Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Оувада, Интерполяционная теорема Сарасона для аналитических скрещенных произведений, *Функци. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 2, 82–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa11>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 11:58:02

Интерполяционная теорема Сарасона для аналитических скрещенных произведений*

© 2006. Т. ОУВАДА

Сарасон [7] исследовал теорию обобщенной интерполяции в алгебре Харди $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{T})$ над единичной окружностью и доказал интерполяционную теорему. Рассматривая аналитические скрещенные произведения как «некоммутативные алгебры Харди», Сайто [6] ввел понятие интерполяции в аналитических скрещенных произведениях и доказал интерполяционную теорему Сарасона для случая аналитического скрещенного произведения, определяемого конечной алгеброй фон Неймана и ее автоморфизмом [6, Theorem 3.2]. Его метод доказательства таков, что избавиться в нем от предположения о конечности алгебр фон Неймана, по-видимому, нельзя. Хотя Иосино [8] и дал простое доказательство интерполяционной теоремы Сарасона в $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{T})$, но оно опирается на условие, что оператор, сопряженный к оператору Ганкеля, снова должен быть оператором Ганкеля. Разумеется, это не гарантировано в общей ситуации аналитических скрещенных произведений (ср. [4]). Чтобы провести аналог подхода Иосино, мы сформулируем условие, эквивалентное условию из теоремы Нехари [2, Theorem 3.5]. Затем мы докажем, что интерполяционная теорема Сарасона в формулировке Сайто верна и без предположения о конечности соответствующей алгебры фон Неймана.

Пусть M — алгебра фон Неймана, а α — ее $*$ -автоморфизм. Мы считаем, что M действует на некоммутативном L^2 -пространстве $L^2(M)$ в смысле Хагерупа (ср. [1]). Если $x \in M$, то обозначим через ℓ_x (соответственно r_x) оператор в $L^2(M)$, действующий по формуле $\ell_x y = xy$ (соответственно $r_x y = yx$), $y \in L^2(M)$. Тогда ℓ (соответственно r) представляет собой точное нормальное представление (соответственно антипредставление) алгебры M в гильбертовом пространстве $L^2(M)$. Положим

$$\ell(M) = \{\ell_x \mid x \in M\} \quad \text{и} \quad r(M) = \{r_x \mid x \in M\}.$$

Оператор J , заданный на $L^2(M)$ формулой $Jy = y^*$, $y \in L^2(M)$, представляет собой сопряженно-линейную изометрическую инволюцию в $L^2(M)$. Пусть $L^2(M)_+$ — положительная часть пространства $L^2(M)$. Поскольку четверка $\{\ell(M), L^2(M), J, L^2(M)_+\}$ является стандартной формой алгебры M в смысле Хагерупа [1], то алгебры фон Неймана $\ell(M)$ и $r(M)$ суть коммутанты друг друга и $J\ell(M)J = r(M)$. Более того, согласно [1, Theorem 3.2], существует такой унитарный оператор u в $L^2(M)$, что $\ell_{\alpha(x)} = u\ell_x u^*$ и $r_{\alpha(x)} = ur_x u^*$, $x \in M$. Чтобы построить скрещенное произведение, рассмотрим гильбертово пространство

$$\mathbb{L}^2 = \left\{ f: \mathbb{Z} \rightarrow L^2(M) \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f(n)\|_2^2 < \infty \right\},$$

*Работа частично поддержана субсидией на научные исследования, выделенной Министерством образования, культуры, спорта, науки и техники Японии.

где $\|\cdot\|_2$ — норма в $L^2(M)$. Для любого $x \in M$ определим операторы L_x , R_x , L_δ и R_δ в $\mathbb{L}^2$ формулами

$$\begin{aligned}(L_x f)(n) &= \ell_x f(n), & (R_x f)(n) &= r_{\alpha^n(x)} f(n), \\ (L_\delta f)(n) &= u f(n-1), & (R_\delta f)(n) &= f(n-1),\end{aligned}$$

где $f \in \mathbb{L}^2$ и $n \in \mathbb{Z}$. Пусть $L(M) = \{L_x \mid x \in M\}$ и $R(M) = \{R_x \mid x \in M\}$. Положим $\mathfrak{L} = \{L(M), L_\delta\}''$ and $\mathfrak{R} = \{R(M), R_\delta\}''$ и определим левое (правое) аналитическое скрещенное произведение $\mathfrak{L}_+$ (соответственно $\mathfrak{R}_+$) как σ -слабо замкнутую подалгебру в $\mathfrak{L}$ (соответственно в $\mathfrak{R}$), порожденную $L(M)$ и L_δ (соответственно $R(M)$ и R_δ). Далее, положим

$$\mathbb{H}^2 = \{f \in \mathbb{L}^2 \mid f(n) = 0, n < 0\}.$$

Заметим, что $\mathfrak{L}_+ = \{T \in \mathfrak{L} \mid T\mathbb{H}^2 \subseteq \mathbb{H}^2\}$. Теперь определим операторы Тёплица и Ганкеля следующим образом. Пусть P — ортогональный проектор на $\mathbb{H}^2$ в $\mathbb{L}^2$. Если A принадлежит $\mathfrak{L}$, то оператор Тёплица T_A и оператор Ганкеля H_A определены на $\mathbb{H}^2$ соотношениями

$$T_A f = P(Af) \quad \text{и} \quad H_A f = W(I - P)(Af) \quad (\forall f \in \mathbb{H}^2),$$

где W — унитарный оператор в $\mathbb{L}^2$, действующий по формуле $(Wf)(n) = f(-n-1)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Заметим, что $W^2 = I$ и $WPW = I - P$. Мы отсылаем читателя к [3, 5, 6] за обсуждением этих алгебр и операторов, включая некоторые их элементарные свойства. Будем говорить, что замкнутое подпространство $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{L}^2$ двусторонне инвариантно, если $\mathfrak{L}_+ \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{R}_+ \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$. Теперь рассмотрим двусторонне инвариантное подпространство в $\mathbb{H}^2$ вида $T_V \mathbb{H}^2$ для некоторого унитарного оператора V из $\mathfrak{L}_+$. Положим $\mathcal{K} = \mathbb{H}^2 \ominus T_V \mathbb{H}^2$. Ортогональный проектор в $\mathbb{L}^2$ с областью значений $\mathcal{K}$ обозначим через $P_{\mathcal{K}}$. Для любого линейного ограниченного оператора A в $\mathcal{K}$ определим оператор S_A в $\mathcal{K}$ формулой $S_A f = P_{\mathcal{K}}(Af)$ (для всех $f \in \mathcal{K}$). Если линейный ограниченный оператор A в $\mathcal{K}$ может быть записан в виде S_C для некоторого оператора C из $\mathfrak{L}_+$, то будем говорить, что оператор C *интерполирует* оператор A .

Целью заметки является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1 (ср. [6, Theorem 3.2]). *Если A — линейный ограниченный оператор в $\mathcal{K}$, коммутирующий с $P_{\mathcal{K}} \mathfrak{R}_+ P_{\mathcal{K}}$, то существует оператор C из $\mathfrak{L}_+$, интерполирующий оператор A (т. е. удовлетворяющий условию $A = S_C$), такой, что $\|A\| = \|C\|$. Таким образом, $(P_{\mathcal{K}} \mathfrak{L}_+ P_{\mathcal{K}})' = P_{\mathcal{K}} \mathfrak{R}_+ P_{\mathcal{K}}$ и $(P_{\mathcal{K}} \mathfrak{R}_+ P_{\mathcal{K}})' = P_{\mathcal{K}} \mathfrak{L}_+ P_{\mathcal{K}}$.*

Для доказательства нам нужна некоторая подготовка. Сайто [5] доказал следующие полезные результаты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [5, Proposition 2.2]. *Пусть T — линейный ограниченный оператор в $\mathbb{L}^2$. Отождествим $\mathbb{L}^2$ с тензорным произведением $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes L^2(M)$ пространств $\ell^2(\mathbb{Z})$ и $L^2(M)$. Тогда*

(i) *оператор T принадлежит коммутанту алгебры $L(M)$ в том и только в том случае, когда он имеет матричное представление вида $(r_{x_{ij}})_{i,j=-\infty}^\infty$, где $x_{ij} \in M$ для всех $i, j \in \mathbb{Z}$;*

(ii) *оператор T принадлежит коммутанту алгебры $R(M)$ в том и только в том случае, когда он имеет матричное представление вида $(l_{x_{ij}} u^{i-j})_{i,j=-\infty}^\infty$, где $x_{ij} \in M$ для всех $i, j \in \mathbb{Z}$.*

Для любого A из $\mathfrak{L}$ положим $\tilde{H}_{WAW} = W(I - P)(WAW)P$. Отметим, что вообще говоря, $\tilde{H}_{WAW}$ не является оператором Ганкеля, поскольку WAW не всегда лежит в $\mathfrak{L}$. Действительно, заметим, что оператор $\tilde{H}_{WAW}$ является оператором Ганкеля для любого $A \in \mathfrak{L}$ тогда и только тогда, когда α^2 тривиально на M . Поэтому обычно нужно различать $\tilde{H}_{WAW}$ и H_{WAW} . Отметим при этом, что если $A \in \mathfrak{L}$, то $(H_A)^* = \tilde{H}_{WA^*W}$.

Имина и Сайто [2] в связи с задачей Нехари предъявили некоторое условие того, что оператор из $B(\mathbb{H}^2)$ является оператором Ганкеля. Однако удобного условия до сих пор не существовало. Дадим такое условие в следующем виде.

Пусть U — тѐплицев оператор T_{R_δ} . Тогда U — изометрия из $B(\mathbb{H}^2)$ и справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3 (ср. [2, Theorem 3.5]). *Пусть $H \in B(\mathbb{H}^2)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (i) H является оператором Ганкеля, т. е. существует такой элемент A из $\mathfrak{L}$, что $H = H_A$;
- (ii) $U^*H = HU$ и WHP принадлежит коммутанту алгебры $R(M)$;
- (iii) H имеет матричное представление вида $(\ell_{x_{-i-j-1}} u^{-i-j-1})_{i,j=0}^\infty$, где $x_k \in M$ для всех $k \leq -1$.

При любом из этих условий

$$\|H\| = \inf\{\|A\| \mid A \in \mathfrak{L} \text{ и } H_A = H\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (iii) вытекает из [2, Theorem 3.5].

(i) $\Rightarrow$ (ii). Предположим, что существует такой оператор A из $\mathfrak{L}$, что $H = H_A$. Поскольку $WHP = (I - P)AP$, ясно, что $WHP \in R(M)'$. Так как $R_\delta \mathbb{H}^2 \subseteq \mathbb{H}^2$, имеем

$$\begin{aligned} U^*H &= U^*H_A = PR_\delta^*PW(I - P)AP = PR_\delta^*(PW(I - P))AP \\ &= P(PW(I - P))R_\delta^*AP = PW(I - P)AR_\delta P \\ &= PW(I - P)APR_\delta P = H_AU = HU. \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Если выполнено (ii), то, согласно предложению 2, WHP имеет матричное представление $(\ell_{x_{ij}} u^{i-j})_{i,j=-\infty}^\infty$, $x_{ij} \in M$, где $x_{ij} = 0$ при $(i, j) \notin \mathbb{Z}_- \times \mathbb{Z}_+$. Таким образом, WHP имеет вид $(\ell_{x_{-i-1-j}} u^{-i-j-1})_{i,j=-\infty}^\infty$, где $x_{-i-1-j} = 0$ при $(m, n) \notin \mathbb{Z}_+^2$. Поскольку $U^*H = HU$, то для любых $i, j \geq 0$ имеем $\ell_{x_{-i-1-j}} u^{-i-j-1} = \ell_{x_{-i-2-j+1}} u^{-i-j-1}$ и потому $x_{-i-1-j} = x_{-i-2-j+1}$. Отсюда следует, что H имеет требуемое матричное представление. Теорема доказана. $\square$

По аналогии с теоремой 3 можно получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $H \in B(\mathbb{H}^2)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (i) существует такой элемент A из $\mathfrak{L}$, что $H = \tilde{H}_{WAW}$;
- (ii) $U^*H = HU$ и HPW принадлежит коммутанту алгебры $R(M)$.

При этих условиях

$$\|H\| = \inf\{\|A\| \mid A \in \mathfrak{L} \text{ и } \tilde{H}_{WAW} = H\}.$$

Простыми вычислениями можно доказать следующие леммы.

ЛЕММА 5. *Для любого A из $\mathfrak{L}$*

- (i) $H_A = 0$ тогда и только тогда, когда A лежит в $\mathfrak{L}_+$;

(ii) $\tilde{H}_{WAW} = 0$ тогда и только тогда, когда A^* лежит в $\mathfrak{L}_+$.

ЛЕММА 6. Если A и B принадлежат $\mathfrak{L}$, то $(H_A)^*H_B = T_{A^*B} - T_{A^*}T_B$.

ЛЕММА 7. Оператор WA^*W $\mathbb{H}^2$ -инвариантен для любого A из $\mathfrak{L}_+$.

Для любого A из $\mathfrak{L}$ положим $\tilde{T}_{WAW} = PWA^*W$. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 8. Для любых $A \in \mathfrak{L}$ и $B \in \mathfrak{L}_+$

(i) $H_AT_B = H_{AB}$;

(ii) $\tilde{H}_{WAW}\tilde{T}_{WB^*W} = \tilde{H}_{WAB^*W}$.

Теперь мы можем доказать основной результат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Поскольку V унитарен, по лемме 6 получаем

$$(H_{V^*})^*H_{V^*} = T_{VV^*} - T_V T_{V^*} = I - T_V T_{V^*}.$$

Поэтому $(H_{V^*})^*\mathbb{H}^2 = \mathcal{H}$. Так как $(H_{V^*})^* = \tilde{H}_{WVW}$, то $U^*(H_{V^*})^* = (H_{V^*})^*U$ и $(H_{V^*})^*PW$ принадлежит коммутанту алгебры $R(M)$ по теореме 4. При этом $U = P_{\mathcal{H}}R_{\delta}P_{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{H}$. Таким образом,

$$U^*(A^*(H_{V^*})^*) = A^*U^*(H_{V^*})^* = (A^*(H_{V^*})^*)U.$$

Для любого x из M имеем

$$R_x(A^*(H_{V^*})^*PW) = A^*R_x(H_{V^*})^*PW = (A^*(H_{V^*})^*PW)R_x.$$

Итак, $A^*(H_{V^*})^*PW \in R(M)'$ и, следовательно, $A^*(H_{V^*})^*$ удовлетворяет условию (ii) теоремы 4. Поэтому можно выбрать такое $D \in \mathfrak{L}$, что $A^*(H_{V^*})^* = \tilde{H}_{WDW}$ и $\|\tilde{H}_{WDW}\| = \|D\|$. Положим $C = VD^*$; тогда C лежит в $\mathfrak{L}$. По лемме 8 имеем

$$\begin{aligned} H_C &= H_{VD^*} = (\tilde{H}_{WDV^*W})^* = (\tilde{H}_{WDW}\tilde{T}_{WV^*W})^* = (A^*(H_{V^*})^*\tilde{T}_{WV^*W})^* \\ &= (\tilde{T}_{WV^*W})^*H_{V^*}A = (\tilde{T}_{WV^*W})^*(\tilde{H}_{WVW})^*A = (\tilde{H}_{WVW}\tilde{T}_{WV^*W})^*A \\ &= (\tilde{H}_{WV^*W})^*A = (H_I)^*A = 0, \end{aligned}$$

поскольку $I \in \mathfrak{L}_+$. Поэтому $C \in \mathfrak{L}_+$ в силу леммы 5, и мы замечаем, что $D^* = V^*C$. Тогда

$$A^*(H_{V^*})^* = \tilde{H}_{WDW} = (H_{D^*})^* = (H_{V^*}C)^* = (T_C)^*(H_{V^*})^*$$

по лемме 8. Итак, $A^* = (T_C)^*$ на $\mathcal{H}$. Поэтому

$$A = P_{\mathcal{H}}T_CP_{\mathcal{H}} = P_{\mathcal{H}}CP_{\mathcal{H}} = S_C. \quad (1)$$

Отсюда следует, что коммутант алгебры $P_{\mathcal{H}}\mathfrak{R}_+P_{\mathcal{H}}$ содержится в $P_{\mathcal{H}}\mathfrak{L}_+P_{\mathcal{H}}$. Обратное включение тривиально, так что $(P_{\mathcal{H}}\mathfrak{R}_+P_{\mathcal{H}})' = P_{\mathcal{H}}\mathfrak{L}_+P_{\mathcal{H}}$.

По формуле (1) имеем

$$\|A\| = \|P_{\mathcal{H}}CP_{\mathcal{H}}\| \leq \|C\|.$$

С другой стороны,

$$\|C\| = \|D\| = \|\tilde{H}_{WDW}\| = \|A^*(H_{B^*})^*\| \leq \|A\|.$$

Поэтому $\|A\| = \|C\|$. Теорема доказана. $\square$

Благодарность. Автор чрезвычайно признателен рецензенту за множество полезных замечаний и предложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Haagerup U.* Math. Scand., **37**, 271–283 (1975). 2. *Imina Y., Saito K.-S.* Canad. Math. Bull., **37**, 75–81 (1994). 3. *McAsey M., Muhly P. S., Saito K.-S.* Trans. Amer. Math. Soc., **248**, 381–409 (1979). 4. *Ohwada T.* The adjoint operators of Hankel operators associated with analytic crossed products. Preprint. 5. *Saito K.-S.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **108**, 539–549 (1990). 6. *Saito K.-S.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **117**, 11–20 (1995). 7. *Sarason D.* Trans. Amer. Math. Soc., **127**, 179–203 (1967). 8. *Yoshino T.* Yokohama Math. J., **44**, 21–24 (1997).

Department of General Science
Tsuruoka National College of Technology
Tsuruoka, Japan
e-mail: ohwada@tsuruoka-nct.ac.jp

Поступило в редакцию
11 марта 2004 г.