Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Авдеева, О статистиках неполных частных конечных цепных дробей, *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 2, 1–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa103>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:01:36

УДК 511.36+511.37

О статистиках неполных частных конечных цепных дробей*

© 2004. М. О. АВДЕЕВА

Введение

В брошюре В. И. Арнольда [1] (см. также [2]) на с. 17 поставлена следующая задача:

«I. Рассмотрим все целые точки (p, q) в положительной четверти круга радиуса N , т. е. такие, что $p^2 + q^2 \leq N^2$, $p > 0$, $q > 0$. Каждое рациональное число $\alpha = p/q$ разложим в цепную дробь (все эти дроби конечны). Посмотрим, сколько единиц, двоек, троек и т. д. среди элементов всех этих дробей, и определим частоты, которые будут зависеть от N . Пусть теперь N очень велико. Будут ли эти числа близки к гауссовым вероятностям из формулы

$$p_k = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(1 + \frac{1}{k(k+2)} \right) ? »$$

Она тесно связана с метрической теорией диофантовых приближений, теорией динамических систем, а также с многими другими разделами математики.

Разложение рационального числа r в конечную цепную дробь длины $s = s(r)$ с целой частью $t_0 = [r]$ и неполными частными $t_1, \dots, t_s$ (натуральные числа), $t_s \geq 2$, формально записывают в виде

$$r = [t_0, t_1, \dots, t_s]. \quad (0.1)$$

Обозначим через $H_k(N)$ общее количество неполных частных t_i для всех i , $1 \leq i \leq s(r)$, совпадающих с натуральным числом k , для всех дробей $r = \alpha$ из сформулированной задачи. Тогда величина

$$H(N) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k(N)$$

есть сумма длин цепных дробей указанных выше рациональных чисел r .

В настоящей работе доказывается, что при растущем N равномерно по k

$$\frac{H_k(N)}{H(N)} = p_k + O\left(\frac{1}{\ln N}\right). \quad (0.2)$$

Тем самым уточняется ответ на вопрос В. И. Арнольда, содержащийся в работе [3] с более слабой оценкой $O((\ln N)^{-1/2})$ остаточного члена.

Положим по определению

$$A_i/B_i = [t_i, \dots, t_s] \quad (1 \leq i \leq s), \quad (0.3)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №04-01-97000).

где A_i целое, а B_i натуральное, причем $\text{НОД}(A_i, B_i) = 1$. Обозначим через $s_x(r)$ количество индексов i из разложения (0.1), для которых $B_i \leq xA_i$. Поскольку всегда $0 < B_i \leq A_i$, то можно считать, что $x \in (0, 1]$. Из (0.3) непосредственно следует, что разность $(k = 1, 2, 3, \dots)$

$$s^{(k)}(r) = s_{1/k}(r) - s_{1/(k+1)}(r) \quad (0.4)$$

есть количество неполных частных t_i в разложении (0.1), совпадающих с k , и при этом

$$s(r) = s_1(r) = \sum_{k=1}^{\infty} s^{(k)}(r). \quad (0.5)$$

Для положительного параметра $R \rightarrow \infty$ положим

$$N_x(R) = \sum s_x(a/d),$$

где суммирование проводится по всем натуральным a и d , таким, что $a^2 + d^2 \leq R^2$. Тогда, заменив употреблявшееся в начале статьи обозначение N на R , получаем

$$H(R) = N_1(R), \quad H_k(R) = N_{1/k}(R) - N_{1/(k+1)}(R).$$

Асимптотическая формула (0.2) непосредственно вытекает из следующего главного результата работы.

ТЕОРЕМА. *Равномерно по $x \in (0, 1]$*

$$N_x(R) = \frac{3}{\pi} \ln(1+x) R^2 \ln R + O(R^2).$$

Автор благодарит В. А. Быковского за полезные советы и внимание.

§1. Соответствие Хейльброна

Напомним, что для r с разложением (0.1)

$$P_i/Q_i = [t_0, t_1, \dots, t_i] \quad (1.1)$$

есть i -я подходящая дробь. При этом предполагается, что P_i — целое, а Q_i — натуральное числа с $\text{НОД}(P_i, Q_i) = 1$. Особо отметим, что разложение числа P_i/Q_i в цепную дробь имеет канонический вид

- (a) (1.1), если $t_i \geq 2$;
- (b) $P_i/Q_i = [t_0, t_1, \dots, t_{i-1} + 1]$, если $t_i = 1$.

Нам понадобятся следующие хорошо известные соотношения (см. [4]):

$$Q_i/Q_{i-1} = [t_i, t_{i-1}, \dots, t_1], \quad P_{i-1}Q_i - P_iQ_{i-1} = (-1)^i. \quad (1.2)$$

Пусть d — натуральное число. Обозначим через $\Omega(d)$ множество всех d -четверок, т.е. четверок $\omega = (m, m', n, n')$ натуральных чисел, для которых

$$mn' + m'n = d, \quad 1 \leq m' < m, \quad 1 \leq n < n', \quad \text{НОД}(m, m') = \text{НОД}(n, n') = 1.$$

Хейльбронн [5] построил биективное отображение множества $\Omega(d)$ на множество

$$\{(a; i) \mid 1 \leq a \leq d/2, \text{НОД}(a, d) = 1, 1 \leq i < s(a/d)\}$$

по правилу

$$\omega \rightarrow (a(\omega); i), \quad (1.3)$$

где $a = a(\omega)$ и индекс i определяются из разложений

$$n'/n = [t_i, \dots, t_1], \quad m/m' = [t_{i+1}, \dots, t_s], \quad (1.4)$$

$$d/a = [t_1, \dots, t_s]. \quad (1.5)$$

Для каждого $\omega \in \Omega(d)$ определим целое $\bar{n} = \bar{n}(\omega)$ условиями

$$\bar{n}n \equiv 1 \pmod{n'}, \quad -n'/2 < \bar{n} \leq n'/2.$$

В заключение этого параграфа отметим, что множество $\Omega(d)$ является пустым только для $d = 1, 2, 3, 4, 6$. При этом для остальных d и любой четверки $\omega \in \Omega(d)$

$$1 < a(\omega) < d/2.$$

§2. Вспомогательные леммы

Пусть $\theta \in (0, 1/2]$ и

$$\Omega_\theta(d) = \{\omega \in \Omega(d) \mid a(\omega) \leq \theta d\},$$

$$\tilde{\Omega}_\theta(d) = \{\omega \in \Omega(d) \mid -\theta n'(\omega) < \bar{n}(\omega) \leq \theta n'(\omega)\}.$$

Множества $\Omega_\theta(d)$ и $\tilde{\Omega}_\theta(d)$, вообще говоря, не совпадают. Но отличаются они друг от друга «не очень сильно». Последнее обстоятельство лежит в основе доказательства следующего утверждения, играющего в дальнейшем важную роль. Пусть $\#M$ означает число элементов множества M .

ЛЕММА 1. *Равномерно по $\theta \in (0, 1/2]$*

$$\#\Omega_\theta(d) = \#\tilde{\Omega}_\theta(d) + O(d).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в (1.2)

$$Q_i = n', \quad Q_{i-1} = n, \quad Q_i/P_i = [t_1, \dots, t_i].$$

Тогда из второго равенства в (1.2) следует, что

$$(-1)^{i-1} P_i n \equiv 1 \pmod{n'}.$$

Поскольку $t_1 \geq 2$, то $-n'/2 < (-1)^{i-1} P_i \leq n'/2$ и $\bar{n} = (-1)^{i-1} P_i$. Значит, $n'/|\bar{n}| = [t_1, \dots, t_i]$. Отсюда получаем, что $|\bar{n}|/n'$ есть подходящая дробь дроби $a/d = [0, t_1, \dots, t_s]$ и при этом (см. [4])

$$\left| \frac{a}{d} n' - |\bar{n}| \right| < \frac{1}{n'}.$$

Принимая во внимание ограничения на ω ($a(\omega) \leq \theta d$ для $\Omega_\theta(d)$ и $-\theta n'(\omega) < \bar{n}(\omega) \leq \theta n'(\omega)$ для $\tilde{\Omega}_\theta(d)$), отсюда выводим, что общее количество d -четверок из теоретико-множественной симметрической разности

$$(\Omega_\theta(d) \cup \tilde{\Omega}_\theta(d)) \setminus (\Omega_\theta(d) \cap \tilde{\Omega}_\theta(d))$$

не превосходит числа элементов множества

$$\left\{ \omega \in \Omega(d) \mid |\bar{n}(\omega) - \theta n'(\omega)| < \frac{1}{n'(\omega)} \text{ или } |\bar{n}(\omega) + \theta n'(\omega)| < \frac{1}{n'(\omega)} \right\}. \quad (2.1)$$

Для взаимно простых натуральных чисел n и n' все решения уравнения $mn' + m'n = d$ в целых (m, m') записываются в виде

$$m = m_0 + nt, \quad m' = m'_0 - n't \quad (t \in \mathbb{Z}),$$

где (m_0, m'_0) — некоторое фиксированное решение. Условие $0 < m' < m$ эквивалентно двойному неравенству

$$\frac{m'_0 - m_0}{n' + n} < t < \frac{m'_0}{n'}.$$

Поскольку

$$\frac{m'_0}{n'} - \frac{m'_0 - m_0}{n' + n} = \frac{d}{n'(n' + n)},$$

количество элементов множества (2.1) не превосходит

$$\sum_{1 < n < n' < d}^{(\pm)} \left(1 + \frac{d}{n'(n' + n)} \right),$$

где $(\pm)$ означает, что в суммировании участвуют только те пары (n, n') , для которых

$$|\bar{n} - \theta n'| < \frac{1}{n'} \quad \text{или} \quad |\bar{n} + \theta n'| < \frac{1}{n'}.$$

Так как $n' \geq 2$, то из этих неравенств следует, что

$$|\bar{n} - \theta n'| < \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad |\bar{n} + \theta n'| < \frac{1}{2}.$$

Каждое из них определяет $\bar{n}$ (а вместе с ним и n) по n' не более чем одним способом. Поэтому интересующая нас величина оценивается суммой

$$\sum_{1 < n' < d} 2 \left(1 + \frac{d}{(n')^2} \right) = O(d).$$

Следовательно, множества $\Omega_\theta(d)$ и $\tilde{\Omega}_\theta(d)$ отличаются друг от друга на $O(d)$ элементов. Лемма 1 доказана. $\square$

Обозначим через $\Phi_x(d; P)$ количество всех пар $(\omega; \bar{n})$ с $\omega \in \Omega(d)$ и $\bar{n} \in \mathbb{Z}$, для которых

$$m'(\omega) \leq xm(\omega), \tag{2.2}$$

$$-\frac{P}{d} n'(\omega) < \bar{n} \leq \frac{P}{d} n'(\omega), \tag{2.3}$$

$$\bar{n} \cdot n(\omega) \equiv 1 \pmod{n'(\omega)}. \tag{2.4}$$

Особо подчеркнем, что в данной ситуации $\bar{n}$ обозначает самостоятельную целочисленную переменную.

ЛЕММА 2. Равномерно по $x \in (0, 1]$ при $P \rightarrow \infty$

$$\sum_{\substack{\text{НОД}(a, d)=1 \\ 1 \leq a \leq P}} s_x(a/d) = \Phi_x(d; P) + O(P + d).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $0 < P \leq d/2$. Заметим, что для $1 \leq i < s(a/d)$ пара (A_{i+1}, B_{i+1}) (см. введение) совпадает с (m, m') (см. второе разложение в (1.4)). Воспользовавшись соответствием Хейльбронна (1.3), получим равенство

$$\sum_{1 \leq a \leq P}^{\text{НОД}(a,d)=1} s_x\left(\frac{a}{d}\right) = \#\{\omega \in \Omega_{P/d}(d) \mid m'(\omega) \leq xm(\omega)\} + O(d).$$

Остаточный член оценивает количество пар (A_1, B_1) , которые не принимаются во внимание. Воспользовавшись леммой 1, отсюда получаем утверждение леммы 2 в рассматриваемом случае.

Легко заметить, что для $1 \leq a \leq d/2$ с $\text{НОД}(a, d) = 1$

$$\frac{d}{a} = [t_1, t_2, \dots, t_s], \quad \frac{d}{d-a} = [1, t_1 - 1, t_2, \dots, t_s].$$

Кроме того, для любого целого k

$$s_x\left(k + \frac{a}{d}\right) = s_x\left(\frac{a}{d}\right).$$

Опираясь на эти наблюдения и периодичность по $\text{mod } n'(\omega)$ решений $\bar{n}$ сравнения (2.4), распространяем утверждение леммы 2 на остальные $P > d/2$. $\square$

§3. Применение оценок сумм Клостермана

Для натурального числа q и целого l положим

$$\delta_q(l) = \begin{cases} 1, & \text{если } l \equiv 0 \pmod{q}, \\ 0, & \text{если } l \not\equiv 0 \pmod{q}. \end{cases}$$

Пусть Q — любое целое, а натуральное число P принимает значения от 1 до q включительно. Для целого $w \in (Q, Q + P]$ положим

$$\Delta_q(w; P, Q) = \begin{cases} 1, & \text{если } Q < w \leq Q + P, \\ 0, & \text{если } Q + P < w \leq Q + q. \end{cases}$$

Речь идет о характеристической функции, выделяющей целые, лежащие в полуинтервале $(Q, Q + P]$, из целых, лежащих в $(Q, Q + q]$. Воспользовавшись дискретным преобразованием Фурье по модулю q , получим разложение

$$\Delta_q(w; P, Q) = \sum_{-q/2 < k \leq q/2} \widehat{\Delta}_q(k; P, Q) \exp\left(2\pi i \frac{kw}{q}\right) \quad (3.1)$$

с коэффициентами

$$\widehat{\Delta}_q(k; P, Q) = \frac{1}{q} \sum_{l=Q+1}^{Q+P} \exp\left(-2\pi i \frac{kl}{q}\right).$$

Если $k \equiv 0 \pmod{q}$, то

$$\widehat{\Delta}_q(k; P, Q) = \widehat{\Delta}_q(0; P, Q) = \frac{P}{q}. \quad (3.2)$$

Суммируя геометрическую прогрессию, для $k \not\equiv 0 \pmod{q}$ получаем

$$\widehat{\Delta}_q(k; P, Q) = \frac{1}{q} \frac{1 - \exp(-2\pi i k P/q)}{1 - \exp(-2\pi i k/q)} \exp(-2\pi i k(Q+1)/q). \quad (3.3)$$

Из (3.2) и (3.3) немедленно следует хорошо известное неравенство

$$|\widehat{\Delta}_q(k; P, Q)| \leq \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ 1/|k|, & \text{если } 0 < |k| \leq q/2. \end{cases} \quad (3.4)$$

По определению для целых m и n

$$S_q(m, n) = \sum_{u, v=1}^q \delta_q(uv - 1) \exp\left(2\pi i \frac{mu + nv}{q}\right)$$

есть сумма Клостермана по модулю q с оценкой (для любого $\varepsilon > 0$)

$$S_q(m, n) \ll_{\varepsilon} q^{1/2+\varepsilon} \sqrt{\text{НОД}(m, q)} \quad (3.5)$$

(см. [6]). Так как $S_q(m, n) = S_q(n, m)$, то в правой части формулы (3.5) вместо m можно поставить n . В случае $m \equiv n \equiv 0 \pmod{q}$

$$S_q(m, n) = S_q(0, 0) = \varphi(q), \quad (3.6)$$

где $\varphi(q)$ — функция Эйлера, т.е. количество целых k из $(0, q]$, для которых $\text{НОД}(k, q) = 1$.

ЛЕММА 3. Пусть ε — любое положительное число. Тогда для любых $Q_1, Q_2, P_1, P_2 \in \mathbb{R}$, таких, что $0 < P_1, P_2 \leq q$,

$$\sum_{\substack{Q_1 < u \leq Q_1 + P_1 \\ Q_2 < v \leq Q_2 + P_2}} \delta_q(uv - 1) = \varphi(q) \frac{P_1 P_2}{q^2} + O_{\varepsilon}(q^{1/2+\varepsilon}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно заметить, что достаточно рассмотреть случай с целыми Q_1, Q_2 и натуральными P_1, P_2 . С помощью разложения (3.1), обозначив интересующую нас сумму через $\mathcal{D}_q(P_1, P_2; Q_1, Q_2)$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_q(P_1, P_2; Q_1, Q_2) &= \sum_{u=Q_1+1}^{Q_1+q} \sum_{v=Q_2+1}^{Q_2+q} \delta_q(uv - 1) \Delta_q(u; P_1, Q_1) \Delta_q(v; P_2, Q_2) \\ &= \sum_{-q/2 < m, n \leq q/2} \widehat{\Delta}_q(m; P_1, Q_1) \widehat{\Delta}_q(n; P_2, Q_2) S_q(m, n). \end{aligned}$$

Выделив из последней суммы слагаемое для $m = n = 0$, с помощью соотношений (3.1)–(3.6) находим:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_q(P_1, P_2; Q_1, Q_2) - \varphi(q) \frac{P_1 P_2}{q^2} &\ll_{\varepsilon} \sum_{m, n=1}^q \frac{1}{mn} q^{1/2+\varepsilon/2} \sqrt{\text{НОД}(m, q)} \\ &\ll q^{1/2+\varepsilon/2} \ln(1+q) \cdot \sum_{t \nmid q} \sqrt{t} \sum_{1 \leq m' t \leq q} \frac{1}{m' t} \ll q^{1/2+\varepsilon/2} \ln^2(1+q) \sum_{t \nmid q} \frac{1}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись стандартными оценками

$$\ln^2(1+q) \ll_{\varepsilon} q^{\varepsilon/4}, \quad \sum_{t \setminus q} \frac{1}{\sqrt{t}} \ll_{\varepsilon} q^{\varepsilon/4}$$

(по поводу второй см. [7]), получим утверждение леммы 3. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в лемме 3 считать P_2 любым положительным числом, то, разбивая $(Q_2, Q_2 + P_2)$ на полуинтервалы длины $\leq q$, получим асимптотическую формулу с остаточным членом

$$O_{\varepsilon}(q^{1/2+\varepsilon} + q^{-1/2+\varepsilon} P_2).$$

ЛЕММА 4. Пусть $q > 1$. Тогда для любого положительного $P \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in (0, 1]$ (для любого $\varepsilon > 0$)

$$\sum_{n=1}^{q-1} \left(\sum_{|\bar{n}| \leq P} \delta_q(n\bar{n} - 1) \right) \frac{1}{q + xn} = 2 \frac{\ln(1+x)}{x} \frac{\varphi(q)}{q^2} P + O_{\varepsilon}(q^{-1/2+\varepsilon} + Pq^{-3/2+\varepsilon}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись преобразованием Абеля

$$\sum_{1 \leq n \leq N} a(n)b(n) = \left(\sum_{1 \leq k \leq N} a(k) \right) b(N) + \sum_{1 \leq n < N} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} a(k) \right) (b(n) - b(n+1))$$

и принимая во внимание замечание к лемме 3, для рассматриваемой суммы получим выражение

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\substack{1 \leq u < q \\ |v| \leq P}} \delta_q(uv - 1) \right) \frac{1}{q + x(q-1)} \\ & + \sum_{1 \leq n < q-1} \left(\sum_{\substack{1 \leq u < n \\ |v| \leq P}} \delta_q(uv - 1) \right) \left(\frac{1}{q + xn} - \frac{1}{q + x(n+1)} \right) \\ & = \left(\varphi(q) \frac{2P}{q} + O_{\varepsilon}(q^{1/2+\varepsilon} + Pq^{-1/2+\varepsilon}) \right) \frac{1}{q + x(q-1)} \\ & + \sum_{1 \leq n < q-1} \left(\varphi(q) \frac{2Pn}{q^2} + O_{\varepsilon}(q^{1/2+\varepsilon} + Pq^{-1/2+\varepsilon}) \right) \left(\frac{1}{q + xn} - \frac{1}{q + x(n+1)} \right) \\ & = \frac{2\varphi(q)}{q^2} P \sum_{n=1}^{q-1} \frac{1}{q + xn} + O_{\varepsilon}(q^{-1/2+\varepsilon} + Pq^{-3/2+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Осталось только заметить, что

$$\sum_{n=1}^{q-1} \frac{1}{q + xn} = \int_0^q \frac{d\alpha}{q + x\alpha} + O\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{\ln(1+x)}{x} + O\left(\frac{1}{q}\right).$$

Лемма 4 доказана. $\square$

ЛЕММА 5. В предположениях леммы 4 равномерно по $x \in (0, 1]$

$$\sum_{\substack{1 \leq n < q \\ |\bar{n}| \leq P}} \frac{\delta_q(n\bar{n} - 1)}{(q + xn)(q^2 + \bar{n}^2)} = 2 \frac{\ln(1+x)}{x} \frac{\varphi(q)}{q^3} \operatorname{arctg} \frac{P}{q} + O_\varepsilon(q^{-5/2+\varepsilon}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать утверждение леммы для натуральных P . Записав нужную сумму в виде

$$\sum_{|\bar{n}| \leq P} \frac{1}{q^2 + \bar{n}^2} \left(\sum_{1 \leq n < q} \frac{\delta_q(n\bar{n} - 1)}{q + xn} \right)$$

и выполнив преобразование Абеля по $|\bar{n}|$, с помощью леммы 4 получим выражение

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{|\bar{n}| \leq P} \left(\sum_{1 \leq n < q} \frac{\delta_q(n\bar{n} - 1)}{q + xn} \right) \right) \frac{1}{q^2 + P^2} \\ & + \sum_{N=1}^{P-1} \left(\sum_{|\bar{n}| \leq N} \left(\sum_{1 \leq n < q} \frac{\delta_q(n\bar{n} - 1)}{q + xn} \right) \right) \left(\frac{1}{q^2 + N^2} - \frac{1}{q^2 + (N+1)^2} \right) \\ & = \left(2 \frac{\ln(1+x)}{x} \frac{\varphi(q)}{q^2} P + O_\varepsilon(q^{-1/2+\varepsilon} + Pq^{-3/2+\varepsilon}) \right) \frac{1}{q^2 + P^2} \\ & + \sum_{N=1}^{P-1} \left(2 \frac{\ln(1+x)}{x} \frac{\varphi(q)}{q^2} N + O_\varepsilon(q^{-1/2+\varepsilon} + Nq^{-3/2+\varepsilon}) \right) \left(\frac{1}{q^2 + N^2} - \frac{1}{q^2 + (N+1)^2} \right) \\ & = 2 \frac{\ln(1+x)}{x} \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{N=1}^P \frac{1}{q^2 + N^2} + O_\varepsilon(q^{-5/2+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Осталось только заметить, что

$$\sum_{N=1}^P \frac{1}{q^2 + N^2} = \int_0^P \frac{d\alpha}{q^2 + \alpha^2} + O\left(\frac{1}{q^2}\right) = \frac{1}{q} \operatorname{arctg} \frac{P}{q} + O\left(\frac{1}{q^2}\right).$$

Лемма 5 полностью доказана. $\square$

§4. Доказательство теоремы

Пусть R — произвольное натуральное число, большее единицы. Применяя лемму 2, получим, что

$$N_x^*(R) = \sum_{\substack{\text{НОД}(a,d)=1 \\ a^2+d^2 \leq R^2}} s_x\left(\frac{a}{d}\right) = \sum_{1 \leq d < R} \Phi_x(d; \sqrt{R^2 - d^2}) + O(R^2).$$

Последняя сумма с погрешностью $O(R^2)$ есть число целочисленных пятерок $(m, m', n, n', \bar{n})$, для которых

$$\begin{aligned} mn' + m'n &\leq R, \quad 1 \leq m' < xm, \quad 1 \leq n < n', \quad \text{НОД}(m, m') = \text{НОД}(n, n') = 1, \\ |\bar{n}| &\leq \sqrt{(R/(mn' + m'n))^2 - 1} \cdot n', \quad \bar{n}n \equiv 1 \pmod{n'}. \end{aligned}$$

Положив для удобства $n' = q$, отсюда получаем равенство

$$N_x^*(R) = \sum_{1 \leq q < R} \sum_{\substack{1 \leq n < q \\ |\bar{n}| \leq R}} \delta_q(n\bar{n} - 1) G_x^*(q, n, \bar{n}; R) + O(R^2),$$

где $G_x^*(q, n, \bar{n}; R)$ есть число пар натуральных (m, m') с

$$1 \leq m' \leq xm, \quad mq + m'n \leq \frac{qR}{\sqrt{q^2 + (\bar{n})^2}}, \quad \text{НОД}(m, m') = 1.$$

Величина $G_x(q, n, \bar{n}; R)$ определяется теми же условиями за исключением условия взаимной простоты m и m' . Она совпадает с числом целых точек в треугольнике с вершинами

$$(0, 0), \quad \left(\frac{qR}{(q + xn)\sqrt{q^2 + \bar{n}^2}}, \frac{xqR}{(q + xn)\sqrt{q^2 + \bar{n}^2}} \right), \quad \left(\frac{R}{\sqrt{q^2 + \bar{n}^2}}, 0 \right).$$

Поэтому

$$G_x(q, n, \bar{n}; R) = (\text{площадь}) + O(\text{периметр}) = \frac{x}{2} \frac{qR^2}{(q + xn)(q^2 + \bar{n}^2)} + O\left(\frac{R}{q + |\bar{n}|}\right).$$

Применяя вторую формулу обращения Мёбиуса, получим

$$G_x^*(q, n, \bar{n}; R) = \sum_{1 \leq t \leq R/q} \mu(t) G_x(q, n, \bar{n}; R/t).$$

Так как для $Q \geq 1$

$$\sum_{1 \leq t \leq Q} \frac{\mu(t)}{t^2} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\mu(t)}{t^2} + O(Q^{-1}) = \left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^2} \right)^{-1} + O(Q^{-1}) = \frac{6}{\pi^2} + O(Q^{-1}),$$

то

$$G_x^*(q, n, \bar{n}; R) = \frac{3x}{\pi^2} \frac{qR^2}{(q + xn)(q^2 + \bar{n}^2)} + W,$$

где

$$W \ll \sum_{1 \leq t \leq R/q} \frac{R}{t(q + |\bar{n}|)} \ll \frac{R}{q + |\bar{n}|} \ln \frac{R + q}{q}.$$

В результате получаем, что

$$N_x^*(R) = \frac{3x}{\pi^2} R^2 \sum_{1 \leq q < R} \sum_{\substack{1 \leq n < q \\ |\bar{n}| < R}} \delta_q(n\bar{n} - 1) \frac{q}{(q + xn)(q^2 + \bar{n}^2)} + V,$$

где

$$V \ll \sum_{1 \leq q < R} \sum_{\substack{1 \leq n < q \\ |\bar{n}| < R}} \delta_q(n\bar{n} - 1) \frac{R}{q + |\bar{n}|} \ln \frac{R + q}{q} + O(R^2).$$

Так как

$$\sum_{1 \leq n < q} \delta_q(n\bar{n} - 1) \leq 1,$$

то

$$\begin{aligned}
 V &\ll R \cdot \sum_{1 \leq q < R} \ln \left(1 + \frac{R}{q} \right) \cdot \sum_{|\bar{n}| < R} \frac{1}{q + |\bar{n}|} \\
 &\ll R \cdot \sum_{1 \leq q < R} \ln \left(1 + \frac{R}{q} \right) \cdot \int_0^R \frac{d\alpha}{q + \alpha} = R \sum_{1 \leq q < R} \ln^2 \left(1 + \frac{R}{q} \right) \\
 &\ll R \int_0^R \ln^2 \left(1 + \frac{R}{\alpha} \right) d\alpha = R^2 \int_1^\infty \frac{\ln^2(1 + \beta)}{\beta^2} d\beta \ll R^2.
 \end{aligned}$$

Итак,

$$N_x^*(R) = \frac{3x}{\pi^2} R^2 \sum_{1 \leq q < R} q \cdot U_x(R; q) + O(R^2),$$

где

$$U_x(R; q) = \sum_{\substack{1 \leq n < q \\ |\bar{n}| < R}} \delta_q(n\bar{n} - 1) \frac{1}{(q + xn)(q^2 + \bar{n}^2)}.$$

Применяя лемму 5, получим

$$N_x^*(R) = \frac{6}{\pi^2} \ln(1 + x) R^2 \sum_{1 \leq q < R} \frac{\varphi(q)}{q^2} \operatorname{arctg} \frac{R}{q} + O(R^2).$$

Так как

$$\operatorname{arctg} \frac{R}{q} = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{q}{R}\right),$$

то

$$N_x^*(R) = \frac{3}{\pi} \ln(1 + x) R^2 \sum_{1 \leq q < R} \frac{\varphi(q)}{q^2} + O(R^2).$$

Напомним, что (см. [7])

$$\varphi(q) = q \sum_{t \nmid q} \frac{\mu(t)}{t}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq q < R} \frac{\varphi(q)}{q^2} &= \sum_{1 \leq q < R} \frac{1}{q} \sum_{t \nmid q} \frac{\mu(t)}{t} = \sum_{1 \leq q < R} \frac{\mu(t)}{t} \cdot \sum_{1 \leq tq' < R} \frac{1}{tq'} \\
 &= \sum_{1 \leq t < R} \frac{\mu(t)}{t^2} \left(\sum_{1 \leq q' < R/t} \frac{1}{q'} \right) = \sum_{1 \leq t < R} \frac{\mu(t)}{t^2} \left(\ln \frac{R}{t} + O(1) \right) \\
 &= \left(\sum_{t=1}^\infty \frac{\mu(t)}{t^2} \right) \ln R + O(1) = \frac{6}{\pi^2} \ln R + O(1).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$N_x^*(R) = \frac{18}{\pi^3} \ln(1 + x) R^2 \ln R + O(R^2)$$

и, окончательно,

$$\begin{aligned} N_x(R) &= \sum_{1 \leq t \leq R} N_x^*\left(\frac{R}{t}\right) = \sum_{1 \leq t \leq R} \left(\frac{18}{\pi^3} \ln(1+x) \left(\frac{R}{t}\right)^2 \ln \frac{R}{t} + O\left(\frac{R^2}{t^2}\right) \right) \\ &= \frac{18}{\pi^3} \ln(1+x) \left(\sum_{1 \leq t \leq R} \frac{1}{t^2} \right) R^2 \ln R + O(R^2) = \frac{3}{\pi} \ln(1+x) R^2 \ln R + O(R^2). \end{aligned}$$

Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Цепные дроби. МЦНМО, М., 2000.
2. Задачи Арнольда. Фазис, М., 2000, задача 1993-11(С).
3. Авдеева М. О., Быковский В. А. Решение задачи Арнольда о статистиках Гаусса–Кузьмина. Препринт, Владивосток, Дальнаука, 2002.
4. Хинчин А. Я. Цепные дроби. Физматгиз, М., 1961.
5. Heilbronn H. On the average length of a class of finite continued fractions. In: Abh. Zahlentheorie Anal., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, Plenum Press, New York, 1968, pp. 89–96.
6. Сарнак П. Модулярные формы и их приложения. Фазис, М., 1998.
7. Виноградов И. М. Основы теории чисел. Наука, М., 1972.

Хабаровский государственный
педагогический университет
Хабаровское отделение Института
прикладной математики ДВО РАН
email: mariya@iam.khv.ru

Поступило в редакцию
16 февраля 2003 г.