Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Б. Орочко, Индексы дефекта симметрического обыкновенного дифференциального оператора с бесконечным числом точек вырождения, *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 2, 55–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa107>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 09:39:22

УДК 517.98

Индексы дефекта симметрического обыкновенного дифференциального оператора с бесконечным числом точек вырождения*

© 2004. Ю. Б. Орочко

§ 1. Введение

Рассмотрим дифференциальное выражение $s[f] = (-1)^n(c(x)f^{(n)})^{(n)}$, $x \in \mathbb{R}$, порядка $2n \geq 2$, коэффициент $c(x)$ которого является действительной функцией, обладающей следующими тремя свойствами: 1) ее множество нулей счетно и не имеет конечных точек накопления; 2) эта функция бесконечно дифференцируема в любой точке x , в которой $c(x) \neq 0$; 3) $c^{(n)}(x) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Обозначим через H симметрический минимальный оператор в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$, порожденный дифференциальным выражением $s[f]$, вырождающимся в нулях функции $c(x)$; мы понимаем его как замыкание оператора $f \rightarrow s[f]$ с областью определения $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Будем обозначать через $\text{Def } A$ значение индекса дефекта действительного симметрического оператора A , действующего в гильбертовом пространстве $L^2(J)$, $J \subseteq \mathbb{R}$, в верхней (или, что то же самое, нижней) открытой комплексной полуплоскости. Нас будет интересовать значение дефектного числа $\text{Def } H$.

В работе [1] показано, что если $c(x)$ — тригонометрический многочлен, удовлетворяющий определенным условиям, то для соответствующего оператора H справедливо равенство $\text{Def } H = +\infty$. В настоящей статье получены общие условия на коэффициент $c(x)$ произвольного вида, достаточные для справедливости одной из формул $\text{Def } H = +\infty$ и $\text{Def } H = 0$. Особенностью этих условий является то, что в них главную роль играет нетрадиционное понятие двустороннего порядка нуля коэффициента.

Наиболее просто это понятие вводится в случае, когда $c(0) = 0$. Будем говорить, что пара чисел $p_- > 0$, $p_+ > 0$ задает двусторонний порядок нуля $x = 0$ функции $c(x)$, если на некоторых отрезках $[-h_-, 0]$, $[0, h_+]$ справедливы представления

$$c(x) = (-x)^{p_-} a_-(x), \quad x \in [-h_-, 0], \quad c(x) = x^{p_+} a_+(x), \quad x \in [0, h_+], \quad (1)$$

с функциями $a_-(x) \in C^\infty[-h_-, 0]$, $a_+(x) \in C^\infty[0, h_+]$, строго положительными или строго отрицательными на соответствующих отрезках. Двусторонний порядок произвольного нуля x_0 коэффициента $c(x)$ равен (p_-, p_+) , если функция $c(x_0 + x)$ имеет в точке $x = 0$ нуль указанного двустороннего порядка. Значения параметров p_- , p_+ , задающих соответственно левосторонний и правосторонний порядки нуля x_0 функции $c(x)$, могут быть любыми положительными числами.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант №02-01-00997).

В то же время если $c(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, то любой нуль x_0 этой функции двусторонне-го порядка (p_-, p_+) является ее нулем в классическом смысле некоторой целой кратности $p \geq 1$; при этом справедливо равенство $p_- = p_+ = p$.

Свойство $c^{(n)}(x) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ коэффициента $c(x)$ дифференциального выражения $s[f]$, порождающего симметрический минимальный оператор H , необходимо для корректности используемого нами определения этого оператора. Если любой нуль этого коэффициента имеет некоторый двусторонний порядок, то это свойство имеет место тогда и только тогда, когда значения параметров p_- , p_+ , задающие этот порядок, либо больше $n - 1/2$, либо принимают только целые значения $1, 2, \dots, n - 1$ из промежутка $(0, n - 1/2]$. В данной работе рассматриваются коэффициенты $c(x)$, порядки нулей которых больше $n - 1/2$. Основным результатом данной статьи является

ТЕОРЕМА 1. *Если коэффициент $c(x)$ дифференциального выражения $s[f]$ порядка $2n \geq 2$, порождающего оператор H , имеет бесконечную последовательность нулей, двусторонний порядок (p_-, p_+) каждого из которых удовлетворяет условию $n - 1/2 < p_-, p_+ < 2n - 1/2$, то $\text{Def } H = +\infty$.*

Точность присутствующей в условии теоремы 1 оценки сверху на p_- , p_+ установлена в нашем втором результате, в котором через $H(J)$, $J \subset \mathbb{R}$ — ограниченный или неограниченный интервал, обозначается симметрический минимальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $s[f]$ в $L^2(J)$. При этом $L^2(J)$ рассматривается как подпространство гильбертова пространства $L^2(\mathbb{R})$, состоящее из функций $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, равных нулю на множестве $\mathbb{R} \setminus J$, а $H(J)$ — как оператор, действующий в этом подпространстве.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть нули коэффициента $c(x)$ дифференциального выражения $s[f]$ порядка $2n \geq 2$ образуют возрастающую последовательность x_r , $-\infty < r < +\infty$, $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} x_r = \pm\infty$, которая расщепляет числовую ось на счетное множество интервалов вида $J_r = (x_{r-1}, x_r)$. Рассмотрим наряду с оператором H , порожденным дифференциальным выражением $s[f]$ в $L^2(\mathbb{R})$, бесконечную последовательность операторов $H(J_r)$, $-\infty < r < +\infty$. Если двусторонний порядок (p_-, p_+) любого нуля коэффициента $c(x)$ удовлетворяет условию $p_-, p_+ \geq 2n - 1/2$, то оператор H самосопряжен. Более того, при указанных условиях самосопряжен каждый из операторов $H(J_r)$, $-\infty < r < +\infty$, и справедливо ортогональное разложение $H = \bigoplus_{r=-\infty}^{+\infty} H(J_r)$.*

В доказательствах сформулированных теорем используются простые факты теории расширений симметрических дифференциальных операторов и применяются классические асимптотические методы теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Трудности, возникающие в этих доказательствах, связаны, главным образом, с большим объемом и громоздкостью присутствующих в них вычислений.

Очевидным следствием теорем 1 и 2 является

ТЕОРЕМА 3. *Рассмотрим дифференциальное выражение $s[f]$ порядка $2n \geq 2$ с коэффициентом $c(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, нули которого образуют возрастающую последовательность x_r , $-\infty < r < +\infty$, $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} x_r = \pm\infty$. Индексы дефекта соответствующего оператора H равны нулю, если кратность каждого нуля функции $c(x)$ (понимаемая в классическом смысле) больше или равна $2n$. Вместе с тем они равны $+\infty$, если бесконечно много нулей этой функции имеют кратности p , удовлетворяющие неравенству $n \leq p \leq 2n - 1$.*

§2. Доказательство теоремы 2

Обозначим через x^* один из нулей коэффициента $c(x)$ дифференциального выражения $s[f]$. Доказательства теорем 1, 2 получены с помощью своеобразного метода локализации, сводящего изучение индексов дефекта оператора H к такой же задаче для оператора $H(J)$, отвечающего интервалу J одного из следующих трех типов: 1) $J = (x^*, b)$, $c(x) \neq 0$ при $x \in (x^*, b]$; 2) $J = (a, x^*)$, $c(x) \neq 0$ при $x \in [a, x^*)$; 3) $J = (a, b)$, $x^* \in (a, b)$, $c(x) \neq 0$ при $x^* \neq x \in [a, b]$. Так как точку $x = 0$ можно сдвинуть в любой нуль x^* коэффициента $c(x)$ двустороннего порядка (p_-, p_+) , то можно считать, что $x^* = 0$, $a = -h_- < 0$, $b = h_+ > 0$ и использовать представление (1) коэффициента $c(x)$ на отрезке $[-h_-, h_+]$.

Рассмотрим дифференциальное выражение $s[f]$, коэффициент $c(x)$ которого имеет нуль двустороннего порядка (p_-, p_+) в точке $x = 0$. Тогда можно найти интервал $I_0 = (-h_-, h_+)$, на замыкании которого — отрезке $[-h_-, h_+]$ — имеет место представление (1) этого коэффициента. Если расщепить интервал I_0 точкой $x = 0$ на подынтервалы $I_- = (-h_-, 0)$ и $I_+ = (0, h_+)$, то действие дифференциального выражения $s[f]$ на функции $f(x)$, принадлежащие классам $C_0^\infty(I_-)$ и $C_0^\infty(I_+)$, можно записать соответственно в форме $s[f] = s_-[f]$ и $s[f] = s_+[f]$, причем вспомогательные дифференциальные выражения, присутствующие в правых частях этих формул, имеют вид

$$\begin{aligned} s_-[f] &= (-1)^n((-x)^{p_-}a_-(x)f^{(n)})^{(n)}, & x \in I_-, \\ s_+[f] &= (-1)^n(x^{p_+}a_+(x)f^{(n)})^{(n)}, & x \in I_+; \end{aligned} \quad (2)$$

первое из них вырождается в правом конце $x = 0$ интервала I_- , а второе — в левом конце $x = 0$ интервала I_+ . Наряду с оператором $H(I_0)$, порожденным рассматриваемым дифференциальным выражением $s[f]$ в $L^2(I_0)$, введем минимальный оператор $H(I_-)$ в $L^2(I_-)$, порожденный дифференциальным выражением $s_-[f]$, а также минимальный оператор $H(I_+)$ в $L^2(I_+)$, порожденный дифференциальным выражением $s_+[f]$. Для получения свойств оператора $H(I_0)$, используемых в доказательствах теорем 1, 2, сначала исследуются индексы дефекта указанных вспомогательных операторов. Такое исследование достаточно проводить только для оператора $H(I_+)$ в силу следующего замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При замене аргумента $x \rightarrow -x$ оператор $H(I_-)$ переходит в оператор $H(I_+)$, порожденный дифференциальным выражением $s_+[f]$ с параметром $p_+ = p_-$ и функцией $a_+(x) = a_-(-x)$. Поэтому свойства операторов $H(I_+)$, $H(I_-)$, используемые в доказательствах теорем 1, 2, аналогичны. Это обстоятельство позволяет ограничиться доказательством их только для первого оператора.

При каждом значении параметра $p_+ > 0$ дефектное подпространство $\mathfrak{N}_+ \subset L^2(I_+)$ симметрического оператора $H(I_+)$, отвечающее фиксированному числу $\bar{z}$, $\text{Im } z \neq 0$, есть линейал, состоящий из решений дифференциального уравнения

$$s_+[y](x) = (-1)^n(x^{p_+}a_+(x)y^{(n)})^{(n)}(x) = zy(x), \quad x \in I_+, \quad (3)$$

принадлежащих $L^2(I_+)$. Так как $a_+(x) \in C^\infty[0, h_+]$, то эти решения бесконечно дифференцируемы на промежутке $(0, h_+]$. Из-за вырождения дифференциального уравнения (3) в точке $x = 0$ среди функций $y_k(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, составля-

ющих его фундаментальное семейство решений, могут быть как функции, входящие в пространство $L^2(I_+)$, так и функции, не входящие в него, причем эти свойства зависят от поведения функции $y_k(x)$ при $x \rightarrow +0$. Совокупность функций $y_k(x)$, принадлежащих $L^2(I_+)$, образует базис дефектного подпространства $\mathfrak{N}_+$ оператора $H(I_+)$, а дефектное число $\text{Def } H(I_+)$ равно числу элементов этого базиса. Таким образом, нахождение значения последнего числа сводится к исследованию поведения решений дифференциального уравнения (3) при $x \rightarrow +0$. Такое исследование приводит к результатам, сформулированным ниже в леммах 1 и 2.

В лемме 1 используются две серии действительных чисел

$$\begin{aligned} \lambda_k &= -(k-1), & 1 \leq k \leq n, \\ \lambda_k(p_+) &= p_+ - (k-1), & n+1 \leq k \leq 2n; \end{aligned} \quad (4)$$

они возникают как собственные значения некоторой числовой матрицы порядка $2n$, зависящей от параметра p_+ и связанной с дифференциальным уравнением (3). Существенным свойством этих серий является то, что их пересечение непусто при $p_+ = 1, \dots, 2n-1$ и является пустым множеством для всех остальных значений $p_+ > 0$. Будем считать, что кратность каждого из чисел (4) равна 1, если это число не принадлежит пересечению указанных серий, и равна 2, если оно принадлежит их пересечению.

ЛЕММА 1. 1) При нецелых значениях параметра $p_+ \in (0, 2n)$ (в этом случае каждое из чисел (4) однократно) дифференциальное уравнение (3) имеет фундаментальное семейство решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, с асимптотикой при $x \rightarrow +0$ вида

$$y_k(x) = \begin{cases} x^{-\lambda_k}(1+o(1)) = x^{k-1}(1+o(1)), & 1 \leq k \leq n, \\ x^{-\lambda_k(p_+)}(1+o(1)) = x^{k-1-p_+}(1+o(1)), & n+1 \leq k \leq 2n. \end{cases} \quad (5)$$

2) В случае значений параметра $p_+ = 1, \dots, 2n-1$ у дифференциального уравнения (3) есть фундаментальное семейство решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, обладающее следующими свойствами. Во-первых, для каждой из функций $y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, и тех функций из набора $y_k(x)$, $n+1 \leq k \leq 2n$, которые отвечают числам $\lambda_k(p_+)$ кратности 1, сохраняется асимптотика при $x \rightarrow +0$, приведенная в формуле (5). Во-вторых, асимптотики при $x \rightarrow +0$ решений $y_k(x)$, отвечающих двукратным числам $\lambda_k(p_+)$ второй из серий (4), получаются путем замены в соответствующих асимптотиках (5) множителей $x^{-\lambda_k(p_+)}$ выражениями $x^{-\lambda_k(p_+)} \ln x$.

3) Все перечисленные асимптотики можно дифференцировать $2n-1$ раз.

При изучении асимптотики в нуле решений дифференциального уравнения (3) случаи, когда $p_+ = 2n$ или $p_+ > 2n$, качественно отличны от случаев, рассмотренных в лемме 1, а также друг от друга.

ЛЕММА 2. Если $p_+ > 2n$, дифференциальное уравнение (3) имеет фундаментальное семейство решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, такое, что при $1 \leq k \leq n$ для функций $y_k(x)$ и их производных до порядка $2n-1$ включительно справедлива оценка $O(x^l)$, $x \rightarrow +0$, а для $n+1 \leq k \leq 2n$ функции $|y_k(x)|$ возрастают при $x \rightarrow +0$ быстрее, чем x^{-l} , со сколь угодно большим показателем степени l в обоих случаях. При $p_+ = 2n$ и достаточно малых значениях числа z ,

$\operatorname{Im} z \neq 0$, у дифференциального уравнения (3) есть фундаментальное семейство решений с $2n - 1$ раз дифференцируемой асимптотикой при $x \rightarrow +0$ вида $y_k(x) = x^{n-k+\delta_k(z)}(1 + o(1))$, $1 \leq k \leq 2n$, в которой $\delta_k(z)$ — числа, обладающие свойствами $|\delta_k(z)| < 1/4$, $\operatorname{Im} \delta_k(z) \neq 0$.

Для доказательства утверждений, приведенных в леммах 1, 2, мы преобразуем (с помощью специального приема, изложенного в [2, гл. 4, §12]) дифференциальное уравнение (3) в эквивалентную систему дифференциальных уравнений, зависящую от параметра p_+ , в которой затем делаем замену аргумента $x = e^{-t}$. В результате этих преобразований вычисление асимптотики при $x \rightarrow +0$ решений $y(x)$ дифференциального уравнения (3) и их производных до порядка $2n - 1$ включительно сводится к нахождению асимптотики при $t \rightarrow +\infty$ решений $\mathbf{v}(t) = \{v_j(t)\}_{j=1}^{2n}$ некоторой системы дифференциальных уравнений одного из трех хорошо изученных (в асимптотической теории линейных дифференциальных систем) типов, зависящих от значений параметра p_+ . После этого для получения результатов, изложенных в леммах 1, 2, остается применить к указанной системе дифференциальных уравнений классические теоремы 1, 2 из [3, гл. 7, §1] в случае нецелых p_+ из $(0, 2n)$ и $p_+ = 2n$, асимптотический метод, изложенный в [5, гл. 1, §3], при $p_+ = 1, 2, \dots, 2n - 1$ и, наконец, теорему 3 из [3, гл. 7, §1] в случае, когда $p_+ > 2n$. Заметим, что проверка применимости перечисленных теорем и методов к нахождению асимптотики на бесконечности решений $\mathbf{v}(t)$ системы дифференциальных уравнений, к которой дифференциальное уравнение (3) приводится с помощью указанных выше преобразований, требует проведения достаточно громоздких вычислений.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, — первые n функций, принадлежащих построенному в лемме 1 фундаментальному семейству решений дифференциального уравнения (3) с целым или нецелым значением параметра $p_+ \in (n - 1/2, 2n)$. При $n + 1 \leq j \leq 2n$ первый член асимптотики в нуле производных $y_k^{(j-1)}$ указанных функций, получаемый при дифференцировании их асимптотики (5), становится неопределенным из-за того, что $(x^{k-1})^{(j-1)} = 0$ для рассматриваемых k и j . Стандартный, но достаточно трудоемкий способ раскрытия этой неопределенности дает для любого k , $1 \leq k \leq n$, оценки $y_k^{(j-1)}(x) = O(x^{2n-p_++k-j})$, $x \rightarrow +0$, при $n + 1 \leq j \leq 2n$, используемые в доказательстве теоремы 1.

Из асимптотики при $x \rightarrow +0$ функций, образующих фундаментальное семейство решений дифференциального уравнения (3), построенное в лемме 1 для $p_+ \in (0, 2n)$ и лемме 2 для $p_+ \geq 2n$, легко определить, сколько из них принадлежит $L^2(I_+)$. Поэтому непосредственным следствием лемм 1, 2 является

ЛЕММА 3. Индексы дефекта симметрического оператора $H(I_+)$, зависящего от параметра p_+ , вычисляются по следующим формулам:

- 1) $\operatorname{Def} H(I_+) = 2n$, если $p_+ < n + 1/2$;
- 2) $n + 1 \leq \operatorname{Def} H(I_+) \leq 2n - 1$ и, более точно, $\operatorname{Def} H(I_+) = 3n - [p_+ + 1/2]$, если $n + 1/2 \leq p_+ < 2n - 1/2$;
- 3) $\operatorname{Def} H(I_+) = n$, если $p_+ \geq 2n - 1/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. С учетом замечания 1 для оператора $H(I_-)$ справедлив аналог леммы 2. Его формулировка получается путем замены в лемме 3 оператора $H(I_+)$ и параметра p_+ оператором $H(I_-)$ и параметром p_- .

Лемма 3 и замечание 3 позволяют получить теорему 2 с помощью следующих рассуждений.

Пусть x_{r-1}, x_r — два соседних нуля коэффициента $c(x)$ дифференциального выражения $s[f]$, рассматриваемого в теореме 2. Положим $J_r = (x_{r-1}, x_r)$ и покажем, что оператор $H(J_r)$, порожденный этим дифференциальным выражением, самосопряжен для любого r , $-\infty < r < +\infty$. В силу одного из условий теоремы 2 оба односторонних порядка каждого из нулей x_{r-1}, x_r коэффициента $c(x)$ больше или равны $2n - 1/2$ и $c(x) \neq 0$ при $x \in J_r$. Зафиксируем какую-нибудь точку $\xi_r \in J_r$, после чего трем интервалам $J_r, J_{r,-} = (x_{r-1}, \xi_r), J_{r,+} = (\xi_r, x_r)$ поставим в соответствие минимальные операторы $H(J_r), H(J_{r,-}), H(J_{r,+})$, порожденные рассматриваемым дифференциальным выражением $s[f]$ соответственно в $L^2(J_r), L^2(J_{r,-}), L^2(J_{r,+})$. Их индексы дефекта связаны известной формулой (см., например, [4, гл. 13, §2, следствие 26])

$$\text{Def } H(J_r) = \text{Def } H(J_{r,-}) + \text{Def } H(J_{r,+}) - 2n. \quad (6)$$

При сдвиге начала координат на оси переменной x в точку x_{r-1} (или в точку x_r) оператор $H(J_{r,-})$ переходит в оператор $H(I_+)$, рассматриваемый в лемме 3, с параметром $p_+ = p_{+,r-1} \geq 2n - 1/2$ (соответственно оператор $H(J_{r,+})$ переходит в оператор $H(I_-)$, рассматриваемый в замечании 3, с параметром $p_- = p_{-,r} \geq 2n - 1/2$). Поэтому из леммы 3 и замечания 3 следует, что $\text{Def } H(J_{r,+}) = \text{Def } H(J_{r,-}) = n$. Подстановка полученных значений индексов дефекта операторов $H(J_{r,-}), H(J_{r,+})$ в формулу (6) дает равенство $\text{Def } H(J_r) = 0$, т.е. самосопряженность каждого из симметрических операторов $H(J_r)$, $-\infty < r < +\infty$, действующих во взаимно ортогональных подпространствах $L^2(J_r)$ гильбертова пространства $L^2(\mathbb{R})$. Последнее свойство влечет за собой самосопряженность их бесконечной ортогональной суммы $\bigoplus_{r=-\infty}^{+\infty} H(J_r)$ в $L^2(\mathbb{R})$. Так как оператор H является ее симметрическим расширением, то он совпадает с ней и, следовательно, самосопряжен. Таким образом, теорема 2 доказана.

§3. Доказательство теоремы 1

В отличие от случая теоремы 2, при доказательстве теоремы 1 недостаточно ограничиться сведениями об индексах дефекта симметрических операторов $H(I_+)$ и $H(I_-)$, приведенными в леммах 1, 2. Нам также понадобятся определенные сведения об индексах дефекта действующего в $L^2(I_0)$, $I_0 = (-h_-, h_+)$, оператора $H(I_0)$, порожденного дифференциальным выражением $s[f]$ с коэффициентом $c(x)$, имеющим нуль $x = 0$ двустороннего порядка (p_-, p_+) , т.е. допускающим представление (1). При получении этих сведений мы используем приведенное ниже в лемме 4 описание дефектного подпространства $\mathfrak{N}_0 \subset L^2(I_0)$ оператора $H(I_0)$, отвечающего произвольному числу $\bar{z}$, $\text{Im } z \neq 0$. В этом описании присутствуют отвечающие указанному комплексному числу дефектные подпространства $\mathfrak{N}_+ \subset L^2(I_+)$, $\mathfrak{N}_- \subset L^2(I_-)$ минимальных операторов $H(I_+)$, $H(I_-)$, порожденных дифференциальными выражениями (2). В нем также используется билинейная форма $Q[f, y](x)$, определяющая вид внеинтегральных членов в тождестве Лагранжа $\int_{\alpha}^{\beta} s[f] \bar{y} dx = \int_{\alpha}^{\beta} f \overline{s[y]} dx + Q[f, y](\beta) - Q[f, y](\alpha)$; мы его рассматриваем для любого отрезка $[\alpha, \beta]$, принадлежащего одному из интервалов I_- , I_+ , произвольной функции $f(x) \in C_0^\infty(I_0)$ и фиксированной функции $y(x)$, принадлежащей одному из классов $C^\infty(I_-)$, $C^\infty(I_+)$. Нам понадобятся обозначения $Q[f, y](\pm 0) = \lim_{x \rightarrow \pm 0} Q[f, y](x)$.

С помощью простых вычислений можно получить представление

$$Q[f, y](x) = Q_1[f, y](x) + Q_2[f, y](x), \quad (7)$$

где

$$Q_1[f, y](x) = \sum_{j=1}^n q_j[f](x) \overline{y^{(j-1)}(x)}, \quad Q_2[f, y](x) = \sum_{j=n+1}^{2n} q_j[f](x) \overline{y^{(j-1)}(x)}; \quad (8)$$

здесь для любого j , $1 \leq j \leq 2n$, через $q_j[f](x)$ обозначено линейное дифференциальное выражение от $f(x)$ порядка $2n - j$ с коэффициентами, выражающимися через производные тех или иных порядков от коэффициента $s(x)$ дифференциального выражения $s[f]$.

ЛЕММА 4. Дефектное подпространство $\mathfrak{N}_0$ оператора $H(I_0)$ совпадает с совокупностью функций $y(x) \in L^2(I_0)$, обладающих следующими свойствами:

- 1) $y(x) \in \mathfrak{N}_- \oplus \mathfrak{N}_+$;
- 2) односторонние пределы $Q[f, y](-0)$ и $Q[f, y](+0)$ существуют для любой функции $f(x) \in C_0^\infty(I_0)$;
- 3) для указанных $f(x)$ выполняется условие сопряжения $Q[f, y](-0) = Q[f, y](+0)$.

Доказательство леммы 4 имеет элементарный характер.

Доказательство теоремы 1 опирается на следующее свойство индексов дефекта оператора $H(I_0)$, зависящего от параметров p_- , p_+ .

ЛЕММА 5. Пусть двусторонний порядок (p_-, p_+) нуля $x = 0$ коэффициента $s(x)$ дифференциального выражения $s[f]$, порождающего действующий в $L^2(I_0)$ симметрический минимальный оператор $H(I_0)$, удовлетворяет условию $n - 1/2 < p_-, p_+ < 2n - 1/2$. Тогда справедливо неравенство $\text{Def } H(I_0) \geq 2n + 1$.

Для доказательства леммы 5 достаточно при ограничениях, наложенных в ней на p_- , p_+ , построить $2n + 1$ линейно независимых функций $y(x)$, $x \in (-h_-, h_+)$, принадлежащих дефектному подпространству $\mathfrak{N}_0$ оператора $H(I_0)$, отвечающему какому-нибудь числу $\bar{z}$, $\text{Im } \bar{z} \neq 0$, т.е. обладающих тремя свойствами, перечисленными в лемме 4.

Первые два из этих свойств относятся к ограничениям функций $y(x)$ на интервалы $(-h_-, 0)$, $(0, h_+)$ и симметрическим минимальным операторам $H(I_-)$ и $H(I_+)$, порожденным дифференциальным выражением $s[f]$ из леммы 5 соответственно в гильбертовых пространствах $L^2(I_-)$ и $L^2(I_+)$. В силу замечания 1 указанные свойства достаточно изучать только для ограничений функций $y(x)$ на интервал $(0, h_+)$.

Будем считать, что параметр $p_+ \in (n - 1/2, 2n - 1/2)$ принимает нецелые значения. В силу первого утверждения леммы 1 при сделанном предположении для получения базиса в рассматриваемом в лемме 4 дефектном подпространстве $\mathfrak{N}_+$ оператора $H(I_+)$ достаточно выбрать из фундаментального семейства решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, дифференциального уравнения (3), асимптотика которых при $x \rightarrow +0$ приведена в формуле (5), решения, принадлежащие $L^2(I_+)$. Легко проверяется, что базис в $\mathfrak{N}_+$ составляют, во-первых, n решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, и, во-вторых, $2n - [p_+ + 1/2] \geq 1$ решений $y_k(x)$, $[p_+ + 1/2] + 1 \leq k \leq 2n$. В частности, для любого нецелого $p_+ \in (n - 1/2, 2n - 1/2)$ указанному базису в $\mathfrak{N}_+$ принадлежит функция $y_{2n}(x)$. Следующим шагом в доказательстве леммы 5 является такое вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 6. При $1 \leq k \leq n$ и $k = 2n$ для любой функции $f(x) \in C_0^\infty(I_0)$ существуют односторонние пределы $Q[f, y_k](+0) = \lim_{x \rightarrow +0} Q[f, y_k](+x)$, причем справедливы равенства

$$Q[f, y_k](+0) = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad Q[f, y_{2n}](+0) = C(p_+)a_+(0)f(0); \quad (9)$$

константа $C(p_+)$ является значением при $p = p_+$ некоторой функции $C(p)$ параметра p , обладающей свойством $C(p) \neq 0$ для нецелых p .

Для проверки справедливости леммы 6 следует вычислять указанные в ней пределы, заменяя присутствующие в формулах (7), (8) функции $c(x) = x^{p_+}a_+(x)$, $f(x) \in C_0^\infty(I_0)$, а также решения $y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$ и $k = 2n$, дифференциального уравнения (3) и их производные асимптотиками перечисленных функций при $x \rightarrow +0$. Пусть $s^{\{0\}} = 1$, $s^{\{m\}} = \prod_{l=0}^{m-1} (s-l)$, $m = 1, 2, \dots$, — обобщенные степени числа s . Если воспользоваться асимптотиками функции $y_{2n}(x)$ и ее производных до порядка $2n-1$, вытекающими из формулы (5), то на этом пути тривиально получается второе равенство формулы (9) с константой $C(p_+)$ — значением при $p = p_+$ функции $C(p) = (-1)^{n-1} \sum_{j=n+1}^{2n} C_{n-1}^{j-1-n} p^{\{2n-j\}} (2n-1-p)^{\{j-1\}}$. С помощью некоторых формул теории конечных разностей устанавливается, что $C(p) = (-1)^{n-1} (n-1)! (2n-1-p)^{\{n\}}$, и, следовательно, $C(p) \neq 0$ для нецелых значений p . При вычислении (с использованием тех же технических средств) пределов $Q[f, y_k](+0)$, $1 \leq k \leq n$, выясняется, что для первой из сумм (8) легко выводится равенство $\lim_{x \rightarrow +0} Q_1[f, y_k](x) = 0$, однако при вычислении аналогичного предела второй из сумм (8) возникает неопределенность, связанная с обстоятельством, отмеченным в замечании 2. Эта неопределенность раскрывается с помощью приведенной в этом замечании асимптотической оценки производных порядков $j-1$, $n+1 \leq j \leq 2n$, от функций $y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$. Такая оценка достаточна для обоснования равенства $\lim_{x \rightarrow +0} Q_2[f, y_k](x) = 0$, из которого следуют в силу формул (7), (8) первые n из равенств (9), т. е. справедливость леммы 6.

Согласно замечанию 1, из установленных выше фактов, относящихся к оператору $H(I_+)$, зависящему от нецелого параметра $p_+ \in (n-1/2, 2n-1/2)$, вытекают аналогичные факты для оператора $H(I_-)$. Поэтому для нецелых $p_- \in (n-1/2, 2n-1/2)$ в дефектном подпространстве $\mathfrak{N}_-$ оператора $H(I_-)$, рассматриваемом в лемме 4, существует базис, из которого можно выбрать $n+1$ функций (обозначим их через $\eta_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, $\eta_{2n}(x)$), для которых справедлив аналог леммы 6. Это означает, что $Q[f, \eta_k](-0) = 0$, $1 \leq k \leq n$, $Q[f, \eta_{2n}](-0) = C(p_-)a_- (0)f(0)$, $C(p_-) \neq 0$. Используя функции $\eta_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, $\eta_{2n}(x)$ вместе с функциями $y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, $y_{2n}(x)$, рассматриваемыми в лемме 6, построим $2n+1$ функций $u_k(x) \in L^2(I_0)$, $-n \leq k \leq n$, первые n из которых (отвечающие индексам $-n \leq k \leq -1$) равны $\eta_{-k}(x)$ при $x \in I_-$ и нулю при I_+ , последние n (отвечающие индексам $1 \leq k \leq n$) равны функциям $y_k(x)$ при $x \in I_+$ и нулю при $x \in I_-$ и, наконец, функция $u_0(x)$ имеет вид $C(p_+)a_+(0)\eta_{2n}(x)$ на интервале I_- и $C(p_-)a_- (0)y_{2n}(x)$ на интервале I_+ . Эти функции линейно независимы на интервале I_0 и обладают свойствами, перечисленными в лемме 4. По лемме 4 они принадлежат дефектному подпространству $\mathfrak{N}_0$ оператора $H(I_0)$, и, следовательно, размерность $\text{Def } H(I_0)$ последнего больше или равна $2n+1$. Так устанавливается справедливость леммы 5 для нецелых значений параметров p_- , p_+ , удовлетворяющих ее условию.

Пусть теперь параметр $p_+ \in (n - 1/2, 2n - 1/2)$ принимает одно из целых значений $n, \dots, 2n - 1$. Рассмотрим соответствующее фундаментальное семейство решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, дифференциального уравнения (3), описание $2n - 1$ раз дифференцируемой асимптотики которых при $x \rightarrow +0$ приведено во втором утверждении леммы 1. С помощью вычислений, которые в рассматриваемом случае приходится выполнять заново, проверяется, что для функций $y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, и $y_{2n}(x)$ остается в силе лемма 6. Таким образом, фундаментальное семейство решений $y_k(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, дифференциального уравнения (3), обладающее свойствами (9), существует для любых $p_+ \in (n - 1/2, 2n - 1/2)$. Поэтому заключительная часть доказательства леммы 5 дает обоснование этой леммы не только для нецелых p_- , p_+ , но и для любых значений этих параметров, удовлетворяющих ее условию. Таким образом, лемма 5 справедлива в полной общности.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Заменяем присутствующее в лемме 5 двустороннее ограничение на параметры p_- , p_+ менее ограничительным односторонним вида $p_-, p_+ > n - 1/2$. Простой анализ доказательства этой леммы (с привлечением не только леммы 1, но и леммы 2) показывает, что в последнем случае оценка $\text{Def } H(I_0) \geq 2n + 1$ может не быть справедливой, однако обязательно выполняется более слабое неравенство $\text{Def } H(I_0) \geq 2n$.

В доказательстве теоремы 1, основанном на лемме 5, будем использовать обозначения $\mathbb{R}_x^+ = (x, +\infty)$, $\mathbb{R}_x^- = (-\infty, x)$ и называть *ячейкой* произвольный ограниченный интервал $I = (\alpha, \beta)$, содержащий в точности один нуль коэффициента $c(x)$ дифференциального выражения $s[f]$, удовлетворяющего условиям этой теоремы, и такой, что $c(\alpha)c(\beta) \neq 0$. Пусть H — симметрический минимальный оператор в $L^2(\mathbb{R})$, порожденный дифференциальным выражением $s[f]$.

Зафиксируем точку ξ_0 , обладающую свойством $c(\xi_0) \neq 0$, которая расщепляет числовую ось на полуоси $\mathbb{R}_{\xi_0}^-$ и $\mathbb{R}_{\xi_0}^+$. По крайней мере одна из этих полуосей содержит бесконечно много нулей коэффициента $c(x)$, двусторонние порядки p_- , p_+ которых удовлетворяют условию теоремы 1; для определенности, предположим, что таким свойством обладает полуось $\mathbb{R}_{\xi_0}^+$. Нули коэффициента $c(x)$, принадлежащие полуоси $\mathbb{R}_{\xi_0}^+$, образуют возрастающую последовательность $\{x_r\}_{r=1}^\infty$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} x_r = +\infty$. В каждом из интервалов (x_r, x_{r+1}) выберем по точке ξ_r и рассмотрим последовательность ячеек $I_r = (\xi_{r-1}, \xi_r)$, $1 \leq r < \infty$, содержащих по одному нулю x_r коэффициента $c(x)$. Применяя формулу (6) к полуоси $J_r = \mathbb{R}_{\xi_{r-1}}^+$, расщепленной точкой ξ_r на интервал $J_{r,-} = I_r$ и полуось $J_{r,+} = \mathbb{R}_{\xi_r}^+$, при каждом r и суммируя первые N таких равенств, получим равенство $\text{Def } H(\mathbb{R}_{\xi_0}^+) = S_N + \text{Def } H(\mathbb{R}_{\xi_N}^+)$, где $S_N = \sum_{r=1}^N (\text{Def } H(I_r) - 2n)$. Следствием этой формулы является оценка $\text{Def } H = \text{Def } H(\mathbb{R}_{\xi_0}^-) + \text{Def } H(\mathbb{R}_{\xi_0}^+) - 2n \geq S_N - 2n$ для любого сколь угодно большого N .

Согласно нашему предположению, существует подпоследовательность ячеек I_{r_l} , $1 \leq l < \infty$, с нулями x_{r_l} коэффициента $c(x)$, двусторонние порядки (p_-, p_+) которых удовлетворяют условию теоремы 1. При сдвиге точки $x = 0$ в каждый из нулей x_{r_l} оператор $H(I_{r_l})$ преобразуется в оператор $H(I_0)$, порожденный дифференциальным выражением $s[f]$ с коэффициентом, удовлетворяющим условиям леммы 5. По этой лемме $\text{Def } H(I_{r_l}) = \text{Def } H(I_0) \geq 2n + 1$, $1 \leq l < \infty$.

Аналогично с помощью замечания 4 показывается, что $\text{Def } H(I_r) \geq 2n$ для ячеек I_r , не принадлежащих указанной подпоследовательности. Так как из последних неравенств следует, что сумма S_N неограниченно возрастает при $N \rightarrow \infty$, то $\text{Def } H = +\infty$. Теорема 1 доказана.

§4. Заключительные замечания

Мы сформулировали теоремы 1 и 2 в их простейшем варианте — при условии бесконечной дифференцируемости коэффициента $c(x)$ в точках x , в которых $c(x) \neq 0$, и в предположении отсутствия конечных предельных точек у множества его нулей. Для применимости используемых в доказательствах этих теорем асимптотических методов достаточно конечной гладкости функции $c(x)$ в указанных точках, однако ее порядок неограниченно возрастает при $n \rightarrow +\infty$. Простой анализ доказательств теорем 1, 2 показывает, что их утверждения остаются справедливыми и тогда, когда множество нулей этой функции имеет ограниченное количество конечных предельных точек.

Пусть нули коэффициента $c(x)$ дифференциального выражения $s[f]$ порядка $2n \geq 2$ образуют возрастающую последовательность x_r , $-\infty < r < +\infty$, $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} x_r = \pm\infty$, удовлетворяющую условиям теоремы 2. Нетрудно проверить, что рассуждения, с помощью которых доказывается эта теорема, применимы не только к соответствующему оператору H , но и к более общему симметрическому минимальному оператору H_q в $L^2(\mathbb{R})$, порожденному дифференциальным выражением $s_q[f] = s[f] + q(x)f$ с *любым* действительным потенциалом $q(x) \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R})$, независимо от его поведения на бесконечности. Это означает, что теорема 2 верна также для оператора H_q . Аналогично, если порядки нулей рассматриваемого коэффициента $c(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, для оператора H_q остается в силе утверждение этой теоремы. Такие обобщения теорем 1, 2, в которых отсутствуют ограничения на поведение потенциала $q(x)$ на бесконечности, не имеют аналогов в случае, когда коэффициент $c(x)$ дифференциального выражения $s_q[f]$ строго положителен на числовой оси.

Интересно отметить, что утверждение теоремы 1 о бесконечности индексов дефекта симметрического минимального оператора H в $L^2(\mathbb{R})$, порожденного дифференциальным выражением $s[f] = (-1)^n(c(x)f^{(n)})^{(n)}$, $n \geq 1$, с коэффициентом $c(x)$, удовлетворяющим ее условию, равносильно существованию для любого числа z , $\text{Im } z \neq 0$, бесконечного множества линейно независимых решений $y(x) \in L^2(\mathbb{R})$ дифференциального уравнения $(-1)^n(c(x)y^{(n)})^{(n)} = zy$ в смысле обобщенных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орочко Ю. Б. Функци. анализ и его прил., **28**, 69–72 (1994).
2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Мир, М., 1970.
3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. Наука, М., 1969.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Мир, М., 1966.
5. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Изд-во АН УССР, Киев, 1954.