Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Храбров, Сравнение некоторых расстояний между суммами пространств ℓ_n^p , *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 1, 91–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa102>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:21:16

В [5, ch. 3] показано, что $f_0(\alpha, \beta, \gamma) - m$ ($0 < m \leq 4 - 2^{3/2}$) принадлежит $\sigma(1, 1, 1)$, но не принадлежит $Q(1, 1, 1)$. Рассмотрим теперь случай, когда $m = 4 - 2^{3/2}$:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 2^{3/2} - \cos(\alpha + \beta + \gamma) - \cos(-\alpha + \beta + \gamma) - \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta - \gamma).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Многочлен $f(\alpha, \beta, \gamma)$ экстремален в классе $\sigma(1, 1, 1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Многочлен

$$f(x, y, z) = 2^{3/2}(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) + 8z(y+x)(yx-1) - 2(z^2-1)[(yx+1)^2 - (x-y)^2]$$

является экстремальным в классе $\sigma_P(2, 2, 2)$.

Некоторые другие экстремальные многочлены в классе σ_P были известны ранее [2].

Я очень благодарен проф. Б. Резнику за присылку мне своих статей, стимулировавших мою работу, и д-ру И. Тьднюку за помощь в подсчете примеров (см. предложения 5 и 6). Я также очень благодарен рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hilbert D. Math. Ann., **32**, 342–350 (1888). 2. Reznick B. Contemp. Math., **253**, 251–272 (2000). 3. Rudin W. Illinois J. Math., **7**, 532–539 (1963). 4. Сахнович Л. А. Функц. анализ и его прил. **14**, вып. 4, 55–60 (1980). 5. Sakhnovich L. A. Interpolation Theory and its Applications. Kluwer Acad. Publishers, 1997.

University of Connecticut
e-mail: vze3bh8z@verizon.net

Поступило в редакцию
23 декабря 2002 г.

УДК 517.98

Сравнение некоторых расстояний между суммами пространств ℓ_n^p *

© 2004. А. И. ХРАБРОВ

В этой работе мы обсуждаем вопрос о том, как различные характеристики близости конечномерных пространств ведут себя на суммах пространств ℓ_n^p , т. е. на пространствах вида $\ell_n^p \oplus \ell_n^q$. В качестве характеристик близости между пространствами X и Y мы рассматриваем классическое расстояние Банаха–Мазура $d(X, Y)$, слабое расстояние Банаха–Мазура $\tilde{d}(X, Y)$, введенное в [8], и модифицированное расстояние $\partial(X, Y)$, введенное в [4]. Наш основной результат состоит в том, что для рассматриваемых пространств отношение $d(X, Y)/\tilde{d}(X, Y)$ ограничено. Отметим, что, как установлено в [4] и [8], на пространствах ℓ_n^p все три расстояния имеют одинаковый порядок роста и оцениваются друг через друга с абсолютными постоянными. Для сумм пространств ℓ_n^p справедливы лишь оценки $1 \leq d(X, Y)/\partial(X, Y) \leq c\sqrt[p]{n}$. Хотя слабое расстояние Банаха–Мазура $\tilde{d}$ так же хорошо различает пространства $\ell_n^p \oplus \ell_n^q$, как и классическое, совсем

*Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования РФ (грант Е00-1.037).

по-другому оно ведет себя на суммах пространств различных размерностей или на суммах вида $\ell_n^p \oplus \ell_n^q \oplus \ell_n^r$. Так, например, $\tilde{d}(\ell_{2n}^p \oplus \ell_n^q, \ell_{2n}^q \oplus \ell_n^p) \leq 3$ при любых $p, q \geq 1$ и $n \in \mathbb{N}$. Вместе с тем модифицированное расстояние различает эти пространства достаточно четко, и в этом случае мы имеем (см. теорему 4)

$$\partial(\ell_{2n}^p \oplus \ell_n^q, \ell_{2n}^q \oplus \ell_n^p) \asymp n^{\frac{1}{3}|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}|}.$$

В связи с последним результатом заметим, что вытекающее из него неравенство

$$d(\ell_{2n}^p \oplus \ell_n^q, \ell_{2n}^q \oplus \ell_n^p) \geq \partial(\ell_{2n}^p \oplus \ell_n^q, \ell_{2n}^q \oplus \ell_n^p) \geq cn^{\frac{1}{3}|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}|}$$

является, по-видимому, единственной известной оценкой снизу классического расстояния Банаха–Мазура между этими пространствами (вероятно, довольно грубой).

Напомним определения рассматриваемых расстояний и некоторые связанные с ними результаты. Мы будем считать, что все n -мерные нормированные пространства как векторные пространства совпадают с $\mathbb{R}^n$. Это позволяет нам в дальнейшем без специальных пояснений говорить как об объемах тел в n -мерных пространствах, так и о матрицах, соответствующих линейным операторам (в каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^n$). Классическое расстояние Банаха–Мазура между n -мерными нормированными пространствами X и Y :

$$d(X, Y) = \inf \{ \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T: X \rightarrow Y, T - \text{изоморфизм} \}.$$

Для оператора $U: X \rightarrow Y$ положим $\tilde{\gamma}_Z(U) = \inf \sum \|W_k\| \|V_k\|$, где $\inf$ берется по всем представлениям $U = \sum W_k V_k$ при $V_k: X \rightarrow Z$ и $W_k: Z \rightarrow Y$. Согласно [8], определим слабое расстояние $\tilde{d}(X, Y)$ между нормированными пространствами X и Y формулой

$$\tilde{d}(X, Y) = \max \{ \tilde{\gamma}_Y(\text{Id}_X), \tilde{\gamma}_X(\text{Id}_Y) \}.$$

В этом случае

$$\tilde{d}(X, Y) = \sup \left\{ \max \left\{ \frac{\alpha(\text{Id}_Y)}{\alpha(\text{Id}_X)}, \frac{\alpha(\text{Id}_X)}{\alpha(\text{Id}_Y)} \right\} : \alpha - \text{идеальная норма} \right\}. \quad (1)$$

Легко видеть, что всегда имеет место неравенство $\tilde{d}(X, Y) \leq d(X, Y)$.

Для n -мерных банаховых пространств X и Y определим объемное отношение

$$\text{Vr}(X, Y) = \left(\inf \left\{ \frac{\text{vol } B_X}{\text{vol } UB_Y} : UB_Y \subset B_X \right\} \right)^{1/n},$$

где B_X и B_Y — единичные шары в пространствах X и Y . Очевидно, что всегда $\text{Vr}(X, Y) \cdot \text{Vr}(Y, Z) \geq \text{Vr}(X, Z)$ и $\text{Vr}(X, Y) \geq 1$.

Положим

$$\partial(X, Y) = \inf \{ \|T\|_{X \rightarrow Y} : |\det T| = 1 \} \cdot \inf \{ \|T\|_{Y \rightarrow X} : |\det T| = 1 \}.$$

Расстояние $\partial(X, Y)$ неявно использовалось Гурарием, Кадецком и Мацаевым в работе [1] для вывода оценок расстояния Банаха–Мазура между пространствами ℓ_n^p и Глускиным в работе [2], где доказано существование n -мерных пространств X_1 и Y_1 , для которых $\partial(X_1, Y_1) \geq cn$. Отсюда следует, что d - и ∂ -диаметры компакта Минковского одинаковы по порядку. Расстояние $\partial(X, Y)$ изучается в работах [4–7].

Суммы пространств $X \oplus Y$ мы понимаем в смысле ℓ^2 , рассмотрение сумм других типов приведет к изменению некоторых констант. Запись $f \succ g$ или $g \prec f$ означает то же, что и $g = O(f)$. Если $f \prec g$ и $f \succ g$, то мы пишем $f \asymp g$.

В работе [5] для любых p, q, r и s устанавливается соотношение

$$\text{Vr}^2(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \asymp \min\{\text{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^r) \cdot \text{Vr}(\ell_n^q, \ell_n^s), \text{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^s) \cdot \text{Vr}(\ell_n^q, \ell_n^r)\}.$$

Расстояние $\partial(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s)$ может быть найдено, исходя из этого соотношения, равенства $\partial(X, Y) = \text{Vr}(X, Y) \cdot \text{Vr}(Y, X)$ и формул для объемных отношений $\text{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^r)$ (см. [5]).

ТЕОРЕМА 1. *При любых p, q, r, s имеет место соотношение*

$$\begin{aligned} d(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) &\asymp \tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \\ &\asymp \min\{\max\{d(\ell_n^p, \ell_n^r), d(\ell_n^q, \ell_n^s)\}, \max\{d(\ell_n^p, \ell_n^s), d(\ell_n^q, \ell_n^r)\}\}. \end{aligned}$$

В частности, если $p, q \leq 2$, то

$$d(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^\infty) \asymp \tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^\infty) \asymp \sqrt{n}.$$

ТЕОРЕМА 2. *При любых p, q, r, s справедливы неравенства*

$$d(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \prec (\partial(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s))^2, \quad (2)$$

$$d(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \prec \sqrt[4]{n} \partial(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s). \quad (3)$$

Неравенства (2) и (3) неулучшаемы. Это следует, например, из равенств $d(\ell_n^1 \oplus \ell_n^2, \ell_{2n}^{2n}) = \sqrt{n}$ и $\partial(\ell_n^1 \oplus \ell_n^2, \ell_{2n}^{2n}) = \sqrt[4]{n}$. Отметим еще серию примеров: $d(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^\infty) \asymp \sqrt{n}$ и $\partial(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^\infty) \asymp \sqrt[4]{n}$ при $1 \leq p \leq r \leq q \leq 2$.

В силу оценки $\tilde{d}(\ell_n^p, \ell_{an}^p) \leq c(a)$ теорема 1 для расстояния $\tilde{d}$ может быть распространена на случай суммы пространств ℓ^p пропорциональных размерностей. Точнее, имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $0 < \delta \leq a, b, c, d \leq \delta^{-1}$. Тогда при любых p, q, r, s имеет место соотношение (все оценки с константами, зависящими только от δ)*

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\ell_{[an]}^p \oplus \ell_{[bn]}^q, \ell_{[cn]}^r \oplus \ell_{[dn]}^s) &\asymp \tilde{d}(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \\ &\asymp \min\{\max\{d(\ell_n^p, \ell_n^r), d(\ell_n^q, \ell_n^s)\}, \max\{d(\ell_n^p, \ell_n^s), d(\ell_n^q, \ell_n^r)\}\}. \end{aligned}$$

Приведем также теорему, позволяющую вычислять объемные отношения и модифицированное расстояние для сумм пространств ℓ_n^p разных размерностей.

ТЕОРЕМА 4. *При любых p, q, r, s имеет место соотношение*

$$\begin{aligned} \text{Vr}^3(\ell_{2n}^p \oplus \ell_n^q, \ell_{2n}^r \oplus \ell_n^s) \\ \asymp \min\{\text{Vr}^2(\ell_{2n}^p, \ell_{2n}^r) \text{Vr}(\ell_n^q, \ell_n^s), \text{Vr}(\ell_{2n}^p, \ell_n^r) \text{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^s) \text{Vr}(\ell_n^q, \ell_n^r)\}. \end{aligned}$$

В частности, $\text{Vr}(\ell_{2n}^p \oplus \ell_n^q, \ell_{2n}^r \oplus \ell_n^p) \asymp (\text{Vr}(\ell_n^p, \ell_n^q))^{1/3}$.

КРАТКИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ. Теорема 1 получается с помощью подстановки в соотношение (1) p -абсолютно суммирующей, p -ядерной и p -доминированной норм, выбираемых в зависимости от взаимного расположения p, q, r, s и 2. Все определения и необходимые оценки норм операторов $\text{Id}_{\ell_n^p \rightarrow \ell_n^q}$ можно найти в монографии Пича [3]. Теорема 2 может быть установлена с помощью

непосредственных вычислений и оценки $d(\ell_n^p \oplus \ell_n^q, \ell_n^r \oplus \ell_n^s) \prec \sqrt{n}$. Верхняя оценка в теореме 4 следует из логарифмической выпуклости объемного отношения относительно размерности (см. [5]):

$$\text{Vr}(X_1 \oplus X_2, Y_1 \oplus Y_2) \leq (\text{Vr}(X_1, Y_1))^{\frac{n_1}{n_1+n_2}} \cdot (\text{Vr}(X_2, Y_2))^{\frac{n_2}{n_1+n_2}},$$

где $\dim X_1 = \dim Y_1 = n_1$ и $\dim X_2 = \dim Y_2 = n_2$. Нижняя оценка получается с помощью небольшой модификации рассуждений из работ [4] и [5]. Аналогично можно показать, что для любых целых положительных чисел a, b, c и d , удовлетворяющих условию $a + b = c + d$, верхняя оценка объемного отношения $\text{Vr}(\ell_{an}^p \oplus \ell_{bn}^q, \ell_{cn}^r \oplus \ell_{dn}^s)$, получаемая исходя из логарифмической выпуклости, точна по порядку.

В заключение автор выражает признательность Б. М. Макарову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурарий В. И., Кадец М. И., Мацаев В. И. Матем. сб., **170** (112), №4, 481–489 (1966).
2. Глускин Е. Д. Функц. анализ и его прил., **15**, вып. 1. 72–73 (1981).
3. Пич А. Операторные идеалы. Мир, М., 1982.
4. Храбров А. И. Вестник С.-Петербург. ун-та, сер. 1, вып. 3 (№17), 56–62 (2000).
5. Храбров А. И. Матем. заметки, **70**, №6, 918–926 (2001).
6. Храбров А. И. В сб.: Проблемы математического анализа, вып. 21, Научная книга, Новосибирск, 2000, с. 264–275.
7. Храбров А. И. В сб.: Проблемы математического анализа, вып. 23, Тамара Рожковская, Новосибирск, 2001, с. 206–220.
8. Tomczak-Jaegermann N. Math. Nachr., **119**, 291–307 (1984).

Санкт-Петербургский Государственный университет
e-mail: aih@AK2994.spb.edu

Поступило в редакцию
25 декабря 2002 г.