Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Горинов, Псевдокомплексные и псевдо(би)кватернионные отображения, *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 2, 84–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa110>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 12:35:27

Псевдокомплексные и псевдо(би)кватернионные отображения

© 2004. А. Г. Горинов

Биекция $\mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$) называется *псевдокомплексной*, если она переводит каждое комплексное проективное (соответственно аффинное) подпространство L в некоторое комплексное проективное (соответственно аффинное) подпространство комплексной размерности $\dim_{\mathbb{C}} L$. Левые псевдокватернионные биекции $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$, $\mathbb{H}P^n \rightarrow \mathbb{H}P^n$ определяются аналогичным образом. *Псевдобикватернионная* биекция $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ — это биекция, которая переводит каждое правое или левое аффинное кватернионное подпространство L в некоторое правое или левое аффинное кватернионное подпространство кватернионной размерности $\dim_{\mathbb{H}} L$ (при этом образ левого подпространства может быть правым подпространством и наоборот). Описание псевдокомплексных диффеоморфизмов $\mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ и голоморфных диффеоморфизмов $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$, $n \geq 2$, дифференциал которых в любой точке является псевдокватернионным оператором, дано соответственно в [1] и [2]. В. И. Арнольд поставил в [3] вопрос об описании всех псевдокомплексных и псевдо(би)кватернионных гомеоморфизмов.

Описание псевдокомплексных и псевдокватернионных гомеоморфизмов непосредственно следует из основной теоремы проективной геометрии (см., например, [4, теорема 2.26]). Описание псевдобикватернионных гомеоморфизмов дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА. Пусть $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$, $n \geq 2$, — псевдобикватернионный гомеоморфизм. Тогда найдутся $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, $v \in \mathbb{H}^n$ и невырожденная вещественная $n \times n$ -матрица A , такие, что либо f , либо $\bar{f}$ совпадает с отображением $x \mapsto q_1 A x q_2 + v$ (через $\bar{f}$ мы обозначаем композицию гомеоморфизма f и кватернионного сопряжения).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $A^l(\mathbb{H}^n)$ (соответственно $A^r(\mathbb{H}^n)$) пространство всех левых (соответственно правых) аффинных кватернионных прямых в $\mathbb{H}^n$ (топология на этих пространствах индуцирована каноническими вложениями в грассманиан $G_5(\mathbb{R}^{4n+1})$). Пусть $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ — псевдобикватернионный гомеоморфизм. Гомеоморфизм f индуцирует непрерывное отображение $F: A^l(\mathbb{H}^n) \cup A^r(\mathbb{H}^n) \rightarrow A^l(\mathbb{H}^n) \cup A^r(\mathbb{H}^n)$. Односторонняя аффинная кватернионная прямая (т. е. прямая, являющаяся левой, но не правой, или наоборот) под действием f не может перейти в двустороннюю, так как f — биекция, а значит, F сохраняет пространство $(A^l(\mathbb{H}^n) \cup A^r(\mathbb{H}^n)) \setminus (A^l(\mathbb{H}^n) \cap A^r(\mathbb{H}^n))$. Это пространство имеет две компоненты связности: $A^l(\mathbb{H}^n) \setminus A^r(\mathbb{H}^n)$ и $A^r(\mathbb{H}^n) \setminus A^l(\mathbb{H}^n)$. Заменяя, если надо, отображение f на его композицию с кватернионным сопряжением, предполагаем, что эти компоненты сохраняются. Их замыкания (в $A^l(\mathbb{H}^n) \cup A^r(\mathbb{H}^n)$) — это $A^l(\mathbb{H})$ и $A^r(\mathbb{H})$. Так как $A^l(\mathbb{H}^n) \setminus A^r(\mathbb{H}^n)$ и $A^r(\mathbb{H}^n) \setminus A^l(\mathbb{H}^n)$ сохраняются, их замыкания также сохраняются, т. е. f переводит левые аффинные кватернионные прямые в левые, а правые аффинные кватернионные прямые — в правые.

В силу теоремы Сколема–Нётер (см., например, [5, Theorem 1.8]), все автоморфизмы тела $\mathbb{H}$ внутренние. Из основной теоремы проективной геометрии следует, что найдутся левый $\mathbb{H}$ -линейный изоморфизм $g: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$, кватернион q и вектор $v \in \mathbb{H}^n$, такие, что $f(x) = q^{-1}(g(x)+v)q$. Отображение f , а значит, и g , переводит правые аффинные кватернионные прямые в правые аффинные кватернионные прямые. Можно проверить (см. [2]), что левый $\mathbb{H}$ -линейный изоморфизм, переводящий правые аффинные кватернионные прямые в правые аффинные кватернионные прямые, есть композиция двустороннего (одновременно левого и правого) $\mathbb{H}$ -линейного изоморфизма (матрица такого изоморфизма в стандартном базисе пространства $\mathbb{H}^n$ вещественна) и отображения $x \mapsto xq'$, $x \in \mathbb{H}^n$, для некоторого фиксированного $q' \in \mathbb{H}$. Теорема доказана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. «Векторный» аналог теоремы неверен. Для любого k существует много вещественных диффеоморфизмов $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, не являющихся $\mathbb{R}$ -линейными (и даже $\mathbb{Z}$ -линейными), но сохраняющих все вещественные векторные подпространства (в качестве примера можно взять отображение $x \mapsto \varphi(\|x\|)x$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^k$, а φ — неубывающая гладкая функция $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $\varphi(t) = 1$ при $t \leq 1$ и $\varphi(t) = t$ при $t \geq 2$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Функци. анализ и его прил., **35**, вып. 4, 1–7 (2001).
2. Арнольд В. И. Функци. анализ и его прил., **36**, вып. 1, 1–15 (2002).
3. Arnold V. I. Problems to the Seminar: 15 January 2002, Cahiers de Ceremade, 0216.
4. Армин Э. Геометрическая алгебра. Наука, М., 1969.
5. Lam T. Y. Algebraic theory of quadratic forms. 2nd ed., Benjamin/Cummings Publishing Co., Reading, Mass., 1980.

Université Paris 7, U.F.R. de mathématiques
email: gorinov@mccme.ru, gorinov@math.jussieu.fr

Поступило в редакцию
17 марта 2003 г.

УДК 517.9

Гамильтонианы псевдорелятивистских атомов с ядрами конечной массы: структура дискретного спектра*

© 2004. Г. М. Жислин

1. В заметке исследуется структура дискретного спектра псевдорелятивистского гамильтониана H квантовой системы типа нейтрального атома или (+)-иона с ядром конечной массы и n электронами при любом $n \geq 1$. Поскольку отделение движения центра масс для рассматриваемой системы невозможно, то изучение спектра $\sigma(H)$ оператора H проводится при фиксации значения P полного момента системы; эта фиксация выделяет относительно движение системы и его гамильтониан H_P с данным P . Главный результат работы — получение двусторонних оценок счетной функции дискретного спектра $\sigma_d(H_P)$ оператора H_P через счетные функции некоторых эффективных гамильтонианов (теорема 2) и нахождение на этой основе главного члена асимптотики спектра $\sigma_d(H_P)$ (теорема 3). Отметим, что найденные эффективные операторы

*Работа поддержана РФФИ, грант 03-01-00715 и Минобразования РФ, грант E00-1.0-21.