Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, Уравнения теплопроводности в неголономном репере, *Функци. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 2, 12–27

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:06:12

УДК 517.958+515.178.2

Уравнения теплопроводности в неголономном репере*

© 2004. В. М. БУХШТАБЕР, Д. В. ЛЕЙКИН

Введение

В §1 работы рассматривается следующая задача.

Для данных линейных дифференциальных операторов

$$L_i = \sum_{k=0}^n v_{i,k}(\lambda) \partial_{\lambda_k}, \quad i = 0, \dots, n, \quad (1)$$

задающих неголономный репер, найти линейные дифференциальные операторы второго порядка вида

$$H_i = \delta^{(i)}(\lambda) + \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^m (\alpha_{a,b}^{(i)}(\lambda) \partial_{u_a} \partial_{u_b} + 2\beta_{a,b}^{(i)}(\lambda) u_a \partial_{u_b} + \gamma_{a,b}^{(i)}(\lambda) u_a u_b),$$

такие, что система уравнений

$$L_i(\psi) = H_i(\psi), \quad i = 0, \dots, n, \quad (2)$$

совместна, т. е. имеет ненулевые решения $\psi = \psi(u_1, \dots, u_m, \lambda_0, \dots, \lambda_n)$.

Систему уравнений (2) мы называем уравнениями теплопроводности в данном неголономном репере (1).

В работе построено преобразование, сопоставляющее каждому дифференцируемому отображению $\mathcal{F}: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C} \times \text{PSp}(2m, \mathbb{C})$ набор операторов $\{H_i\}$, совместных с репером $\{L_i\}$ в указанном выше смысле. На основе классической параметризации группы $\text{PSp}(2m, \mathbb{C})$ построена алгебра операторов $A(\mathcal{X})$ на пространстве $\mathcal{R}$ решений системы (2), а также «примитивное решение» $\phi_0(u, \lambda)$ и примитивное $\mathbb{Z}^{2m}$ -инвариантное решение $\phi_1(u, \lambda)$, полученное усреднением решения ϕ_0 по содержащейся в алгебре $A(\mathcal{X})$ решетке. Один из главных результатов настоящей работы — доказательство того, что примитивное $\mathbb{Z}^{2m}$ -инвариантное решение совпадает с «общей сигма-функцией» на расслоении абелевых торов (см. [6]).

В §2 полученные результаты применяются к важному случаю, когда репер и отображение $\mathcal{F}$ определяются семейством плоских алгебраических кривых. Все существенные детали общей конструкции показаны на классическом, далеко не тривиальном, примере эллиптических кривых и функций. Реализация этой конструкции для семейства эллиптических кривых позволяет нам изложить суть дела, не затемненную техническими тонкостями, неизбежными для кривых старших родов.

*Исследования первого автора выполнены при финансовой поддержке РФФИ (грант 01-01-96301) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант 2185.2003.1).

В случае старших родов рассматривается семейство плоских алгебраических кривых, заданное алгебраическим многообразием

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, \lambda) \in \mathbb{C}^{n+3} \mid f(x_1, x_2; \lambda) = 0\},$$

где $f(x_1, x_2; \lambda) = x_1^{s_0} + x_2^{n_0} + \sum \lambda_i x_1^{s_i} x_2^{n_i}$. Для этого семейства, используя методы работы [10], основанные на фундаментальных результатах теории особенностей [1, 17], построены векторные поля $\{L_i\}$, касающиеся дискриминанта $\Sigma = \{\lambda \mid \Delta(\lambda) = 0\}$ семейства Γ . Рассматривая Γ как алгебраическое расслоение с проекцией $p: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, $(x_1, x_2, \lambda) \mapsto \lambda$, мы выбираем $\mathcal{F}$ в виде $(\log \Delta, \Omega)$, где $\Delta(\lambda)$ — полином, задающий дискриминант, а $\Omega(\lambda)$ — матрица периодов вектора базисных абелевых дифференциалов первого и второго рода по симплектическому базису циклов в слое над точкой λ . В итоге, используя некоторые классические построения [2] и результаты работы [7], мы получили конструкцию, для которой разность левой и правой частей системы (2) дает линейные операторы, аннулирующие σ -функцию семейства кривых Γ . Для гиперэллиптических σ -функций указан явный вид производящих функций, задающих репер $\{L_i\}$ и операторы $\{H_i\}$.

Авторы благодарны С. П. Новикову за стимулирующий интерес к данному исследованию, а также И. М. Кричеверу и В. З. Энольскому за полезные обсуждения.

§1. Основная задача

1.1. Постановка задачи. Пусть $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ — набор коммутирующих переменных. Обозначим через $\mathcal{C}(\lambda)$ кольцо дифференцируемых функций от λ . Рассмотрим матрицу $V(\lambda) = (v_{i,j}(\lambda))$, $i, j = 0, 1, \dots, n$, где $v_{i,j}(\lambda) \in \mathcal{C}(\lambda)$. Положим $\Delta(\lambda) = \det V$. Далее мы будем предполагать, что $\Delta \neq 0$. Зададим подвижный репер $\{L_0, \dots, L_n\}$, определив векторные поля по формуле $L_i = \sum_{q=0}^n v_{i,q}(\lambda) \partial_{\lambda_q}$. Пусть $c_{i,j}^k(\lambda)$ — структурные функции этого репера.

Рассматривая λ_i как оператор умножения на функцию λ_i в кольце $\mathcal{C}(\lambda)$, получим, что коммутационные соотношения

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=0}^n c_{i,j}^k(\lambda) L_k, \quad [L_i, \lambda_q] = v_{i,q}(\lambda), \quad [\lambda_q, \lambda_r] = 0 \quad (1.1)$$

задают структуру алгебры Ли в $\mathcal{C}(\lambda)$ -модуле с образующими $1, L_0, \dots, L_n$.

Пусть $u = (u_1, \dots, u_m)$ — другой набор коммутирующих переменных и $\mathcal{C}(u, \lambda)$ — кольцо дифференцируемых функций от u и λ . Положим

$$Q_i = L_i + \delta^{(i)}(\lambda) + \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^m (\alpha_{a,b}^{(i)}(\lambda) \partial_{u_a, u_b} + 2\beta_{a,b}^{(i)}(\lambda) u_a \partial_{u_b} + \gamma_{a,b}^{(i)}(\lambda) u_a u_b). \quad (1.2)$$

ЗАДАЧА 1. Найти условия на данные $\{\alpha^{(i)}(\lambda), \beta^{(i)}(\lambda), \gamma^{(i)}(\lambda), \delta^{(i)}(\lambda)\}$, достаточные для того, чтобы операторы (1.2) реализовывали представление алгебры Ли (1.1) в кольце операторов на $\mathcal{C}(u, \lambda)$.

1.2. Конструкция операторов Q_i . Отметим, что соотношения $[Q_i, \lambda_q] = v_{i,q}(\lambda)$ автоматически выполняются для операторов (1.2). Рассмотрим систему уравнений

$$[Q_i, Q_j] = \sum_{k=0}^n c_{i,j}^k(\lambda) Q_k. \quad (1.3)$$

Задание операторов Q_i вида (1.2) эквивалентно заданию троек

$$Q_i^\wedge = (L_i, M^{(i)}(\lambda), \delta^{(i)}(\lambda)),$$

где $M^{(i)}(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha^{(i)}(\lambda) & (\beta^{(i)}(\lambda))^t \\ \beta^{(i)}(\lambda) & \gamma^{(i)}(\lambda) \end{pmatrix}$ — симметрическая $(2m \times 2m)$ -матрица. Заметим, что отображение $Q_i \mapsto Q_i^\wedge$ является линейным отображением. Имеем

$$[Q_i, Q_j]^\wedge = ([L_i, L_j], M^{(i)}JM^{(j)} - M^{(j)}JM^{(i)} + L_i(M^{(j)}) - L_j(M^{(i)}), \\ \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\alpha^{(i)}\gamma^{(j)} - \alpha^{(j)}\gamma^{(i)}) + L_i(\delta^{(j)}) - L_j(\delta^{(i)})),$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ -1_m & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, построение решения системы (1.3) сводится к решению двух систем уравнений

$$M^{(i)}JM^{(j)} - M^{(j)}JM^{(i)} + L_i(M^{(j)}) - L_j(M^{(i)}) - \sum c_{i,j}^k M^{(k)} = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\alpha^{(i)}\gamma^{(j)} - \alpha^{(j)}\gamma^{(i)}) + L_i(\delta^{(j)}) - L_j(\delta^{(i)}) - \sum c_{i,j}^k \delta^{(k)} = 0. \quad (1.5)$$

Из (1.4), в частности, вытекает, что

$$\alpha^{(i)}\gamma^{(j)} - \alpha^{(j)}\gamma^{(i)} - [\beta^{(i)}, \beta^{(j)}] + L_i(\beta^{(j)}) - L_j(\beta^{(i)}) - \sum c_{i,j}^k \beta^{(k)} = 0,$$

и это позволяет упростить систему уравнений (1.5). Положим $\delta^{(i)} = \chi^{(i)} + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \beta^{(i)}$. Получаем уравнения

$$L_i(\chi^{(j)}) - L_j(\chi^{(i)}) - \sum c_{i,j}^k \chi^{(k)} = 0. \quad (1.6)$$

Эта система представляет собой условие совместности системы $\{L_i(\psi) - \chi^{(i)}\psi = 0\}$, откуда вытекает, что набор функций $\{\chi_i\}$ дает решение системы (1.6) тогда и только тогда, когда $\chi^{(i)} = L_i(\varphi(\lambda))$ для некоторой функции $\varphi(\lambda) \in \mathcal{C}(\lambda)$. Таким образом,

$$\delta^{(i)}(\lambda) = L_i(\varphi(\lambda)) + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \beta^{(i)}(\lambda).$$

Перейдем к системе уравнений (1.4). Положим $M^{(i)} = JA^{(i)}$. Симметричность матриц $M^{(i)}$ влечет за собой равенства $A^{(i)}J + J(A^{(i)})^t = 0$, т. е. $A^{(i)} \in \mathfrak{sp}(2m, \mathcal{C}(\lambda))$.

Тогда

$$[A^{(j)}, A^{(i)}] + L_i(A^{(j)}) - L_j(A^{(i)}) - \sum c_{i,j}^k A^{(k)} = 0. \quad (1.7)$$

Полученная система (1.7) представляет собой условие совместности системы уравнений

$$L_i(\xi) + \xi A^{(i)} = 0, \quad \xi = (\xi_1(\lambda), \dots, \xi_{2m}(\lambda)), \quad i = 0, \dots, n. \quad (1.8)$$

Обозначим пространство решений системы (1.8) через $\mathcal{X}$. Для любых $\xi, \tilde{\xi} \in \mathcal{X}$ имеем

$$L_i(\tilde{\xi}J\xi^t) = L_i(\tilde{\xi})J\xi^t + \tilde{\xi}JL_i(\xi^t) = -\tilde{\xi}(A^{(i)}J + J(A^{(i)})^t)\xi^t = 0 \implies \tilde{\xi}J\xi^t = \text{const}.$$

Таким образом, на линейном пространстве $\mathcal{X}$ определена билинейная кососимметрическая функция

$$\mathcal{X} \otimes \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}: \langle \tilde{\xi}, \xi \rangle = \tilde{\xi}J\xi^t.$$

Пусть $\Omega(\lambda)$ — невырожденная матрица, такая, что $\Omega J \Omega^t = \text{const}$; тогда матрицы $\{A^{(i)} = -\Omega^{-1} L_i(\Omega)\}$ задают решение системы (1.7). При этом, если K — невырожденная постоянная матрица, то решения, заданные матрицами $K\Omega(\lambda)$ и $\Omega(\lambda)$, совпадают. Используем это обстоятельство и зафиксируем нормировку $\Omega J \Omega^t = 2\pi i J$. Такой выбор нормировки обеспечивает главную поляризацию абелевых торов, которые возникнут ниже.

Мы получили следующее решение задачи 1:

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\Omega = \Omega(\lambda)$ — невырожденная $(2m \times 2m)$ -матрица, такая, что $\Omega J \Omega^t = 2\pi i J$ и $\varphi = \varphi(\lambda) \in \mathcal{C}(\lambda)$. Тогда операторы $\{Q_0, \dots, Q_n\}$ вида (1.2), заданные с помощью троек

$$Q_i^{\wedge} = (L_i, J L_i(\Omega^{-1})\Omega, L_i(\varphi) + \frac{1}{4} \text{tr}(P L_i(\Omega^{-1})\Omega)),$$

где $P = \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & -1_m \end{pmatrix}$, реализуют представление алгебры Ли (1.1) в кольце операторов на $\mathcal{C}(u, \lambda)$.

Таким образом, пространство полученных представлений алгебр Ли (1.1) является пространством дифференцируемых отображений

$$\mathcal{F}: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C} \times \text{PSp}(2m, \mathbb{C}).$$

Для данной алгебры Ли (1.1) обозначим через $\mathcal{Q}$ множество всех ее представлений, описанных в теореме 1.1. На множестве $\mathcal{Q}$ имеется следующее естественное действие группы $\text{PSp}(2m, \mathcal{C}(\lambda))$

ЛЕММА 1.2. Пусть $T(\lambda) \in \text{PSp}(2m, \mathcal{C}(\lambda))$. Оператор $T: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ переводит представление $\{Q_i^{\wedge}\}$ с $Q_i^{\wedge} = (L_i, M^{(i)}(\lambda), \delta^{(i)}(\lambda))$ в представление $\{Q_i^T\}$ с

$$(Q_i^T)^{\wedge} = (L_i, -J T J M^{(i)} T^{-1} + J L_i(T) T^{-1}, \delta^{(i)} + \frac{1}{4} \text{tr}(P L_i(T) T^{-1})).$$

Построим на основе теоремы 1.1 явное решение задачи 1.

Параметризуем множество матриц Ω , удовлетворяющих уравнению $\Omega J \Omega^t = 2\pi i J$, с помощью троек $(\omega, \tau, \varkappa)$, где $\omega \in \text{GL}(m, \mathcal{C}(\lambda))$, а $\tau^t = \tau$ и $\varkappa^t = \varkappa$, следующим образом. Представим матрицу Ω как блочную (2×2) -матрицу, $\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{1,1} & \Omega_{1,2} \\ \Omega_{2,1} & \Omega_{2,2} \end{pmatrix}$, и положим

$$\Omega_{1,1} = \omega, \quad \Omega_{1,2} = \omega \varkappa, \quad \Omega_{2,1} = \tau \omega, \quad \Omega_{2,2} = \tau \omega \varkappa + 2\pi i (\omega^t)^{-1}. \quad (1.9)$$

Можно непосредственно проверить, что равенство $\Omega J \Omega^t = 2\pi i J$ выполняется тождественно. Набор $\{\omega(\lambda), \tau(\lambda), \varkappa(\lambda), \varphi(\lambda)\}$ будем называть параметрами представления алгебры Ли (1.1).

Применив теорему 1.1 к параметризованной матрице Ω , получаем следующий результат:

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $\Omega(\lambda)$ — матрица, параметризованная, согласно (1.9), данными $\{\omega(\lambda), \tau(\lambda), \varkappa(\lambda), \varphi(\lambda)\}$. Тогда имеет место представление алгебры Ли (1.1), реализуемое операторами $\{Q_i\}$ вида (1.2), где

$$\begin{aligned} \alpha^{(i)} &= -\frac{1}{2\pi i} \omega^t L_i(\tau) \omega, & (\beta^{(i)})^t &= \varkappa \alpha^{(i)} + \omega^{-1} L_i(\omega), \\ \gamma^{(i)} &= -\varkappa \alpha^{(i)} \varkappa + \varkappa \beta^{(i)} + (\beta^{(i)})^t \varkappa + L_i(\varkappa), \\ \delta^{(i)} &= \frac{1}{2} \text{tr}(\alpha^{(i)} \varkappa) + L_i(\varphi + \frac{1}{2} \log(\det \omega)). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Задача 1 решена полностью.

1.3. Прimitивное решение. Выберем представление $\{Q_i\} \in \mathcal{Q}$ и зафиксируем его параметризацию набором $\{\omega, \tau, \varkappa, \varphi\}$ согласно (1.10).

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$Q_i(\phi(u, \lambda)) = 0, \quad i = 0, \dots, n, \quad (1.11)$$

и обозначим через $\mathcal{R}$ множество ее решений в целых по u функциях.

ЛЕММА 1.4. *Функция вида*

$$\phi(u, \lambda) = \mu(\lambda) \exp\{u^t \Phi(\lambda) u\}, \quad (1.12)$$

где $\Phi(\lambda)$ — симметрическая $(m \times m)$ -матрица над $\mathcal{C}(\lambda)$ и $\mu(\lambda) \in \mathcal{C}(\lambda)$, дает решение системы (1.11), т.е. $\phi \in \mathcal{R}$, тогда и только тогда, когда

$$\Phi(\lambda) = -\frac{1}{2}\varkappa, \quad \mu(\lambda) = \mu_0(\det \omega)^{-1/2} e^{-\varphi(\lambda)}, \quad \mu_0 \in \mathbb{C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим выражение (1.12) в систему уравнений (1.11). Получим систему уравнений на Φ и μ

$$2\Phi\alpha^{(i)}\Phi + \Phi\beta^{(i)} + (\beta^{(i)})^t\Phi + \gamma^{(i)} + L_i(\Phi) = 0,$$

$$L_i(\log(\mu)) + \text{tr}(\alpha^{(i)}\Phi) + \delta^{(i)} = 0.$$

Сопоставив эти уравнения с (1.10), немедленно получаем утверждение леммы. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Для системы (1.11) с параметрами $\{\omega(\lambda), \tau(\lambda), \varkappa(\lambda), \varphi(\lambda)\}$ будем называть примитивным решением функцию

$$\phi_0(u, \lambda) = \frac{\mu_0}{\sqrt{\det \omega}} \exp \left\{ -\varphi(\lambda) - \frac{1}{2} u^t \varkappa u \right\}. \quad (1.13)$$

Важно отметить, что ϕ_0 не зависит от τ .

1.4. Алгебра операторов на $\mathcal{R}$. Пусть $\xi = (\xi_1(\lambda), \dots, \xi_{2m}(\lambda))$. Положим

$$S_\xi = \sum_{j=1}^m (\xi_j(\lambda) \partial_{u_j} + \xi_{m+j}(\lambda) u_j).$$

ЛЕММА 1.6. *Следующие условия эквивалентны:*

- (a) $[S_\xi, Q_i] = 0$,
- (b) $L_i(\xi) + \xi A^{(i)} = 0$, т.е. $\xi \in \mathcal{X}$.

Используя невырожденную билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$, введем алгебру $A(\mathcal{X})$ как факторалгебру тензорной алгебры $T\mathcal{X} = \mathbb{C} \cdot 1 + \mathcal{X} + \mathcal{X} \otimes \mathcal{X} + \dots$ линейного пространства $\mathcal{X}$ по соотношению $\tilde{\xi} \otimes \xi - \xi \otimes \tilde{\xi} - \langle \tilde{\xi}, \xi \rangle \cdot 1 = 0$.

ЛЕММА 1.7. *Сопоставляя единице $1 \in A(\mathcal{X})$ тождественный оператор на $\mathcal{R}$, элементам $\xi \in \mathcal{X}$ операторы S_ξ и элементам $\tilde{\xi} \otimes \xi \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{X}$ композиции $S_{\tilde{\xi}} \circ S_\xi$, получаем действие алгебры $A(\mathcal{X})$ на множестве $\mathcal{R}$.*

Из леммы 1.6 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.8. *Пусть $\xi \in \mathcal{X}$. Тогда оператор $W_\xi = \exp S_\xi$ действует на $\mathcal{R}$, т.е. переводит решение системы (1.11) в решение.*

Положим $\varrho_1 = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, $\varrho_2 = (\xi_{m+1}, \dots, \xi_{2m})$ и $S_1 = \sum_{j=1}^m \xi_j \partial_{u_j}$, $S_2 = \sum_{j=1}^m \xi_{m+j} \partial_{u_j}$. Поскольку $[S_1, S_2] = \varrho_1 \varrho_2^t$ и, следовательно, $[S_i, [S_i, S_j]] = 0$, $i, j = 1, 2$, используя формулу Кэмпбелла–Хаусдорфа, получаем

$$W_\xi = \exp S_\xi = \exp\{S_1 + S_2\} = \exp\{S_2 - \tfrac{1}{2}[S_2, S_1]\} \circ \exp\{S_1\}.$$

Таким образом, оператор $W_\xi = W_{(\varrho_1, \varrho_2)}$ представляется в виде композиции оператора сдвига $\exp\{S_1\}$ по переменным u и оператора умножения на экспоненту от линейной функции переменных u . Действие этого оператора дается формулой

$$W_{(\varrho_1, \varrho_2)}(\phi(u, \lambda)) = \phi(u + \varrho_1^t, \lambda) \exp\{\varrho_2(u + \tfrac{1}{2}\varrho_1^t)\}. \quad (1.14)$$

Композицией преобразований вида (1.14) является преобразование такого же вида, но с точностью до умножения на функцию от λ , а в условиях нашей конструкции — с точностью до умножения на постоянную.

Расширим алгебру $A(\mathcal{X})$, включив в нее все операторы W_ξ , $\xi \in \mathcal{X}$. Для полученного расширения сохраним прежнее обозначение.

ЛЕММА 1.9. Пусть $\xi, \tilde{\xi} \in \mathcal{X}$. Операторы $W_{\tilde{\xi}}$ и W_ξ перестановочны тогда и только тогда, когда

$$[S_{\tilde{\xi}}, S_\xi] = \tilde{\xi} J \xi^t = \langle \xi, \tilde{\xi} \rangle = 2\pi i N, \quad N \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим композицию $W_\xi \circ W_{\tilde{\xi}}$. Применяя формулу Кэмпбелла–Хаусдорфа при условии, что $[S_{\tilde{\xi}}, S_\xi] = \tilde{\xi} J \xi^t \in \mathbb{C}$, получаем

$$\exp\{S_\xi + S_{\tilde{\xi}}\} = W_\xi \circ W_{\tilde{\xi}} \exp\{-\tfrac{1}{2}[S_{\tilde{\xi}}, S_\xi]\} = W_{\tilde{\xi}} \circ W_\xi \exp\{\tfrac{1}{2}[S_{\tilde{\xi}}, S_\xi]\}.$$

Утверждение леммы вытекает из уравнения

$$\exp\{-\tfrac{1}{2}[S_{\tilde{\xi}}, S_\xi]\} = \exp\{\tfrac{1}{2}[S_{\tilde{\xi}}, S_\xi]\}. \quad \square$$

Обозначим через $\mathcal{W}$ абелеву группу, мультипликативно порожденную коммутирующими операторами W_ξ .

По теореме 1.1 строки матрицы $\Omega(\lambda)$ образуют базис линейного пространства $\mathcal{X}$. Используя условие нормировки $\Omega J \Omega^t = 2\pi i J$, получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 1.10. Группа $\mathcal{W}$ изоморфна группе $\mathbb{Z}^{2m}$. Изоморфизм $H: \mathbb{Z}^{2m} \rightarrow \mathcal{W}$ задается формулой $H(\mathfrak{z}) = \exp\{\pi i \mathfrak{z}_2 \mathfrak{z}_1^t\} W_{\mathfrak{z} \Omega}$, где $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$ и $\mathfrak{z}_1^t, \mathfrak{z}_2^t \in \mathbb{Z}^m$.

Преобразование $W_{\mathfrak{z} \Omega}$ действует по формуле (1.14), в которой параметры (ϱ_1, ϱ_2) задаются, согласно параметризации (1.9), выражениями

$$\varrho_1 = (\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 \tau) \omega, \quad \varrho_2 = \varrho_1 \kappa + 2\pi i \mathfrak{z}_2 (\omega^t)^{-1}.$$

1.5. Примитивное $\mathbb{Z}^{2m}$ -инвариантное решение и σ -функция. Применим $H(\mathfrak{z})$ к примитивному решению (1.13). Получаем

$$H(\mathfrak{z})(\phi_0(u, \lambda)) = \mu(\lambda) H(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) e^{-u^t \kappa u / 2} = \phi_0(u, \lambda) \exp \pi i \{\mathfrak{z}_2 \tau \mathfrak{z}_2^t + 2\mathfrak{z}_2 (\omega^t)^{-1} u\}.$$

Положим

$$\phi_1(u, \lambda) = \sum_{\mathfrak{q}^t \in \mathbb{Z}^m} H(0, \mathfrak{q}) \phi_0(u, \lambda) = \phi_0(u, \lambda) \sum_{\mathfrak{q}^t \in \mathbb{Z}^m} \exp \pi i \{\mathfrak{q} \tau \mathfrak{q}^t + 2\mathfrak{q} (\omega^t)^{-1} u\}.$$

ЛЕММА 1.11. Функция $\phi_1(u, \lambda) \in \mathcal{R}$ инвариантна относительно действия группы $\mathcal{W} \sim \mathbb{Z}^{2m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим $H(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$ к ϕ_1 . Получаем

$$\begin{aligned} H(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)(\phi_1) &= \phi_0 e^{\pi i \{ \mathfrak{z}_2 \tau \mathfrak{z}_2^t + 2 \mathfrak{z}_2 (\omega^t)^{-1} u \}} \sum_{\mathbf{q}^t \in \mathbb{Z}^m} e^{\pi i \{ \mathbf{q} \tau \mathbf{q}^t + 2 \mathbf{q} (\omega^t)^{-1} u + 2 \mathbf{q} (\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 \tau)^t \}} \\ &= \phi_0 \sum_{\mathbf{q}^t \in \mathbb{Z}^m} e^{\pi i \{ (\mathbf{q} + \mathfrak{z}_2) \tau (\mathbf{q} + \mathfrak{z}_2)^t + 2 (\mathbf{q} + \mathfrak{z}_2) (\omega^t)^{-1} u \}} = \phi_1. \end{aligned} \quad \square$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Функцию

$$\phi_1(u, \lambda) = \frac{\mu_0}{\sqrt{\det \omega}} \exp \left\{ -\varphi(\lambda) - \frac{1}{2} u^t \mathcal{K} u \right\} \sum_{\mathbf{q}^t \in \mathbb{Z}^m} \exp \pi i \{ \mathbf{q} \tau \mathbf{q}^t + 2 \mathbf{q} (\omega^t)^{-1} u \} \quad (1.15)$$

будем называть примитивным $\mathbb{Z}^{2m}$ -инвариантным решением системы (1.11) с параметрами $\{\omega(\lambda), \tau(\lambda), \mathcal{K}(\lambda), \varphi(\lambda)\}$.

В работе [6, pp. 10–13] приведено построение целой функции σ на универсальном расслоении главнополяризованных $2m$ -мерных абелевых торов, которая характеризуется инвариантностью относительно действия модулярной группы $\mathrm{Sp}(2m, \mathbb{Z})$. В обозначениях настоящей работы эта функция записывается в виде $\sigma = \sigma(u, \omega^t/2, \omega^t \tau/2)$.

ТЕОРЕМА 1.13. Примитивное $\mathbb{Z}^{2m}$ -инвариантное решение системы (1.11) с параметрами $\{\omega(\lambda), \tau(\lambda), \mathcal{K}(\lambda), \varphi(\lambda)\}$ совпадает (с точностью до обозначений) с функцией σ из [6, Definition 1.2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам потребуется следующий результат. Пусть выполнено соотношение

$$\begin{pmatrix} \omega_1^t & \eta_1^t \\ \omega_2^t & \eta_2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ -1_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} = -2\pi i \ell \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ -1_m & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell \in \mathbb{N}. \quad (1.16)$$

ЛЕММА 1.14. Пусть $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{C}^m$. Линейное пространство $\mathcal{L}(\varepsilon, \varepsilon')$ решений функционального уравнения

$$\phi(u + \omega_1 \mathbf{q} + \omega_2 \mathbf{q}') = \exp \left\{ \frac{1}{2} (\eta_1 \mathbf{q} + \eta_2 \mathbf{q}')^t (2u + \omega_1 \mathbf{q} + \omega_2 \mathbf{q}') + \varepsilon^t \omega_1 \mathbf{q} + (\varepsilon')^t \omega_2 \mathbf{q}' \right\} \phi(u), \quad (1.17)$$

где $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathbb{Z}^m$, в классе целых функций имеет размерность ℓ^m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стандартное доказательство состоит в сведении функционального уравнения (1.17) случаю, когда

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_m & \tau \\ 0 & -2\pi i \ell 1_m \end{pmatrix}.$$

Параметризуем соотношения (1.16), полагая $\omega_2 = \omega_1 \tau$, $\eta_1 = -\mathcal{K} \omega_1$ и $\eta_2 = -\mathcal{K} \omega_1 \tau - 2\pi i \ell (\omega_1^t)^{-1}$; как обычно, $\tau^t = \tau$ и $\mathcal{K}^t = \mathcal{K}$. Функция

$$\vartheta(v) = \exp \left\{ \left(\frac{1}{2} v^t \omega_1^t \mathcal{K} - \varepsilon^t \right) \omega_1 v \right\} \phi \left(\omega_1 \left(v + \frac{1}{2\pi i} \tau (\varepsilon' - \varepsilon) \right) \right)$$

удовлетворяет уравнениям

$$\vartheta(v + \mathbf{e}_k) = \vartheta(v) \quad \text{и} \quad \vartheta(v + \tau \mathbf{e}_k) = \exp \{ -\pi i \ell (2v^t + \mathbf{e}_k^t \tau) \mathbf{e}_k \} \vartheta(v),$$

где $\mathbf{e}_k$ есть k -й орт, $k = 1, \dots, n$. Из первого уравнения следует, что $\vartheta(v)$ допускает разложение в ряд Фурье,

$$\vartheta(v) = \sum_{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^m} c_{\mathbf{q}} \exp\{2\pi i \mathbf{q}^t v\}.$$

Подставляя этот ряд во второе уравнение, получаем рекуррентные соотношения на коэффициенты $c_{\mathbf{q}}$:

$$c_{\mathbf{q} + \ell \mathbf{e}_k} = c_{\mathbf{q}} \exp\{\pi i (2\mathbf{q}^t \tau + \ell \mathbf{e}_k \tau) \mathbf{e}_k\};$$

таким образом, $\vartheta(v)$ определяется ℓ^m коэффициентами $c_{\mathbf{r}}$, $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^m / \ell \mathbb{Z}^m$. $\square$

Из доказанной леммы и леммы 1.11 вытекает, что, поскольку для матрицы $\Omega(\lambda)$ в уравнении (1.16) $\ell = 1$, любая функция $\psi(u, \lambda)$, инвариантная относительно действия группы $\mathcal{W}$, заданного операторами $H(\mathfrak{z})$, отличается от $\phi_1(u, \lambda)$ не более чем на множитель, зависящий от переменных λ .

Инвариантность функции ϕ_1 относительно действия модулярной группы $\mathrm{Sp}(2m, \mathbb{Z})$ следует из инвариантности конструкции операторов, см. теорему 1.1 и лемму 1.2. $\square$

§2. Плоские алгебраические кривые

Выше во всех построениях подвижный репер $\{L_0, \dots, L_n\} \in \mathrm{Der} \mathcal{C}(\lambda)$ и задающая его представление пара $(\varphi, \Omega) \in \mathcal{C}(\lambda) \times \mathrm{PSp}(2m, \mathcal{C}(\lambda))$ выбирались независимыми друг от друга. Здесь мы перейдем к рассмотрению конструкции, в которой все эти объекты строятся исходя из семейства плоских алгебраических кривых.

Начнем с описания общей схемы конструкции.

Рассмотрим семейство плоских алгебраических кривых, задаваемое алгебраическим многообразием $\Gamma = \{(x_1, x_2, \lambda) \in \mathbb{C}^{n+3} \mid f(x_1, x_2; \lambda) = 0\}$, где $f(x_1, x_2; \lambda) = f_0(x_1, x_2) + \sum \lambda_i x_1^{s_i} x_2^{n_i}$ — неприводимый полином. Отображение $\mathbf{p}: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, $(x_1, x_2, \lambda) \mapsto \lambda$, задает алгебраическое расслоение. Предположим, что слой над общей точкой базы представляет собой невырожденную кривую рода g .

Дискриминантом Σ полинома $f(x_1, x_2; \lambda)$ называется многообразие

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \text{множество решений уравнения } (\partial_{x_1}, \partial_{x_2})f(x_1, x_2; \lambda) = 0 \text{ непусто}\},$$

т. е. над точками $\lambda \in \Sigma$ слои расслоения Γ становятся вырожденными. В качестве репера $\{L_i\}$ возьмем векторные поля, касающиеся гиперповерхности $\Sigma \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Такие векторные поля можно эффективно построить методами теории особенностей [10]. Структурные функции $v_{i,j}(\lambda)$ и $c_{i,j}^k(\lambda)$ этого репера — полиномы. Определитель матрицы $V = (v_{i,j}(\lambda))$ — полином $\Delta(\lambda)$ — задает дискриминант $\Sigma = \{\lambda \mid \Delta(\lambda) = 0\}$. Учитывая это, возьмем $\varphi(\lambda) = \varphi_0 \log \Delta(\lambda)$, где $\varphi_0 \in \mathbb{C}$; тогда функции $\chi_i(\lambda)$, задающие представление репера при $m = 0$, будут полиномами.

В качестве матрицы $\Omega(\lambda)$ возьмем матрицу периодов g голоморфных и g мероморфных базисных абелевых дифференциалов по симплектическому базису циклов в слое над точкой λ . Всегда существует такой базис дифференциалов, что $\Omega J \Omega^t = 2\pi i J$, например, базис нормированных дифференциалов. По существу матрица Ω нам не нужна. Для того чтобы вычислить, скажем, матрицу $A^{(i)}$, достаточно (1) составить из базисных дифференциалов вектор

$D(x) = (\mu_i(x_1, x_2; \lambda)) dx_1 / f_2(x_1, x_2; \lambda)$, (2) применить к $D(x)$ оператор L_i . Соотношение

$$L_i(D(x)) = A^{(i)} D(x) + \text{точный дифференциал}$$

однозначно определяет матрицу $A^{(i)}$. Для нашей конструкции существенно, что можно построить такой базис дифференциалов, что матричные элементы матриц $\{A^{(i)}\}$ будут полиномами. Классический метод построения нужного нам базиса можно извлечь из [2].

При подходящем выборе постоянной φ_0 мы получим, согласно теореме 1.13, набор линейных дифференциальных операторов $\{Q_i\}$ с полиномиальными коэффициентами, аннулирующих σ -функцию $\sigma(u, \lambda)$ семейства кривых Γ , которая по определению (см. [6]) представляет собой σ -функцию на ассоциированном с Γ расслоении $\text{Яс}(\Gamma)$. Слоем расслоения $\text{Яс}(\Gamma)$ над точкой λ является многообразие Якоби алгебраической кривой $\mathbf{p}^{-1}(\lambda)$.

Значение φ_0 фиксируется на основе следующих фактов. С помощью выбранного базиса голоморфных дифференциалов реализуем голоморфное послойное отображение $\mathcal{A}: \Gamma \rightarrow \text{Яс}(\Gamma)$, ограничение которого на слой совпадает с классическим отображением Абеля. Если кривая, заданная уравнением $f_0(x_1, x_2) = 0$, т. е. $\mathbf{p}^{-1}(0)$, рациональна, то ограничение отображения $\mathcal{A}$ на слой $\mathbf{p}^{-1}(0)$ является полиномиальным отображением. В работе [7] были построены полиномы $\sigma_0(u)$, удовлетворяющие аналогу теоремы Римана об обращении в нуль, и доказано, что этим свойством они полностью определяются. Из леммы 1.11 следует, что $\sigma(u, \lambda)$ удовлетворяет классической теореме Римана об обращении в нуль. Выбор $\sigma(u, 0) = \sigma_0(u)$ однозначно задает значение φ_0 .

2.1. Эллиптические функции. Рассмотрим семейство кривых рода $g = 1$

$$\Gamma = \{(x, y, g_2, g_3) \in \mathbb{C}^4 \mid 4x^3 - y^2 - g_2x - g_3 = 0\}.$$

2.1.1. *Репер и дискриминант.* Дискриминант этого семейства задается формулой $\Sigma = \{(g_2, g_3) \mid g_2^3 - 27g_3^2 = 0\}$. Векторные поля, касающиеся Σ , — это

$$L_0 = 4g_2\partial_{g_2} + 6g_3\partial_{g_3}, \quad L_2 = 6g_3\partial_{g_2} + \frac{1}{3}g_2^2\partial_{g_3}, \quad (L_0, L_2)\Delta = (12, 0)\Delta,$$

где $\Delta(g_2, g_3) = \frac{4}{3}(g_2^3 - 27g_3^2)$ — определитель коэффициентов репера $\{L_0, L_2\}$.

2.1.2. *Вектор канонических дифференциалов.* Возьмем дифференциал $D(x)^t = (-x, 1) \frac{dx}{y}$ с матрицей периодов

$$\Pi = \begin{pmatrix} 2\eta & 2\eta' \\ 2\omega & 2\omega' \end{pmatrix} = \left(\oint_a D(x), \oint_b D(x) \right), \quad (a, b) \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z}), \quad a \circ b = 1, \quad \Gamma \in \Gamma,$$

удовлетворяющей соотношению Лежандра $\Pi^t \Pi = 2\pi i J$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Шаги конструкции:

2.1.3. *Вычисление $A^{(i)} = L_i(\Pi)\Pi^{-1}$.* Применяя L_0 и L_2 к $D(x)$, находим

$$\begin{aligned} L_0(D(x)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} D(x) - \partial_x \left[\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} D(x) \right], \\ L_2(D(x)) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12}g_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} D(x) - \partial_x \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{6}g_2 & -\frac{1}{2}g_3 \\ -2x & -\frac{1}{3}g_2 \end{pmatrix} D(x) \right]. \end{aligned}$$

Отбрасывая точный дифференциал, получаем

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12}g_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$M^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12}g_2 \end{pmatrix}.$$

2.1.4. *Вычисление φ_0 .* Имеем $\chi_i = \varphi_0 L_i(\Delta)\Delta^{-1}$. Положим $\varphi_0 = (\mu + 1/2)/12$. Тогда

$$Q_0 = -u\partial_u + 4g_2\partial_{g_2} + 6g_3\partial_{g_3} + \mu, \quad Q_2 = -\frac{1}{2}\partial_u^2 - \frac{1}{24}g_2u^2 + 6g_3\partial_{g_2} + \frac{1}{3}g_2^2\partial_{g_3}.$$

Выполним замену $(g_2, g_3) \rightarrow (tg_2, tg_3)$ и перейдем к пределу при $t \rightarrow 0$. Получаем линеаризованные операторы

$$Q_0^{\text{lin}} = -u\partial_u + 4g_2\partial_{g_2} + 6g_3\partial_{g_3} + \mu, \quad Q_2^{\text{lin}} = -\frac{1}{2}\partial_u^2 + 6g_3\partial_{g_2}.$$

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений $Q_i(\psi) = 0$. Пусть $\psi = \phi(u, g_2, g_3)$ — ее решение в классе целых функций от (u, g_2, g_3) . Тогда $\psi = \phi(u, 0, 0)$ является решением системы $Q_i^{\text{lin}}(\psi) = 0$. Нетривиальными ее решениями являются $\psi = u$, и тогда $\mu = 1$, и $\psi = 1$, и тогда $\mu = 0$. Непостоянному полиному $\phi(u, 0, 0) = u$ соответствует значение $\varphi_0 = 1/8$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Помимо линеаризации полезно рассмотреть вырождение операторов Q_i при произвольном μ . Положим $(g_2, g_3) = (3t^4, t^6)$. Получаем

$$Q_0^{\text{sing}} = -u\partial_u + t\partial_t + \mu, \quad Q_2^{\text{sing}} = -\frac{1}{2}\partial_u^2 - \frac{1}{8}t^4u^2 + \frac{1}{2}t^3\partial_t.$$

Общее решение системы $Q_i^{\text{sing}}(\psi) = 0$ имеет вид

$$\psi(u, t) = t^{-\mu} \exp\{t^2u^2/4\} [C_0 \cos(tu\sqrt{\mu+1/2}) + C_1 \sin(tu\sqrt{\mu+1/2})].$$

При целых $\mu \leq 0$ функция $\psi(u, t)$ является целой функцией для произвольных значений постоянных C_0 и C_1 . При $\mu = 1$ целое решение получается, только если $C_0 = 0$. Кроме того, не всякая функция $\psi(u, t)$ может быть представлена в виде целой функции $\phi(u, 3t^4, t^6)$. Так, при $\mu = -1, -2$ такое представление невозможно; для четных значений μ необходимо, чтобы C_1 равнялась 0, а для нечетных μ — чтобы C_0 равнялась 0.

2.1.5. *Сигма-функция.* Целая функция, удовлетворяющая системе $Q_i(\psi) = 0$ и нормированная условием $\psi(u, 0, 0) = u$, представляет собой эллиптическую функцию Вейерштрасса $\sigma(u, g_2, g_3)$.

Соотношения (их оригинальное доказательство см. в [14])

$$Q_0(\sigma) = -u\sigma_u + 4g_2\sigma_{g_2} + 6g_3\sigma_{g_3} + \sigma = 0, \\ Q_2(\sigma) = -\frac{1}{2}\sigma_{u,u} - \frac{1}{24}g_2u^2\sigma + 6g_3\sigma_{g_2} + \frac{1}{3}g_2^2\sigma_{g_3} = 0$$

приводят, в частности, к следующим двум результатам.

Имеет место разложение в ряд [14]

$$\sigma(u, g_2, g_3) = u \sum_{i,j \geq 0} \frac{a_{i,j}}{(4i+6j+1)!} \left(\frac{g_2u^4}{2}\right)^i (2g_3u^6)^j$$

с целыми коэффициентами $a_{i,j}$, которые определяются из начальных условий $\{a_{0,0} = 1; a_{i,j} = 0, \min(i, j) < 0\}$ с помощью рекурсии

$$a_{i,j} = 3(i+1)a_{i+1,j-1} + \frac{16}{3}(j+1)a_{i-2,j+1} - \frac{1}{3}(2i+3j-1)(4i+6j-1)a_{i-1,j}.$$

Пусть $\mathcal{E}$ — поле эллиптических, т.е. двоякопериодических по u , функций с «инвариантами» (g_2, g_3) . Воспользуемся стандартными обозначениями $\zeta = \partial_u \log \sigma$, $\wp = -\partial_u \zeta$ и $\wp' = \partial_u \wp$. Операторы [11]

$$\xi_0 = -u\partial_u + L_0, \quad \xi_1 = \partial_u, \quad \xi_2 = -\zeta\partial_u + L_2,$$

являются образующими алгебры Ли $\text{Der } \mathcal{E}$ дифференцирований поля $\mathcal{E}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Имеем

$$[\xi_0, \xi_k] = k\xi_k, \quad [\xi_1, \xi_2] = \wp\xi_1. \quad (2.1)$$

С другой стороны, согласно формулам

$$[(\xi_0, \xi_1, \xi_2), g_2] = (4g_2, 0, 6g_3), \quad [(\xi_0, \xi_1, \xi_2), g_3] = (6g_3, 0, g_2^2/3),$$

$$[(\xi_0, \xi_1, \xi_2), \wp] = (2\wp, \wp', 2\wp^2 - g_2/3), \quad [(\xi_0, \xi_1, \xi_2), \wp'] = (3\wp', 6\wp^2 - g_2/2, 3\wp\wp'),$$

эти операторы действуют на кольце полиномов $\mathbb{C}[\wp, \wp', g_2, g_3]$ как векторные поля. Непосредственная проверка показывает, что полученные векторные поля удовлетворяют соотношениям (2.1), только если $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$. Для любой эллиптической функции $f \in \mathcal{E}$ имеется единственное представление вида $f = f_1(\wp, g_2, g_3) + f_2(\wp, g_2, g_3)\wp'$, где f_1 и f_2 — рациональные функции. Отображение $\rho: f \mapsto (f_1, f_2)$ устанавливает изоморфизм между $\mathcal{E}$ и двумерным модулем E над полем $\mathbb{C}(\wp, g_2, g_3)$. Умножение эллиптических функций задает на E ассоциативное коммутативное билинейное отображение $*$: $E \times E \rightarrow E$. Пусть $f, h \in \mathcal{E}$. Тогда $\rho(fh) = \rho(f) * \rho(h) = (f_1h_1 + pf_2h_2, f_1h_2 + h_1f_2)$, где $p = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$. Получаем

$$\xi_0(f_1, f_2) = X_0(f_1, f_2) + (0, 3f_2),$$

$$\xi_1(f_1, f_2) = (0, 1) * X_{-2}(f_1, f_2) + X_{-2}((0, 1) * (f_1, f_2)),$$

$$\xi_2(f_1, f_2) = X_2(f_1, f_2) + (0, 3\wp f_2),$$

где $X_{-2} = \frac{1}{2}\partial_\wp$, $X_0 = L_0 + 2\wp\partial_\wp$, $X_2 = L_2 + \frac{1}{3}(6\wp^2 - g_2)\partial_\wp$ — операторы, порождающие полиномиальную алгебру Ли

$$[X_0, X_{-2}] = -2X_{-2}, \quad [X_0, X_2] = 2X_2, \quad [X_{-2}, X_2] = 4\wp X_{-2}.$$

2.2. Основные элементы конструкции для (n, s) -кривых. В этом разделе удобно ввести градуировку. Положим $\deg \lambda_i = i$, $\deg u_i = -i$, $\deg L_i = i$. Здесь, в отличие от предыдущих разделов, число параметров λ будет обозначаться буквой d .

Пусть n и s — пара взаимно простых целых чисел, таких, что $s > n \geq 2$. Зададим семейство кривых $\Gamma = \{(x_1, x_2, \lambda) \in \mathbb{C}^{d+2} \mid f(x_1, x_2; \lambda) = 0\}$ с помощью полинома

$$f(x_1, x_2; \lambda) = x_1^s + x_2^n + \sum_{a,b} \lambda_{ns-an-bs} x_1^a x_2^b, \quad (2.2)$$

где $0 \leq a \leq s-2$, $0 \leq b \leq n-2$ и $an+bs < ns$. Имеем $d = (n+1)(s+1)/2 - [s/n] - 3$. Положим $\deg x_1 = n$ и $\deg x_2 = s$. Тогда $f(x, \lambda)$ — однородный полином веса ns .

2.2.1. *Полином* $\sigma_0(u)$ (см. [7]). Последовательность Вейерштрасса $(w_1, w_2, \dots)$ — это упорядоченное по возрастанию множество натуральных чисел, не представимых в виде $an + bs$ с неотрицательными целыми a и b . Положим $w(\xi) = \sum_i \xi^{w_i}$. Имеем

$$w(\xi) = \frac{1}{1-\xi} - \frac{1-\xi^{ns}}{(1-\xi^n)(1-\xi^s)}.$$

Отсюда получаем, что длина $g = w(1)$ последовательности Вейерштрасса и сумма ее элементов $G = w'(1)$ вычисляются по формулам

$$g = \frac{(n-1)(s-1)}{2}, \quad G = \frac{ns(n-1)(s-1)}{4} - \frac{(n^2-1)(s^2-1)}{12}.$$

Зададим полином Шура–Вейерштрасса $\sigma_0(u_{w_1}, \dots, u_{w_g})$ формулой

$$\sigma_0\left(\frac{p_{w_1}}{w_1}, \dots, \frac{p_{w_g}}{w_g}\right) = c \frac{\det(\xi_i^{w_j})}{\det(\xi_i^{j-1})}, \quad i, j = 1, \dots, g, \quad (2.3)$$

где $p_j = \sum_{i=1}^g \xi_i^j$ — симметрический полином Ньютона и $c \in \mathbb{C}$. Имеем

$$\deg \sigma_0(u_{w_1}, \dots, u_{w_g}) = -\sum_{k=1}^g w_k - k + 1 = -G + \frac{(g-1)g}{2} = -\frac{(n^2-1)(s^2-1)}{24}.$$

Зафиксируем нормировку полинома $\sigma_0(u)$ условием

$$\sigma_0(u_1, 0, \dots, 0) = u_1^{(n^2-1)(s^2-1)/24}.$$

2.2.2. *Репер и дискриминант* (см. [8, 10]). Ниже для краткости мы будем обозначать полином (2.2) просто через $f(x)$, его производные по x_1 и x_2 через $f_1(x)$ и $f_2(x)$, а $(f_1(x), f_2(x))$ через $\partial_x f(x)$.

Пусть $P = \mathbb{C}[\lambda]$. Введем локальное кольцо $\mathcal{R} = P[x]/\partial_x f(x)$. Набор мономов $\mathcal{M} = \{x_1^i x_2^j\}$, $0 \leq i \leq s-2$, $0 \leq j \leq n-2$, образует базис кольца $\mathcal{R}$. Обозначим через $I = \{i_1 = 4g-2, i_2, \dots, i_{2g} = 0\}$ упорядоченное по убыванию множество весов $\{in + js\}$ элементов базиса $\mathcal{M}$. Это упорядочение строгое; поэтому можно ввести вектор $e(x) = (e_{i_1}(x), \dots, e_{i_{2g}}(x))^t$, где $e_{in+js}(x)$ обозначает моном $x_1^i x_2^j$.

Пусть $\mathcal{J}$ — идеал в кольце $P[x, z]$, порожденный полиномами $f_1(x)$, $f_1(z)$, $f_2(x)$, $f_2(z)$. Положим

$$H(x, z) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{f_1(x_1, x_2) - f_1(z_1, z_2)}{x_1 - z_1} & \frac{f_2(x_1, x_2) - f_2(z_1, z_2)}{x_1 - z_1} \\ \frac{f_1(z_1, x_2) - f_1(x_1, z_2)}{x_2 - z_2} & \frac{f_2(z_1, x_2) - f_2(x_1, z_2)}{x_2 - z_2} \end{vmatrix}.$$

Полином $H(x, z)$ обладает следующими свойствами: (a) $H(x, x) = \text{hess}_x f(x)$; (b) $H(x, z) = H(z, x)$; (c) $H(x, z)F(x, z) \equiv H(z, x)F(z, x) \pmod{\mathcal{J}}$ для произвольного $F(x, z) \in P[x, z]$.

Формула

$$\sum_{i,j \in I} v_{i,j}(\lambda) e_i(x) e_j(z) = f(x) H(x, z) \pmod{\mathcal{J}}$$

задает симметрическую полиномиальную матрицу $V(\lambda) = (v_{i,j})$. Эта матрица задает $2g$ векторных полей, производящая функция которых имеет вид

$$L(x) = \sum_{i \in I} e_i(x) L_{2(ns-n-s)-i} = \sum_{i,j \in I} e_i(x) v_{i,j}(\lambda) \partial_{\lambda_{ns-j}}. \quad (2.4)$$

Отметим следующий важный факт: $L(x)\Delta(\lambda) = H(x, x)\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda) \text{hess}_x f(x)$.

2.2.3. *Вектор канонических дифференциалов* [2]. Введем оператор

$$\mathcal{D}_x = f_2(x)\partial_{x_1} - f_1(x)\partial_{x_2}.$$

Положим

$$D(x, z) = \mathcal{D}_z \left[\frac{f(z_1, x_2) - f(z_1, z_2)}{(x_1 - z_1)(x_2 - z_2)} \right] - \mathcal{D}_x \left[\frac{f(x_1, z_2) - f(x_1, x_2)}{(z_1 - x_1)(z_2 - x_2)} \right].$$

Пусть Ψ — полиномиальная по λ $(2g \times 2g)$ -матрица, $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{1,1} & \Psi_{1,2} \\ \Psi_{2,1} & \Psi_{2,2} \end{pmatrix}$, где $\Psi_{2,1} = 0$, $\Psi_{2,2} = 1_g$ и $\Psi_{1,2}$ — нижняя треугольная матрица с нулевой главной диагональю.

ЛЕММА 2.1. *Существует единственная матрица Ψ указанного вида, удовлетворяющая уравнению $e(z)^t \Psi^t J \Psi e(x) = D(x, z)$. При помощи этой матрицы канонический вектор базисных дифференциалов $D(x)$ задается формулой*

$$D(x) = \Psi e(x) \frac{dx_1}{f_2(x)},$$

причем $\deg D(x) = (-w_1, \dots, -w_g, w_1, \dots, w_g)^t$.

2.2.4. *Вычисление $A^{(i)}$* . Положим $R(x) = \Psi e(x)$.

ЛЕММА 2.2. *Обозначим через $\mathfrak{D}$ линейное пространство, порожденное функциями вида $\mathcal{D}_x[h(x)/f_2(x)]$, где $h(x)$ пробегает кольцо $P[x]$. Тогда*

$$A^{(i)}R(x) \equiv L_i(R(x)) - R(x) \cdot \frac{L_i(f_2(x))}{f_2(x)} \pmod{\mathfrak{D}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $L_i(D(x)) = A^{(i)}D(x) + dr(x)$, где $r(x)$ есть $2g$ -вектор функций из поля $P(x)$. С одной стороны,

$$L_i(D(x)) = \left\{ \frac{L_i(R(x))}{f_2(x)} + L_i\left(\frac{1}{f_2(x)}\right)R(x) \right\} dx_1.$$

С другой стороны, дифференциал вдоль слоя $\mathbf{p}^{-1}(\lambda)$ от функции $r(x)$ из поля $P(x)$ записывается как $dr(x) = \mathcal{D}_x[r(x)] \frac{dx_1}{f_2(x)}$. Полагая $r(x) = h(x)/f_2(x)$, где $h(x)$ — полиномиальный по x вектор, получаем утверждение леммы. $\square$

2.2.5. *Вычисление φ_0* . Введенная градуировка позволяет нам вычислить φ_0 .

ЛЕММА 2.3. $\varphi_0 = 1/8$ для любой пары (n, s) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Векторное поле $L_0 = \sum_{i \in I} (ns - i) \lambda_{ns-i} \partial_{\lambda_{ns-i}}$ — оператор Эйлера. Его представитель (см. лемму 2.1) — оператор $Q_0 = L_0 - \sum_{j=1}^g w_j u_{w_j} \partial_{u_{w_j}} + \delta^{(0)}$. Рассмотрим уравнение

$$\chi_0 + \frac{1}{2} \text{tr } \beta^{(0)} + \deg \sigma_0 = 0.$$

Учтем, что $\beta^{(0)} = -\text{diag}(w_1, \dots, w_g)$ и по построению $\chi_0 = \varphi_0 \deg \Delta$, $\deg \Delta(\lambda) = ns(n-1)(s-1)$. Имеем

$$\varphi_0 ns(n-1)(s-1) - \frac{1}{2}G - \frac{1}{24}(n^2-1)(s^2-1) = 0. \quad \square$$

2.2.6. Сигма-функция. Суммируя предыдущие результаты, мы приходим к следующему конструктивному описанию:

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть дано семейство (n, s) -кривых с определяющим полиномом (2.2). Возьмем операторы Q_i , $i \in I$, вида (1.2), в которых (а) полиномиальные векторные поля L_i заданы производящей функцией (2.4); (б) полиномиальные матрицы $M^{(i)} = JA^{(i)}$ заданы леммой 2.2; (с) функции $\delta^{(i)}$ имеют вид $\chi^{(i)} + \frac{1}{2} \text{tr} \beta^{(i)}$, где $\chi^{(i)}$ — полиномы, производящей функцией которых является гессиан определяющего полинома, умноженный на $1/8$.

Тогда целая функция, удовлетворяющая системе уравнений $\{Q_i(\psi) = 0\}$, нормированная условием $\psi(u_1, 0, \dots, 0) = u_1^\ell$, где $\ell = \frac{1}{24}(n^2-1)(s^2-1)$, является сигма-функцией семейства (n, s) -кривых.

2.3. Линейные дифференциальные операторы, аннулирующие гиперэллиптические σ -функции. Гиперэллиптические кривые — это случай $(n, s) = (2, 2g+1)$; ему соответствует последовательность Вейерштрасса $(1, 3, \dots, 2g-1)$, и, следовательно, $G = g^2$ и $\deg \sigma_0(u) = -(g-1)g/2$.

Мы будем придерживаться обозначений и соглашений, сложившихся в этой области исследований [3, 4, 12, 6].

Пусть Γ — семейство плоских гиперэллиптических кривых,

$$\Gamma = \{(x, y, \lambda) \in \mathbb{C}^{2g+1} \mid y^2 - f(x) = 0\}, \quad f(x) = 4x^{2g+1} + \sum_{k=0}^{2g-1} \lambda_k x^k.$$

Имеем $\deg x = 2$, $\deg y = 2g+1$, $\deg \lambda_k = 2(2g+1-k)$ и $\deg u_i = -2(g-i)-1$.

Будем использовать аппарат производящих функций. В частности, будем рассматривать $f(x)$ как производящую функцию для $\lambda_0, \dots, \lambda_{2g-1}$. Положим

$$L(x) = x^{2g-1} \sum_{k=0}^{2g-1} x^{-k} L_k$$

для образующих репера $L_0, \dots, L_{2g-1}$, $\deg L_j = 2j$.

ТЕОРЕМА 2.5 [10]. Структурные функции полиномиальной алгебры $\mathcal{L}_\Gamma$, порожденной репером, связанным с семейством Γ гиперэллиптических кривых, задаются формулами

$$\begin{aligned} [L(x), L(z)] &= \sum_{i,j,k=0}^{2g-1} x^i z^j c_{i,j}^k(\lambda) L_k \\ &= (\partial_x - \partial_z) \left[\frac{f(z)L(x) - f(x)L(z)}{x-z} \right] \mod (f'(x), f'(z)), \\ [L(x), f(z)] &= \sum_{i,j=0}^{2g-1} x^i z^j v_{i,j}(\lambda) = \frac{f'(x)f(z) - f'(z)f(x)}{x-z} \mod (f'(x), f'(z)). \end{aligned}$$

Для произвольного полинома $F(x)$ положим $\mathbf{d}_x^k F(x) = (F(x)/x^k)_+$, где $(\cdot)_+$ обозначает отбрасывание отрицательных степеней x . Тогда из теоремы 2.5 вытекает, что

$$L(x) = f(x) \sum_{k=0}^{2g-1} \mathbf{d}_x^{k+1}(f'(x)) \partial_{\lambda_k} \mod f'(x).$$

Для канонического базисного дифференциала имеем формулу

$$D(x) = (R_1(x), \dots, R_{2g}(x))^t \frac{dx}{y},$$

где $R_i(x) = \frac{1}{4} x^i \partial_x \mathbf{d}_x^{2i} f(x)$, $R_{g+i}(x) = x^{i-1}$, $i = 1, \dots, g$.

Наша конструкция приводит к следующему результату:

ТЕОРЕМА 2.6. *Положим*

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{i=1}^g x^{i-1} \partial_{u_i} + R_i(x) u_i, \\ t(x) &= \sum_{i,j=1}^g \frac{1 + \text{sign}(i-j)}{2} j u_j \mathbf{d}_x^{j+1}(x^{i-1} \partial_{u_i} + R_i(x) u_i) \end{aligned}$$

и зададим производящую функцию линейных дифференциальных операторов второго порядка $\{Q_k\}$, $k = 0, \dots, 2g-1$, по формуле

$$Q(x) = x^{2g-1} \sum_{k=0}^{2g-1} x^{-k} Q_k = L(x) + \frac{1}{8} f''(x) - f(x)t(x) - h(x) \circ h(x) \mod f'(x).$$

Тогда целая функция $\psi(u, \lambda)$, нормированная условием $\psi(0, \dots, u_g, 0, \dots, 0) = u_g^\ell$, где $\ell = (g-1)g/2$, и удовлетворяющая тождественно по x уравнению $Q(x)\psi = 0$, является гиперэллиптической сигма-функцией $\sigma(u, \lambda)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Наряду с идеей «общей» σ -функции (см., например [13]), в классический период интенсивно изучались гиперэллиптические σ -функции. Задаче о разложении гиперэллиптической σ -функции в степенной ряд посвящен, начиная с основополагающих работ Клейна [12], применявшего методы теории инвариантов, целый ряд работ, которые основывались на использовании явного выражения для σ -функции через θ -функцию. Первым решение этой задачи получил Вильтейс в двух весьма запутанных статьях [15, 16]; наиболее ясное изложение этих результатов, насколько известно авторам, принадлежит Больца [4, 5]. Бейкер [3] продемонстрировал самодостаточность теории σ -функции, получив разложение σ -функции рода $g = 2$ без использования θ -рядов. Он применил билинейные операторы «типа Хироты», чтобы получить ряд, начиная с первого члена, заимствованного из работ Клейна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. ФАЗИС, М., 1996.
2. Baker H. F. Abelian Functions, Cambridge University Press, 1995.
3. Baker H. F. Multiply Periodic Functions, Cambridge, Cambridge University Press, 1907.

4. *Bolza O.* The partial differential equations for the hyperelliptic θ and σ -functions. Amer. J. Math., **21**, 107–125 (1899).
5. *Bolza O.* Remark concerning expansions of the hyperelliptic σ -functions. Amer. J. Math., **22**, 101–112 (1900).
6. *Buchstaber V. M., Enolskii V. Z., Leykin D. V.* Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications, Rev. Math. Math. Phys., Vol. 10, No. 2, London, Gordon and Breach, 1997, pp. 1–125.
7. *Бухштабер В. М., Лейкин Д. В., Энольский В. З.* Рациональные аналоги абелевых функций. Функц. анализ и его прил., **33**, вып. 2, 1–15 (1999).
8. *Бухштабер В. М., Лейкин Д. В.* Алгебры Ли, ассоциированные с σ -функциями, и версальные деформации. УМН, **57**, вып. 3, 145–146 (2002).
9. *Бухштабер В. М., Лейкин Д. В.* Градуированные алгебры Ли, задающие гиперэллиптические σ -функции. ДАН, **385**, №5, 583–586 (2002).
10. *Бухштабер В. М., Лейкин Д. В.* Полиномиальные алгебры Ли. Функц. анализ и его прил., **36**, вып. 4, 18–34 (2002).
11. *Frobenius F., Stickelberger L.* Ueber die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten. Crelle's Journal, **XCII**, 311–337 (1882).
12. *Klein F.* Über hyperelliptische Sigmafunctionen, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Bd. 3, Teubner, Berlin, 1923, pp. 323–387.
13. *Krazer A.* Zur Bildung allgemeiner σ -Functionen, Math. Ann., **33**, 591–599 (1890).
14. *Weierstrass K.* Zur Theorie der elliptischen Funktionen, Mathematische Werke, Bd. 2, Berlin, Teubner, 1894, pp. 245–255.
15. *Wiltheiss E.* Partielle Differentialgleichungen der hyperelliptische Thetafunctionen, Math. Ann., 1888, 31, pp. 134–155.
16. *Wiltheiss E.* Ueber die Potenzreihen der hyperelliptischen Thetafunctionen, Math. Ann., **31**, 410–423 (1888).
17. *Закалюкин В. М.* Перестройки волновых фронтов, зависящих от одного параметра. Функц. анализ и его прил., **10**, вып. 2, 69–70 (1976).

Математический институт им. В. А. Стеклова
email: buchstab@mendeleevo.ru

Поступило в редакцию
9 февраля 2004 г.

Институт магнетизма НАН Украины
email: dile@imag.kiev.ua