УДК 517.57

Экстремальные тригонометрические и степенные многочлены нескольких переменных

© 2004. Л. А. Сахнович

1. Рассмотрим множество σ_P степенных неотрицательных многочленов от нескольких переменных. Обозначим через Q_P класс многочленов из σ_P , которые могут быть представлены в виде суммы квадратов. В классической работе Д. Гильберта [1] показано, что Q_P не совпадает с σ_P . В настоящей заметке мы попытались выработать общий подход к исследованию экстремальных элементов выпуклых множеств Q_P . Статья базируется на следующей методике:

1) мы исследуем неотрицательные тригонометрические многочлены и затем с помощью преобразования Кальдерона переходим к степенным многочленам;

2) в статье дан способ построения опорных гиперплоскостей выпуклых множеств Q_P ; этот факт играет важную роль в нашем подходе.

Обозначим через $\sigma(N_1, N_2, N_3)$ множество тригонометрических многочленов

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{|k| \leq N_1} \sum_{|\ell| \leq N_2} \sum_{|m| \leq N_3} q(k, \ell, m) e^{i(k\alpha + \ell\beta + m\gamma)}, \quad (1)$$

удовлетворяющих условию $f(\alpha, \beta, \gamma) \geq 0$ ($\alpha = \bar{\alpha}$, $\beta = \bar{\beta}$, $\gamma = \bar{\gamma}$). Обозначим через $Q(N_1, N_2, N_3)$ семейство тригонометрических многочленов класса $\sigma(N_1, N_2, N_3)$, допускающих представление

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{j=1}^r |F_j(\alpha, \beta, \gamma)|^2,$$

где

$$F_j(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{0 \leq k \leq N_1} \sum_{0 \leq \ell \leq N_2} \sum_{0 \leq m \leq N_3} q_j(k, \ell, m) e^{i(k\alpha + \ell\beta + m\gamma)}.$$

2. Ясно, что множество $Q(N_1, N_2, N_3)$ выпуклое. Кроме множества неотрицательных тригонометрических многочленов, введем класс $\sigma_P(2N_1, 2N_2, 2N_3)$ степенных неотрицательных многочленов вида

$$f(x, y, z) = \sum_{0 \leq k \leq 2N_1} \sum_{0 \leq \ell \leq 2N_2} \sum_{0 \leq m \leq 2N_3} a_{k, \ell, m} x^k y^\ell z^m.$$

Через $Q_P(2N_1, 2N_2, 2N_3)$ обозначим семейство степенных неотрицательных многочленов класса $\sigma_P(2N_1, 2N_2, 2N_3)$, допускающих представление $f(x, y, z) = \sum_{j=1}^r |F_j(x, y, z)|^2$, где $F_j(x, y, z)$ — многочлены от x, y, z .

Введем множество $\Delta(N_1, N_2, N_3)$, состоящее из точек вида $t_1 - t_2$ ($t_1, t_2 \in S$), где

$$S = \{(k, \ell, m) : 0 \leq k \leq N_1, 0 \leq \ell \leq N_2, 0 \leq m \leq N_3\}.$$

Функция $\Phi(u)$ называется эрмитово положительной на Δ , если для любых точек $t_1, t_2, \dots, t_N \in S$ и чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,j} \xi_i \bar{\xi}_j \Phi(t_i - t_j) \geq 0.$$

Обозначим через $P(N_1, N_2, N_3)$ класс эрмитово положительных функций $\Phi(k, \ell, m)$ ($|k| \leq N_1, |\ell| \leq N_2, |m| \leq N_3$). Каждой функции $\Phi(k, \ell, m)$ из $P(N_1, N_2, N_3)$ поставим в соответствие теплицевы матрицы (см. [4, 5])

$$B(l, m) = \begin{bmatrix} \Phi(0, l, m) & \Phi(1, l, m) & \dots & \Phi(N_1, l, m) \\ \Phi(-1, l, m) & \Phi(0, l, m) & \dots & \Phi(N_1 - 1, l, m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(-N_1, l, m) & \Phi(-N_1 + 1, l, m) & \dots & \Phi(0, l, m) \end{bmatrix}.$$

Из матриц $B(l, m)$ построим блочные теплицевы матрицы

$$C_m = \begin{bmatrix} B(0, m) & B(1, m) & \dots & B(N_2, m) \\ B(-1, m) & B(0, m) & \dots & B(N_2 - 1, m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(-N_2, m) & B(-N_2 + 1, m) & \dots & B(0, m) \end{bmatrix}, \quad |m| \leq N_3.$$

Наконец, из $\{C_k\}$ строим еще одну блочную теплицеву матрицу

$$A = A(N_1, N_2, N_3) = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \dots & C_{N_3} \\ C_{-1} & C_0 & \dots & C_{N_3-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{-N_3} & C_{-N_3+1} & \dots & C_0 \end{bmatrix}.$$

С помощью функции $\Phi(k, \ell, m)$ введем линейный функционал (см. [3])

$$L_\Phi(f) = \sum_{|k| \leq N_1} \sum_{|\ell| \leq N_2} \sum_{|m| \leq N_3} q(k, \ell, m) \Phi(k, \ell, m),$$

определенный на функциях вида (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [4, 5]. Если $\Phi(k, \ell, m) \in P(N_1, N_2, N_3)$ и $f(\alpha, \beta, \gamma) = |F(\alpha, \beta, \gamma)|^2$, где

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{0 \leq k \leq N_1} \sum_{0 \leq \ell \leq N_2} \sum_{0 \leq m \leq N_3} d(k, \ell, m) e^{i(k\alpha + \ell\beta + m\gamma)},$$

то выполняется соотношение

$$L_\Phi(f) = e^* A e \geq 0.$$

Здесь вектор e имеет вид

$$e = \text{col}[h(0), h(1), \dots, h(N_3)], \quad h(m) = \text{col}[g(0, m), g(1, m), \dots, g(N_2, m)], \\ g(\ell, m) = \text{col}[d(0, \ell, m), d(1, \ell, m), \dots, d(N_1, \ell, m)].$$

3. Из предложения 1 получаем следующее важное утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Множество опорных гиперплоскостей класса $Q(N_1, N_2, N_3)$ совпадает с множеством гиперплоскостей $L_\Phi(f) = 0$, где $\Phi(k, \ell, m) \in P(N_1, N_2, N_3)$, и соответствующая матрица $A(N_1, N_2, N_3)$ такова, что $\det A(N_1, N_2, N_3) = 0$.

Обозначим через ν_A размерность ядра матрицы $A(N_1, N_2, N_3)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если вектор $e \neq 0$ принадлежит ядру матрицы $A(N_1, N_2, N_3)$ и $\nu_A = 1$, то $f(\alpha, \beta, \gamma)$ является экстремальным многочленом в классе $Q(N_1, N_2, N_3)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $f(\alpha, \beta, \gamma)$ — экстремальный многочлен в классе $Q(N_1, N_2, N_3)$, то существует нетривиальная функция $\Phi(k, \ell, m) \in P(N_1, N_2, N_3)$, такая, что $L_\Phi(f) = 0$.

Введем функции $F_1(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i(\alpha+\beta)} + e^{i\gamma}$, $F_2(\alpha, \beta, \gamma) = -e^{i\beta} + e^{i(\alpha+\gamma)}$, $F_3(\alpha, \beta, \gamma) = -e^{i\alpha} + e^{i(\beta+\gamma)}$ и $F_4(\alpha, \beta, \gamma) = -1 + e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Многочлены $f_k(\alpha, \beta, \gamma) = |F_k(\alpha, \beta, \gamma)|^2$ ($1 \leq k \leq 4$) экстремальны в классе $Q(1, 1, 1)$.

4. Воспользуемся линейным преобразованием Кальдерона [3]

$$(Cf)(\alpha, \beta, \gamma) = f_1(x, y, z),$$

которое определяется формулами

$$e^{i\alpha} = \frac{x+i}{x-i}, \quad e^{i\beta} = \frac{y+i}{y-i}, \quad e^{i\gamma} = \frac{z+i}{z-i}, \\ f_1(x, y, z) = f(\alpha, \beta, \gamma)(x^2+1)^{N_1}(y^2+1)^{N_2}(z^2+1)^{N_3}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (см. [5, ch. 3]). Преобразование Кальдерона C отображает $\sigma(N_1, N_2, N_3)$ на $\sigma_P(2N_1, 2N_2, 2N_3)$ и $Q(N_1, N_2, N_3)$ на $Q_P(2N_1, 2N_2, 2N_3)$.

Учитывая линейность преобразования Кальдерона, получаем из предложения 3 следующее важное утверждение:

СЛЕДСТВИЕ 4. Преобразование Кальдерона C отображает экстремальные точки множеств $\sigma(N_1, N_2, N_3)$ и $Q(N_1, N_2, N_3)$ на экстремальные точки множеств $\sigma_P(2N_1, 2N_2, 2N_3)$ и $Q_P(2N_1, 2N_2, 2N_3)$ соответственно.

Рассмотрим многочлен $P(x, y, z) = (xyz - z + y + x)^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Многочлен $P(x, y, z)$ является экстремальным многочленом в классах $Q_P(2, 2, 2)$ и $\sigma_P(2, 2, 2)$.

5. В книге [5] нами дается метод построения тригонометрических многочленов, принадлежащих классу $\sigma(N_1, N_2, N_3)$, но не принадлежащих $Q(N_1, N_2, N_3)$. Этот метод также может быть использован для построения экстремальных многочленов в классах $\sigma(N_1, N_2, N_3)$ и $\sigma_P(2N_1, 2N_2, 2N_3)$. Для иллюстрации этого факта введем многочлен

$$f_0(\alpha, \beta, \gamma) = 4 - \cos(\alpha + \beta + \gamma) - \cos(-\alpha + \beta + \gamma) - \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta - \gamma).$$

В [5, ch. 3] показано, что $f_0(\alpha, \beta, \gamma) - m$ ($0 < m \leq 4 - 2^{3/2}$) принадлежит $\sigma(1, 1, 1)$, но не принадлежит $Q(1, 1, 1)$. Рассмотрим теперь случай, когда $m = 4 - 2^{3/2}$:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 2^{3/2} - \cos(\alpha + \beta + \gamma) - \cos(-\alpha + \beta + \gamma) - \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta - \gamma).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Многочлен $f(\alpha, \beta, \gamma)$ экстремален в классе $\sigma(1, 1, 1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Многочлен

$$f(x, y, z) = 2^{3/2}(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) + 8z(y+x)(yx-1) - 2(z^2-1)[(yx+1)^2 - (x-y)^2]$$

является экстремальным в классе $\sigma_P(2, 2, 2)$.

Некоторые другие экстремальные многочлены в классе σ_P были известны ранее [2].

Я очень благодарен проф. Б. Резнику за присылку мне своих статей, стимулировавших мою работу, и д-ру И. Тьднюку за помощь в подсчете примеров (см. предложения 5 и 6). Я также очень благодарен рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hilbert D. Math. Ann., **32**, 342–350 (1888). 2. Reznick B. Contemp. Math., **253**, 251–272 (2000). 3. Rudin W. Illinois J. Math., **7**, 532–539 (1963). 4. Сахнович Л. А. Функц. анализ и его прил. **14**, вып. 4, 55–60 (1980). 5. Sakhnovich L. A. Interpolation Theory and its Applications. Kluwer Acad. Publishers, 1997.

University of Connecticut
e-mail: vze3bh8z@verizon.net

Поступило в редакцию
23 декабря 2002 г.

УДК 517.98

Сравнение некоторых расстояний между суммами пространств ℓ_n^p *

© 2004. А. И. ХРАБРОВ

В этой работе мы обсуждаем вопрос о том, как различные характеристики близости конечномерных пространств ведут себя на суммах пространств ℓ_n^p , т. е. на пространствах вида $\ell_n^p \oplus \ell_n^q$. В качестве характеристик близости между пространствами X и Y мы рассматриваем классическое расстояние Банаха–Мазура $d(X, Y)$, слабое расстояние Банаха–Мазура $\tilde{d}(X, Y)$, введенное в [8], и модифицированное расстояние $\partial(X, Y)$, введенное в [4]. Наш основной результат состоит в том, что для рассматриваемых пространств отношение $d(X, Y)/\tilde{d}(X, Y)$ ограничено. Отметим, что, как установлено в [4] и [8], на пространствах ℓ_n^p все три расстояния имеют одинаковый порядок роста и оцениваются друг через друга с абсолютными постоянными. Для сумм пространств ℓ_n^p справедливы лишь оценки $1 \leq d(X, Y)/\partial(X, Y) \leq c\sqrt[p]{n}$. Хотя слабое расстояние Банаха–Мазура $\tilde{d}$ так же хорошо различает пространства $\ell_n^p \oplus \ell_n^q$, как и классическое, совсем

*Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования РФ (грант Е00-1.037).