Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Тихонов, Абстрактные дифференциальные
нуль-уравнения, *Функц. анализ и его прил.*, 2004,
том 38, выпуск 2, 65–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa108>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 11:38:34

УДК 517.954

Абстрактные дифференциальные нуль-уравнения*

© 2004. И. В. Тихонов

Пусть E — комплексное банахово пространство и A — линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A) \subset E$ (не обязательно плотной в E). Единичный оператор в E обозначим через I .

Для любого натурального $n \geq 1$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$d^n u(t)/dt^n = Au(t). \quad (1)$$

Решением уравнения (1) на интервале $J \subset \mathbb{R}$ мы считаем функцию $u: J \rightarrow E$ из класса $C^n(J; E)$ со значениями в $D(A)$, удовлетворяющую уравнению (1) при всех $t \in J$. Назовем уравнение (1) *нуль-уравнением*, если на любом интервале $J \subset \mathbb{R}$ оно имеет только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$.

Свойства уравнения (1) принято выражать в терминах спектра $\sigma(A)$ и резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}$ оператора A . Пусть, например, оператор A имеет собственное значение $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ с собственным элементом $f_0 \neq 0$, $Af_0 = \lambda_0 f_0$. Тогда у (1) есть нетривиальное решение $u(t) = e^{\omega_0 t} f_0$, где $(\omega_0)^n = \lambda_0$ (годится любое значение ω_0). Другие, более тонкие признаки существования нетривиальных решений см. в [1–3].

Займемся обратным вопросом: при каких условиях на A решение уравнения (1) может быть только тривиальным? Ответ сформулируем в терминах поведения резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}$ как векторной целой функции переменной $\lambda \in \mathbb{C}$. Определение порядка и типа для векторных целых функций см. в [1, с. 118].

ТЕОРЕМА 1. Пусть A — линейный замкнутый оператор в E и $n \geq 1$ — порядок уравнения (1). Предположим, что резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ определена при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и как векторная целая функция переменной λ имеет порядок, меньший чем $1/n$, или порядок $1/n$, но минимальный тип. Тогда на любом (конечном или бесконечном) интервале $J \subset \mathbb{R}$ из (1) следует, что $u(t) \equiv 0$. Таким образом, (1) является нуль-уравнением.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $n = 1$ для уравнения $du(t)/dt = Au(t)$ теорема 1 связана с результатами Любича и Ткаченко [4, с. 430–433] об аппроксимации решения $u(t)$ с помощью «подчиненных» элементарных решений. При построении элементарных решений в [4] предполагается, что резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ является мероморфной функцией от $\lambda \in \mathbb{C}$. При целой резольвенте элементарные решения равны нулю и получается наша теорема 1. Но этот случай в [4] не выделяется, а общее доказательство теоремы об аппроксимации требует специальной техники мероморфных функций, чего для нуль-уравнений попросту не нужно. Наше доказательство основано лишь на одной теореме Поля о целых функ-

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (00-01-00638).

циях минимального типа [5] (см. также [1, с. 118]) и без труда проходит для уравнения любого порядка $n \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Достаточно рассмотреть интервал $J = [0, T]$. При любом $\lambda \in \mathbb{C}$ решение $u(t)$ уравнения (1) удовлетворяет соотношению

$$A \int_0^T e^{-\lambda t} u(t) dt = \int_0^T e^{-\lambda t} A u(t) dt = \int_0^T e^{-\lambda t} u^{(n)}(t) dt.$$

Подставим $\lambda = \lambda_k \equiv 2k\pi i/T$, где $k \in \mathbb{Z}$, $i^2 = -1$, и проинтегрируем правый интеграл n раз по частям. Для сокращения записи положим $u_m \equiv u^{(m)}(T) - u^{(m)}(0)$, $m = 0, \dots, n-1$. Результат представим в виде

$$(A - \lambda_k^n I) \int_0^T e^{-\lambda_k t} u(t) dt = u_{n-1} + \lambda_k u_{n-2} + \dots + \lambda_k^{n-1} u_0 \equiv P(\lambda_k), \quad (2)$$

где $P(\lambda) \equiv u_{n-1} + \lambda u_{n-2} + \dots + \lambda^{n-1} u_0$ — векторный полином от $\lambda \in \mathbb{C}$ степени $n-1$. Рассмотрим целую функцию

$$w(\lambda) = (A - \lambda^n I)^{-1} P(\lambda) = -(\lambda^n I - A)^{-1} P(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Из условия на резольвенту следует, что функция $w(\lambda)$ имеет не выше чем первый порядок и минимальный тип. Согласно (2), при $\lambda = \lambda_k$ справедливо соотношение

$$w(\lambda_k) = \int_0^T e^{-\lambda_k t} u(t) dt = \int_0^T e^{-(2k\pi i/T)t} u(t) dt \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Другими словами, функция $w(\lambda)$ является ограниченной на множестве точек λ_k , более того, она стремится к нулю при $|\lambda_k| \rightarrow \infty$. Точки λ_k образуют двустороннюю арифметическую прогрессию. По теореме Поля (теорема 3.13.8 из [1]) получаем $w(\lambda) \equiv 0$ при $\lambda \in \mathbb{C}$. Вновь обращаясь к (3), видим, что все коэффициенты Фурье функции $u(t)$ равны нулю. Поэтому $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$. Теорема доказана.

Резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ является целой функцией от $\lambda \in \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда существует ограниченный оператор $A^{-1}: E \rightarrow E$ и разложение

$$(\lambda I - A)^{-1} = -A^{-1}(I - \lambda A^{-1})^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A^{-k-1} \quad (4)$$

сходится по операторной норме при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Степенной ряд (4) определяет целую функцию не выше минимального типа при порядке $1/n$ тогда и только тогда, когда

$$k^n \|A^{-k}\|^{1/k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Доказательство соотношения (5) повторяет обычное рассуждение из [6, с. 250-252] с заменой модулей на нормы. Заметим, что (5) заведомо выполняется, если

$$\|A^{-k}\| \leq C^k/(km)!, \quad k = 1, 2, \dots, \quad C > 0, \quad m > n, \quad (6)$$

с константами C , m , не зависящими от k . Мы получили следующий вариант теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A — линейный замкнутый оператор в E и $n \geq 1$ — порядок уравнения (1). Предположим, что существует ограниченный обратный оператор $A^{-1}: E \rightarrow E$, для которого выполняется любое из соотношений (5), (6) с тем же значением n , что в (1). Тогда (1) является нуль-уравнением.

В гильбертовом пространстве E удобно такое следствие теоремы 1 (по поводу использованной терминологии см. [7]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть A — линейный замкнутый оператор в гильбертовом пространстве E и $n \geq 1$ — порядок уравнения (1). Предположим, что A не имеет собственных значений и существует ограниченный вполне непрерывный обратный оператор $A^{-1}: E \rightarrow E$, для s -чисел которого справедлива оценка $s_k(A^{-1}) = o(k^{-n})$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда (1) является нуль-уравнением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как A не имеет собственных значений, то A^{-1} тоже их не имеет. Следовательно, вполне непрерывный оператор A^{-1} вольтерров. Соотношение для s -чисел показывает, что резольвента $(I - \lambda A^{-1})^{-1}$ есть целая функция переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ не выше минимального типа при порядке $1/n$ [7, с. 299]¹⁾. Но тогда резольвента (4) также определена при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и является функцией не выше минимального типа при порядке $1/n$. Остается воспользоваться теоремой 1. Теорема 3 доказана.

Установим связь полученных результатов с классической теорией дифференциальных уравнений. Исходным пунктом к работе послужило одно замечание А. Н. Тихонова [9, с. 201] о решениях уравнения теплопроводности. Пусть

$$u_t = u_{xx}, \quad u = u(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Если $u(0, t) = u_x(0, t) = 0$ при $0 \leq t \leq T$, то $u \equiv 0$ всюду при $0 \leq t \leq T$. Затем этот факт обобщался Ландисом [10]. Отметим также связь с теоремами «типа Хольмгрена» [11, с. 49–58].

Покажем, что подобные результаты можно выводить из теоремы 1. Ограничимся следующим примером. Фиксируем натуральные m, n и вещественное $T > 0$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{t^n} = p_0(x)u_{x^m} + p_1(x)u_{x^{m-1}} + \dots + p_m(x)u, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(0, t) = u_x(0, t) = \dots = u_{x^{m-1}}(0, t) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (7)$$

Решением задачи (7) считаем функцию $u = u(x, t)$, принадлежащую классу $C^{m,n}([0, 1] \times [0, T])$ и удовлетворяющую всем соотношениям (7) в обычном смысле. Символами u_{x^k}, u_{t^k} обозначаем частные производные порядка k по переменным x, t .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $m > n \geq 1$ и $p_0(x), p_1(x), \dots, p_m(x)$ — непрерывные комплексные функции на $[0, 1]$, причем $|p_0(x)| \geq \varepsilon > 0$ для $0 \leq x \leq 1$. Тогда (7) имеет только тривиальное решение $u(x, t) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наметим вывод теоремы 4 из теоремы 1 (точнее из эквивалентной ей теоремы 2). В банаховом пространстве $E = C([0, 1])$ зададим

¹⁾Это следует из результатов Мацаева [8, с. 1036]. Формулировка в [7, с. 299] содержит очевидную опечатку: в формуле (5.5) вместо $1/p$ должно стоять p .

оператор

$$A = p_0(x) \frac{d^m}{dx^m} + p_1(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + p_m(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

на области $D(A) = \{f \in C^m([0, 1]): f(0) = f'(0) = \dots = f^{(m-1)}(0) = 0\}$. Тогда функция $u(x, t)$ из класса $C^{m,n}([0, 1] \times [0, T])$, удовлетворяющая (7), дает решение абстрактного уравнения (1) с указанным оператором A . Покажем, что A отвечает требованиям теоремы 2.

Рассмотрим уравнение $Af = g$ с известной правой частью $g \in E$:

$$\begin{cases} p_0(x)f^{(m)}(x) + p_1(x)f^{(m-1)}(x) + \dots + p_m(x)f(x) = g(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ f(0) = f'(0) = \dots = f^{(m-1)}(0) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

С помощью подстановки $\varphi(x) = f^{(m)}(x)$ преобразуем (8) к интегральному уравнению [12, с. 15]. Так как $|p_0(x)| \geq \varepsilon > 0$, то это уравнение Вольтерры второго рода для функции $\varphi(x)$. При этом

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi(s) ds. \quad (9)$$

Отсюда следует, что оператор A^{-1} определен и непрерывен на $E = C([0, 1])$ (и, значит, A замкнут). Выписывая $\varphi(x)$ через резольвенту Вольтерры и применяя обратную замену (9), получим оценку

$$|f(x)| \leq C \int_0^x \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!} G(s) ds, \quad G(x) = \max_{0 \leq \tau \leq x} |g(\tau)|. \quad (10)$$

Константа C зависит лишь от коэффициентов $p_0, p_1, \dots, p_m$ оператора A , но не зависит от g и от x . Из (10) легко выводится, что если $G(x) \leq M(x^q/q!)$ с некоторыми $M > 0$ и $q \in \{0, 1, 2, \dots\}$, то

$$F(x) \leq CM \frac{x^{q+m}}{(q+m)!}, \quad F(x) = \max_{0 \leq \tau \leq x} |f(\tau)|, \quad f = A^{-1}g. \quad (11)$$

Пусть теперь $f = A^{-k}g$. Применяя k раз правило (11), получим

$$F(x) \leq C^k \|g\| \frac{x^{km}}{(km)!}, \quad F(x) = \max_{0 \leq \tau \leq x} |f(\tau)|.$$

Так как $F(1) = \|f\|$, то $\|A^{-k}\| \leq C^k/(km)!$. По условию $m > n$. Таким образом, оператор A удовлетворяет требованию (6). По теореме 2 уравнение (1) с таким A является нуль-уравнением. Возвращаясь к (7), получим $u(x, t) \equiv 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $n = 1$, $m = 2$ и вещественных p_0, p_1, p_2 теорема 4 следует из результатов Ландиса [10, с. 76–82]. Однако доказательство в [10] принципиально иное, технически более сложное. При $n = 1$ и любом $m \geq 2$ теорему 4 можно также извлечь из теории Любича и Ткаченко [4, с. 432–433]. Но наш вопрос в [4] отдельно не изучается, а общие доказательства данных там теорем требуют значительных усилий. Наконец, в утверждениях «типа Хольмгрена» допускается случай $m = n$, но результаты получаются «в малом».

Покажем, что схема доказательства теоремы 1 легко переносится на общее уравнение

$$A_n u^{(n)}(t) + A_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \dots + A_1 u'(t) + A_0 u(t) = 0. \quad (12)$$

Здесь $n \geq 1$ — натуральное число, а $A_0, \dots, A_n$ — линейные замкнутые операторы в банаховом пространстве E . Решением уравнения (12) на интервале J мы считаем функцию $u: J \rightarrow E$ из класса $C^n(J; E)$, удовлетворяющую (12) при всех $t \in J$. Для $j \leq n$ предполагается, что $u^{(j)}(t) \in D(A_m)$ и функции $A_m u^{(j)}(t)$ непрерывны на J , т. е. к функции $u^{(j)}(t)$ можно применять операторы $A_j, A_{j+1}, \dots, A_n$. Например, к функции $u(t)$ можно применять все операторы $A_0, A_1, \dots, A_n$, а к функции $u^{(n)}(t)$ — оператор A_n . Такое согласование гладкости «по t » и «по x » будет использовано в доказательстве ниже.

Назовем (12) *нуль-уравнением*, если на любом интервале $J \subset \mathbb{R}$ оно имеет только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$. Как обычно, свяжем с уравнением (12) операторный пучок (полином)

$$L(\lambda) = \lambda^n A_n + \lambda^{n-1} A_{n-1} + \dots + \lambda A_1 + A_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (13)$$

Область определения $D(L) = D(A_0) \cap \dots \cap D(A_n)$ считается общей для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Если при каких-то $\lambda \in \mathbb{C}$ существует ограниченный обратный оператор

$$R(\lambda) \equiv L(\lambda)^{-1} = (\lambda^n A_n + \lambda^{n-1} A_{n-1} + \dots + \lambda A_1 + A_0)^{-1}: E \rightarrow E,$$

то будем называть его резольвентой пучка $L(\lambda)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $A_0, \dots, A_n$ — линейные замкнутые операторы в E и $L(\lambda)$ — операторный пучок (13). Предположим, что резольвента $R(\lambda) = L(\lambda)^{-1}$ определена при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и является векторной целой функцией переменной λ не выше чем первого порядка и минимального типа. Тогда (12) является нуль-уравнением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(t)$ — решение уравнения (12) на интервале $J = [0, T]$. Для $\lambda_k = 2k\pi i/T$, $k \in \mathbb{Z}$, имеем соотношение

$$\sum_{j=0}^n A_j \int_0^T e^{-\lambda_k t} u^{(j)}(t) dt = 0. \quad (14)$$

Используя обозначение $u_m \equiv u^{(m)}(T) - u^{(m)}(0)$, $m = 0, \dots, n-1$, преобразуем слагаемые в (14) по правилу

$$A_j \int_0^T e^{-\lambda_k t} u^{(j)}(t) dt = A_j \left(u_{j-1} + \lambda_k u_{j-2} + \dots + \lambda_k^{j-1} u_0 + \lambda_k^j \int_0^T e^{-\lambda_k t} u(t) dt \right),$$

или, короче,

$$A_j \int_0^T e^{-\lambda_k t} u^{(j)}(t) dt = P_j(\lambda_k) + \lambda_k^j A_j \int_0^T e^{-\lambda_k t} u(t) dt, \quad j = 1, \dots, n. \quad (15)$$

Здесь $P_j(\lambda) = A_j u_{j-1} + \lambda A_j u_{j-2} + \dots + \lambda^{j-1} A_j u_0$ — векторный полином от λ степени $j-1$. После подстановки (15) в (14) можно записать

$$L(\lambda_k) \int_0^T e^{-\lambda_k t} u(t) dt = -P_n(\lambda_k) - P_{n-1}(\lambda_k) - \dots - P_1(\lambda_k). \quad (16)$$

Пусть $P(\lambda) \equiv -P_n(\lambda) - P_{n-1}(\lambda) - \dots - P_1(\lambda)$ — векторный полином от λ степени $n - 1$. Рассмотрим целую функцию $w(\lambda) = R(\lambda)P(\lambda)$, где $R(\lambda) = L(\lambda)^{-1}$. Из условия на резольвенту следует, что функция $w(\lambda)$ имеет не выше чем первый порядок и минимальный тип. Согласно (16), для $w(\lambda)$ справедливо то же соотношение (3), что и в доказательстве теоремы 1. Далее доказательство теоремы 1 повторяется дословно.

Вопрос о том, когда резольвента пучка (13) является целой функцией не выше чем первого порядка и минимального типа, требует, конечно, отдельного изучения. Предыдущие теоремы 1–4 можно рассматривать как иллюстрацию к общей теореме 5.

Автор признателен рецензенту первого варианта работы за указание на связь наших результатов с теорией Любича и Ткаченко [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, М., 1962.
2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Наука, М., 1967.
3. Xiao T. J., Liang J. The Cauchy problem for higher order abstract differential equations. Lect. Notes in Math., Vol. 1701, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
4. Любич Ю. И., Ткаченко В. А. Теория и некоторые применения локального преобразования Лапласа. Матем. сб., **70**, №3, 416–437 (1966).
5. Pólya G. Über ganze Funktionen vom Minimaltypus der Ordnung 1. Jahr. Deutsch. Math. Vereinigung, **40**, Н. 9-12, Aufgabe 105, 80 (1931).
6. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. II. Наука, М., 1968.
7. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Наука, М., 1965.
8. Мацаев В. И. Об одном методе оценки резольвент несамосопряженных операторов. ДАН СССР, **154**, №5, 1034–1037 (1964).
9. Tychonoff A. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur. Матем. сб., **42**, №2, 199–216 (1935).
10. Ландис Е. М. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений. УМН, **14**, вып. 1, 21–85 (1959).
11. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. ГИФМЛ, М., 1961.
12. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3. Ч. II. ГТТИ, М.-Л., 1934.

Московский инженерно-физический институт
e-mail: tikhonov@east.ru

Поступило в редакцию
9 декабря 2002 г.