Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Жислин, Гамильтонианы псевдорелятивистских атомов с ядрами конечной массы: структура дискретного спектра, *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 2, 85–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa111>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 11:38:52

В силу теоремы Сколема–Нётер (см., например, [5, Theorem 1.8]), все автоморфизмы тела $\mathbb{H}$ внутренние. Из основной теоремы проективной геометрии следует, что найдутся левый $\mathbb{H}$ -линейный изоморфизм $g: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$, кватернион q и вектор $v \in \mathbb{H}^n$, такие, что $f(x) = q^{-1}(g(x)+v)q$. Отображение f , а значит, и g , переводит правые аффинные кватернионные прямые в правые аффинные кватернионные прямые. Можно проверить (см. [2]), что левый $\mathbb{H}$ -линейный изоморфизм, переводящий правые аффинные кватернионные прямые в правые аффинные кватернионные прямые, есть композиция двустороннего (одновременно левого и правого) $\mathbb{H}$ -линейного изоморфизма (матрица такого изоморфизма в стандартном базисе пространства $\mathbb{H}^n$ вещественна) и отображения $x \mapsto xq'$, $x \in \mathbb{H}^n$, для некоторого фиксированного $q' \in \mathbb{H}$. Теорема доказана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. «Векторный» аналог теоремы неверен. Для любого k существует много вещественных диффеоморфизмов $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, не являющихся $\mathbb{R}$ -линейными (и даже $\mathbb{Z}$ -линейными), но сохраняющих все вещественные векторные подпространства (в качестве примера можно взять отображение $x \mapsto \varphi(\|x\|)x$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^k$, а φ — неубывающая гладкая функция $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $\varphi(t) = 1$ при $t \leq 1$ и $\varphi(t) = t$ при $t \geq 2$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Функци. анализ и его прил., **35**, вып. 4, 1–7 (2001).
2. Арнольд В. И. Функци. анализ и его прил., **36**, вып. 1, 1–15 (2002).
3. Arnold V. I. Problems to the Seminar: 15 January 2002, Cahiers de Ceremade, 0216.
4. Армин Э. Геометрическая алгебра. Наука, М., 1969.
5. Lam T. Y. Algebraic theory of quadratic forms. 2nd ed., Benjamin/Cummings Publishing Co., Reading, Mass., 1980.

Université Paris 7, U.F.R. de mathématiques
email: gorinov@mccme.ru, gorinov@math.jussieu.fr

Поступило в редакцию
17 марта 2003 г.

УДК 517.9

Гамильтонианы псевдорелятивистских атомов с ядрами конечной массы: структура дискретного спектра*

© 2004. Г. М. Жислин

1. В заметке исследуется структура дискретного спектра псевдорелятивистского гамильтониана H квантовой системы типа нейтрального атома или (+)-иона с ядром конечной массы и n электронами при любом $n \geq 1$. Поскольку отделение движения центра масс для рассматриваемой системы невозможно, то изучение спектра $\sigma(H)$ оператора H проводится при фиксации значения P полного момента системы; эта фиксация выделяет относительно движение системы и его гамильтониан H_P с данным P . Главный результат работы — получение двусторонних оценок счетной функции дискретного спектра $\sigma_d(H_P)$ оператора H_P через счетные функции некоторых эффективных гамильтонианов (теорема 2) и нахождение на этой основе главного члена асимптотики спектра $\sigma_d(H_P)$ (теорема 3). Отметим, что найденные эффективные операторы

*Работа поддержана РФФИ, грант 03-01-00715 и Минобразования РФ, грант E00-1.0-21.

в теореме 2 и спектральные асимптотики в теореме 3 зависят не только от фиксированного значения P момента системы¹⁾, но и от некоторых интегральных характеристик основных состояний тех операторов, которые определяют нижнюю границу существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H_P)$ оператора H_P (подробнее см. разд. 7). Подобная зависимость не наблюдалась прежде ни в псевдорелятивистских (далее мы используем для них сокращение ПР), ни в нерелятивистских задачах. Ранее результаты о дискретном спектре ПР гамильтонианов с ядрами конечной массы и n электронами были получены только при $n = 1$ [1] (атом водорода и водородоподобные (+)-ионы). Для любого n результаты имелись лишь в случае бесконечно тяжелых ядер [2, 3], где фиксация полного момента не проводилась (она не нужна) и поэтому ПР операторы были значительно проще.

2. Пусть $Z_1 = \{0, 1, \dots, n\}$ — система $n + 1$ квантовых частиц, m_j , e_j и $r_j = (x_j, y_j, z_j)$ — масса, заряд и радиус-вектор j -й частицы, $r = (r_0, r_1, \dots, r_n)$, $M = \sum_{j=0}^n m_j$. Далее считаем, что $m_j = m$, $e_j = e < 0$, $j = 1, \dots, n$, $e_0 + ne \geq 0$. ПР оператор энергии системы Z_1 в атомных единицах записывается в виде

$$H' = K + V'(r),$$

где

$$K = \sum_{j=0}^n \tau_j, \quad \tau_j = \sqrt{-\Delta_j + m_j^2}, \quad \Delta_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_j^2},$$

$$2V'(r) = \sum_{i,j, i \neq j}^{0,n} V_{ij}(|r_{ij}|), \quad V_{ij}(|r_1|) = e_i e_j |r_1|^{-\gamma}, \quad r_{ij} = r_i - r_j, \quad 0 < \gamma < 3/2.$$

Кинетическая часть K оператора H' в координатном пространстве является суммой интегральных операторов. Поэтому ее удобнее рассматривать в импульсном пространстве, где она превращается в сумму операторов умножения. А именно,

$$K = \hat{K} = \sum_{j=0}^n \hat{\tau}_j,$$

где $\hat{\tau}_j = \sqrt{k_j^2 + m_j^2}$, $\hat{\tau}_j \hat{\psi} = \sqrt{k_j^2 + m_j^2} \hat{\psi} = \tau_j \psi$, $\hat{\psi}$ есть Фурье-образ функции $\psi(r)$ и k_j — импульс j -й частицы.

3. Для получения оператора энергии относительного движения фиксируем полное значение момента P системы [4]: $P = (P_1, P_2, P_3) = \sum_{j=0}^n k_j$. Далее вводим координаты центра масс $r_c = \sum_{j=0}^n m_j r_j / M$ и относительные координаты частиц $q_j = r_j - r_0$, $j = 1, \dots, n$. Пусть p_j , $j = 1, \dots, n$, — импульсы, отвечающие координатам q_j . Тогда [4]

$$k_j = p_j + \frac{m}{M} P, \quad j = 1, \dots, n, \quad k_0 = P - \sum_{j=1}^n k_j = \frac{m_0}{M} P - \sum_{j=1}^n p_j,$$

и оператор $\hat{K}$ запишется в виде

$$\hat{K} = \hat{T}' = \sum_{j=0}^n \hat{T}'_j,$$

¹⁾ Это мы наблюдаем уже при $n = 1$ [1].

где

$$\hat{T}'_j = \sqrt{\left(p_j + \frac{m}{M} P\right)^2 + m^2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \hat{T}'_0 = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^n p_j - \frac{m_0}{M} P\right)^2 + m_0^2}.$$

Вместо операторов $\hat{T}'_j$ удобно рассматривать операторы $\hat{T}_j = \hat{T}'_j - m_j$. Учитывая все вышеизложенное, мы в качестве изучаемого оператора берем оператор

$$H_P = \hat{T} + V(q), \quad (1)$$

где

$$\hat{T} = \sum_{j=0}^n \hat{T}_j, \quad V(q) = \frac{1}{2} \sum_{i,j; i \neq j}^{0,n} V_{ij}(|q_i - q_j|), \quad q = (q_1, \dots, q_n), \quad q_0 = (0, 0, 0),$$

причем в (1) оператор $\hat{T}$ записан в импульсном представлении, а $V(q)$ — в координатном. Далее всюду считаем, что $e_0 < -2\pi e$ ¹⁾; тогда оператор H_P полуграничен снизу на множестве C_0^2 . Распишем его до самосопряженного (по Фридрихсу), сохраняя прежнее обозначение.

4. Пусть $1 \leq j \leq n$, $q(\bar{j}) = (q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_n)$,

$$I_j = \sum_{i; i \neq j}^{0,n} V_{ij}(|q_i - q_j|), \quad V(\bar{j}) = V(\bar{j})(q(\bar{j})) = V(q) - I_j, \quad H(\bar{j}) = \hat{T} + V(\bar{j}).$$

Так как частицы с номерами $1, \dots, n$ тождественны, то операторы $H(\bar{j})$, $j = 1, \dots, n$, унитарно эквивалентны. Согласно [4], число

$$\mu = \inf H(\bar{j}) \quad (2)$$

есть нижняя граница существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H_P)$ оператора H_P .

Фиксируем вектор p_j в выражении для оператора $\hat{T}$, обозначим полученный оператор через $\hat{T}(p_j)$ и положим $b = (b_1, b_2, b_3) = p_j$,

$$G(b) \equiv H(\bar{j})(p_j) = \hat{T}(p_j) + V(\bar{j}).$$

Оператор $G(b)$ мы рассматриваем на функциях $\psi(q(\bar{j}))$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{3n-3})$, $\mathbb{R}^{3n-3} = \{q(\bar{j})\}$, считая b внешним векторным параметром. Тогда, очевидно,

$$\mu = \inf_b \inf G(b). \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть b — любой фиксированный вектор из $\mathbb{R}^3$. Тогда

$$\lambda(b) := \inf G(b) \quad (4)$$

есть дискретное собственное значение оператора $G(b)$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Для операторов $G_0(\omega_m)$, $\omega_m = (a_1, \dots, a_m)$, $a_s \in \mathbb{R}^3$, $1 \leq m \leq n-1$, получаемых из оператора H_P фиксацией импульсов $p_s = a_s$, $s = 1, \dots, m$, и удалением потенциалов V_{ij} при $(ij) \cap \omega_m \neq \emptyset$, находим $\sigma_{\text{ess}}(G_0(\omega_m))$ при любом ω_m и последовательно доказываем (строим на каждом

¹⁾В атомных единицах, которыми мы здесь пользуемся, $e^2 = 137^{-1}$, $e_0 = -Be$, где B — номер в таблице Менделеева того элемента, атом или ион которого рассматривается.

шаге подходящие пробные функции с использованием результатов предыдущего шага), что при любом ω_m

$$\inf G_0(\omega_m) < \inf \sigma_{\text{ess}} G_0(\omega_m), \quad m = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Отсюда при $m = 1$, $a_1 = b$ и следует утверждение теоремы 1.

Далее всюду предполагаем, что при любом $b \in \mathbb{R}^3$ собственное значение $\lambda(b)$ невырожденно¹⁾.

5. Так как $\lambda(b)$ непрерывно зависит от b и $\lambda(b) \rightarrow +\infty$ при $|b| \rightarrow \infty$, то в силу (3), (4) существуют $\beta_k \in \mathbb{R}^3$, $k = 1, \dots, k_0$, такие, что

$$\lambda(\beta_k) = \min_b \lambda(b) = \mu, \quad (5)$$

где число k_0 различных β_k , удовлетворяющих условию (5), не может быть бесконечным, поскольку собственные значения $\lambda(b)$ зависят от b аналитически; в частном случае $n = 1$ выполняется равенство $k_0 = 1$ (и $\beta_1 = (0, 0, 0)$) [1]. Очевидно, что векторы β_k из (5) не зависят от j . Нормированную собственную функцию оператора $G(\beta_k)$, отвечающую его собственному значению $\mu = \lambda(\beta_k)$, обозначим через $\varphi_k(q(\vec{j}))$, а ее образ в импульсном пространстве — через $\hat{\varphi}_k(p(\vec{j}))$, где $p(\vec{j}) = (p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n)$. Положим

$$a_{m\ell}(k, t) = \frac{\partial^2 \hat{T}_t}{\partial p_{jm} \partial p_{j\ell}} \Big|_{p_j = \beta_k}, \quad m, \ell = 1, 2, 3. \quad (6)$$

При $t = 0$ и $t = j$

$$a_{m\ell}(k, t) = -F_{tm} F_{t\ell} \hat{T}_t'^{-3} \Big|_{p_j = \beta_k}, \quad m \neq \ell,$$

$$a_{\ell\ell}(k, t) = \left(\sum_{s=1, s \neq \ell}^3 (F_{ts}^2 + m_t^2) \right) \hat{T}_t'^{-3} \Big|_{p_j = \beta_k},$$

где

$$F_{0s} = \frac{m_0}{M} P_s - \sum_t^{1,n} p_{ts}, \quad F_{js} = \frac{m}{M} P_s + p_{js}, \quad s = 1, 2, 3.$$

Пусть

$$b_{m\ell}(k) = ((a_{m\ell}(k, 0) + a_{m\ell}(k, j)) \hat{\varphi}_k, \hat{\varphi}_k), \quad m, \ell = 1, 2, 3. \quad (7)$$

В силу тождественности «электронов» числа $b_{m\ell}(k)$ — в отличие от функций $a_{m\ell}(k, t)$ — не зависят от j . Кроме того, отметим, что поскольку $a_{m\ell}(k, j)$ не зависят от $p(\vec{j})$, то

$$(a_{m\ell}(k, j) \hat{\varphi}_k, \hat{\varphi}_k) = a_{m\ell}(k, j). \quad (8)$$

6. Определим для любых $R > 0$ и $\varepsilon > 0$ операторы

$$A_{\varepsilon, R}^{\pm}(k) = (1 \pm \varepsilon) D_k + (1 \mp \varepsilon) V_R(q_1), \quad k = 1, \dots, k_0, \quad (9)$$

где

$$D_k = -\frac{1}{2} \sum_{m, \ell=1}^3 b_{m, \ell}(k) \frac{\partial^2}{\partial q_{1m} \partial q_{1\ell}},$$

$$V_R(q_1) = Q|q_1|^{-\gamma} \quad \text{при } |q_1| \geq R, \quad V_R(q_1) \equiv 0 \quad \text{при } |q_1| < R,$$

$$Q = (e_0 + (n-1)e)e < 0.$$

¹⁾По-видимому, невырожденность $\lambda(b)$ может быть доказана с помощью методики из [5, гл. XIII], однако пока это не сделано.

Операторы $A_{\varepsilon,R}^{\pm}(k)$ рассматриваются на функциях $g(q_1)$ с носителями в области $|q_1| \geq R$. Для произвольного самосопряженного оператора W и вещественного числа δ обозначим через $N(\delta, W)$ размерность линейной оболочки собственных функций дискретного спектра $\sigma_d(W)$ оператора W , расположенного слева от δ (т. е. $N(\delta, W)$ — счетная функция дискретного спектра оператора W на полуоси $(-\infty, \delta)$).

Главным результатом настоящей работы является следующая

ТЕОРЕМА 2. *По любым $\varepsilon > 0$, $\lambda_0 > 0$ можно указать такие числа $R > 0$, $C > 0$, что для любого λ , $0 < \lambda \leq \lambda_0$,*

$$f_1(\lambda) \equiv n \sum_{k=1}^{k_0} N(-\lambda; A_{\varepsilon,R}^+(k)) \leq N(\mu - \lambda; H_P) \leq f_2(\lambda) \equiv n \sum_{k=1}^{k_0} N(-\lambda; A_{\varepsilon,R}^-(k)) + C. \quad (10)$$

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Неравенства (10) следуют из существования таких пространств $B_i = B_i(\lambda)$, что

$$\begin{aligned} (H_P \psi, \psi) &\leq (\mu - \lambda) \|\psi\|^2 \quad \text{при } \psi \in B_1, \\ (H_P \psi, \psi) &\geq (\mu - \lambda) \|\psi\|^2 \quad \text{при } \psi \perp B_2, \\ \dim B_1 &\geq f_1(\lambda), \quad \dim B_2 \leq f_2(\lambda). \end{aligned}$$

Пространства B_i строятся, исходя из ожидаемого асимптотического вида собственных функций дискретного спектра оператора H_P , расположенного вблизи начала $\sigma_{\text{ess}}(H_P)$; оценки формы $(H_P \psi, \psi)$ основаны на специальных разбиениях координатного и импульсного пространств.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как коэффициенты $b_{m\ell}(k)$ оператора D_k не зависят от q_1 , вещественны и $b_{m\ell}(k) = b_{\ell m}(k)$, то, переходя с помощью подходящего ортогонального преобразования S_k в пространстве переменных $q_1 = (q_{11}, q_{12}, q_{13})$ к новым переменным $u = (u_1, u_2, u_3) = S_k q_1$, мы можем привести оператор D_k к каноническому виду

$$D_{0,k} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \nu_i(k) \frac{\partial^2}{\partial u_i^2}, \quad (11)$$

где $\nu_i(k)$, $i = 1, 2, 3$, — собственные значения матрицы $(b_{m\ell}(k))$, $m, \ell = 1, 2, 3$, $k = 1, \dots, k_0$. Поэтому и так как $V_R(q_1) = V_R(u)$, в теореме 2 можно заменить операторы $A_{\varepsilon,R}^{\pm}(k)$ на операторы

$$h_{\varepsilon,R}^{\pm}(k) = (1 \pm \varepsilon) D_{0,k} + (1 \mp \varepsilon) V_R(u), \quad (12)$$

т. е. вместо (10) написать, что

$$n \sum_{k=1}^{k_0} N(-\lambda; h_{\varepsilon,R}^+(k)) \leq N(\mu - \lambda; H_P) \leq n \sum_{k=1}^{k_0} N(-\lambda; h_{\varepsilon,R}^-(k)) + C. \quad (13)$$

7. Используя результаты из [5] о спектральных асимптотиках дискретного спектра операторов (12), мы на основании (13) получаем главный член спектральной асимптотики для ПР операторов H_P систем типа нейтральных атомов и (+)-ионов.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $d_k = \nu_1(k)\nu_2(k)\nu_3(k)$, $B(\beta_1, \beta_2)$ — бета-функция,

$$f(\lambda) = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi\gamma} |Q|^{3/\gamma} B\left(\frac{3}{\gamma} - \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \left(\sum_{k=1}^{k_0} d_k^{-1/2}\right) \lambda^{(3\gamma-6)/(2\gamma)}. \quad (14)$$

Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{N(\mu - \lambda; H_P)}{f(\lambda)} = 1. \quad (15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть k фиксировано. Очевидно, что произведение d_k собственных значений матрицы $(b_{m\ell}(k))$ равно ее определителю, который представляет собой гессиан $\text{Hes } \Phi_k(\beta_k)$ функции

$$\Phi_k(p_j) = ((\hat{T}_0 + \hat{T}_j)\hat{\varphi}_k, \hat{\varphi}_k)_{L^2(\mathbb{R}^{3n-3})},$$

вычисленный при $p_j = \beta_k$. Так как операторы $\hat{T}_s$, $s \neq 0$, $s \neq j$, не зависят от p_j , а потенциал $V^{(j)}$ не зависит от q_j , то вместо функции $\Phi_k(p_j)$ можно взять функцию

$$E_k(p_j) = (H^{(j)}(p_j)\varphi_k, \varphi_k) = (\hat{T}\hat{\varphi}_k, \hat{\varphi}_k)_{L^2(\mathbb{R}(p(\bar{j})))} + (V^{(j)}\varphi_k, \varphi_k)_{L^2(\mathbb{R}(q(\bar{j})))}$$

и, значит,

$$d_k = \text{Hes } E_k(\beta_k). \quad (16)$$

Рассмотрим поверхность $E = E_k(p_j)$, $p_j \in \mathbb{R}^3$. Ее точки — величины $E_k(p_j)$ для разных p_j — суть средние значения энергии исходной системы Z_1 после распада — на не взаимодействующие между собой кластеры $Z_1 \setminus j$ и (j) в состоянии φ_k при различных значениях p_j импульса j -го электрона. Поскольку гессиан гладкой поверхности можно рассматривать как характеристику ее выпуклости в рассматриваемой точке, то на основании (14) и (15) можно заключить, что главный член спектральной асимптотики дискретного спектра оператора H_P зависит от «степени выпуклости» в точке $p_j = \beta_k$ поверхности $E = E_k(p_j)$, $p_j \in \mathbb{R}^3$, образованной значениями энергии распавшейся системы в состоянии $\hat{\varphi}_k(p(\bar{j})) \{\varphi_k(q(\bar{j}))\}$, определяющем при $p_j = \beta_k$ начало сплошного спектра μ исходной системы (т. е. $E_k(\beta_k) = \mu$).

В свою очередь, геометрические свойства поверхности $E = E_k(p_j)$ зависят от масс и зарядов частиц, потенциалов взаимодействия между ними и, конечно, от значения P фиксированного полного момента (последняя зависимость — через коэффициенты $b_{m\ell}(k)$, куда P входит как явно, через функции $a_{m\ell}(k, t)$, так и не явно — через $\hat{\varphi}_k$).

8. Поскольку функции $\hat{\varphi}_k$, от которых зависят гессианы d_k (см. (16)), нам неизвестны, представляют интерес оценки величин d_k , не зависящие от $\hat{\varphi}_k$. Проще всего получить их, оценивая снизу и сверху операторы D_k в (9). Тогда с учетом (8) имеем

$$(m_0^{-1} + m^{-1})^3 \geq d_k \geq \det(a_{m\ell}(k, j)).$$

Разумеется, эти оценки (особенно сверху) достаточно грубы. Кроме того, оценка снизу зависит от значения β_k , которое найдено лишь при $n = 1$.

Автор благодарит проф. А. Лаптева за приглашение в Математический институт им. Миттаг-Леффлера (Стокгольм), где была выполнена часть настоящего исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вугальтер С. А., Жислин Г. М. ТМФ, **121**, №2, 297–306 (1999).
2. Вугальтер С. А., Жислин Г. М. Функц. анализ. и его прил., **32**, вып. 2, 83–86 (1998).
3. Жислин Г. М., Вугальтер С. А. Изв. АН, сер. матем., **66**, №1, 71–102 (2002).
4. Lewis R. T., Siedentop H., Vugalter S. Annals of Institute Poincaré, **97**, No. 1, 1–28 (1997).
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. IV. Анализ операторов. Мир, М., 1982.

Научно-исследовательский радиофизический
институт, Н. Новгород
e-mail: greg@nirfi.sci-nnov.ru

Поступило в редакцию
24 января 2003 г.

УДК 517.98

Когда сумма частичных отражений кратна единичному оператору

© 2004. А. С. МЕЛЛИТ, В. И. РАБАНОВИЧ, Ю. С. САМОЙЛЕНКО

*Дорогому Израилю Моисеевичу Гельфанду
с восхищением и благодарностью*

1. Введение. Наборы самосопряженных операторов в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве H ($\dim H \leq \infty$), спектры $\sigma(A_k)$ которых принадлежат заданным конечным множествам $M_k \subset \mathbb{R}$ ($k = 1, \dots, n$) и сумма которых кратна единичному оператору I_H , играют важную роль в анализе, алгебраической геометрии и теории представлений (см. [1, 2] и приведенную там библиографию).

В работах [3–5] изучался, в частности, вопрос об описании множества Σ_n параметров α , для которых существует гильбертово пространство H и n ортопроекторов $P_1, \dots, P_n$ (т.е. операторов, спектры которых содержатся в $\{0, 1\}$) в H , таких, что $\sum_{k=1}^n P_k = \alpha I_H$. Последнее условие эквивалентно тому, что $*$ -алгебра

$$\mathcal{P}_{n,\alpha} = \mathbb{C} \left\langle p_1, \dots, p_n \mid p_k^2 = p_k^* = p_k \ (k = 1, \dots, n), \sum_{k=1}^n p_k = \alpha e \right\rangle$$

имеет $*$ -представления в гильбертовом пространстве. Так как размерность пространства H не фиксируется (и даже может быть бесконечной), то описание множества Σ_n с помощью известных неравенств Хорна (см. [1, 2] и библиографию там) затруднительно.

В работе [5] дано описание множества Σ_n . Для $n \leq 4$ оно является дискретным и описание его и соответствующих представлений стало частью математического фольклора (обзор основных результатов и библиографию см. в [5]). Однако оказывается, что для $n \geq 5$ множество Σ_n содержит непустой интервал. В [5] доказано, что для $n \geq 4$

$$\Sigma_n = \Lambda_n \cup \left[\frac{n - \sqrt{n^2 - 4n}}{2}, \frac{n + \sqrt{n^2 - 4n}}{2} \right] \cup (n - \Lambda_n),$$