Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Меллит, В. И. Рабанович, Ю. С. Самойленко,
Когда сумма частичных отражений кратна единич-
ному оператору, *Функц. анализ и его прил.*, 2004,
том 38, выпуск 2, 91–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa112>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:14:08

ЛИТЕРАТУРА

1. Вугальтер С. А., Жислин Г. М. ТМФ, **121**, №2, 297–306 (1999).
2. Вугальтер С. А., Жислин Г. М. Функц. анализ. и его прил., **32**, вып. 2, 83–86 (1998).
3. Жислин Г. М., Вугальтер С. А. Изв. АН, сер. матем., **66**, №1, 71–102 (2002).
4. Lewis R. T., Siedentop H., Vugalter S. Annals of Institute Poincaré, **97**, No. 1, 1–28 (1997).
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. IV. Анализ операторов. Мир, М., 1982.

Научно-исследовательский радиофизический
институт, Н. Новгород
e-mail: greg@nirfi.sci-nnov.ru

Поступило в редакцию
24 января 2003 г.

УДК 517.98

Когда сумма частичных отражений кратна единичному оператору

© 2004. А. С. МЕЛЛИТ, В. И. РАБАНОВИЧ, Ю. С. САМОЙЛЕНКО

*Дорогому Израилю Моисеевичу Гельфанду
с восхищением и благодарностью*

1. Введение. Наборы самосопряженных операторов в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве H ($\dim H \leq \infty$), спектры $\sigma(A_k)$ которых принадлежат заданным конечным множествам $M_k \subset \mathbb{R}$ ($k = 1, \dots, n$) и сумма которых кратна единичному оператору I_H , играют важную роль в анализе, алгебраической геометрии и теории представлений (см. [1, 2] и приведенную там библиографию).

В работах [3–5] изучался, в частности, вопрос об описании множества Σ_n параметров α , для которых существует гильбертово пространство H и n ортопроекторов $P_1, \dots, P_n$ (т.е. операторов, спектры которых содержатся в $\{0, 1\}$) в H , таких, что $\sum_{k=1}^n P_k = \alpha I_H$. Последнее условие эквивалентно тому, что $*$ -алгебра

$$\mathcal{P}_{n,\alpha} = \mathbb{C} \left\langle p_1, \dots, p_n \mid p_k^2 = p_k^* = p_k \ (k = 1, \dots, n), \sum_{k=1}^n p_k = \alpha e \right\rangle$$

имеет $*$ -представления в гильбертовом пространстве. Так как размерность пространства H не фиксируется (и даже может быть бесконечной), то описание множества Σ_n с помощью известных неравенств Хорна (см. [1, 2] и библиографию там) затруднительно.

В работе [5] дано описание множества Σ_n . Для $n \leq 4$ оно является дискретным и описание его и соответствующих представлений стало частью математического фольклора (обзор основных результатов и библиографию см. в [5]). Однако оказывается, что для $n \geq 5$ множество Σ_n содержит непустой интервал. В [5] доказано, что для $n \geq 4$

$$\Sigma_n = \Lambda_n \cup \left[\frac{n - \sqrt{n^2 - 4n}}{2}, \frac{n + \sqrt{n^2 - 4n}}{2} \right] \cup (n - \Lambda_n),$$

где Λ_n — дискретное множество, являющееся объединением двух серий

$$\Lambda_n^{(0)} = \left\{ 0, 1 + \frac{1}{n-1}, 1 + \frac{1}{n-2-\frac{1}{n-1}}, 1 + \frac{1}{n-2-\frac{1}{n-2-\frac{1}{n-1}}}, \dots \right\},$$

$$\Lambda_n^{(1)} = \left\{ 1, 1 + \frac{1}{n-2}, 1 + \frac{1}{n-2-\frac{1}{n-2}}, 1 + \frac{1}{n-2-\frac{1}{n-2-\frac{1}{n-2}}}, \dots \right\}.$$

Приведем также следующее выражение для Λ_n :

$$\Lambda_n = \left\{ \frac{n - \sqrt{n^2 - 4n} \operatorname{cth}(k \operatorname{Arch}(\frac{\sqrt{n}}{2}))}{2} \mid k \in \mathbb{N} \right\}.$$

В настоящей заметке приведено описание множества $\widetilde{W}_n$ параметров $\alpha \in \mathbb{R}$, для которых существуют пространство H и n частичных отражений $A_1, \dots, A_n$ (самосопряженных операторов, таких, что $A_k^3 = A_k$, или, что то же самое, спектры которых лежат в множестве $\{-1, 0, 1\}$), сумма которых равна αI_H . Это условие можно переформулировать так: существует $*$ -представление $*$ -алгебры

$$\mathcal{R}_{n,\alpha} = \mathbb{C} \left\langle a_1, \dots, a_n \mid a_k^3 = a_k = a_k^* \ (k = 1, \dots, n), \sum_{k=1}^n a_k = \alpha e \right\rangle.$$

По существу мы приведем описание множества $W_n = \widetilde{W}_n + n$, т.е. множества параметров $\alpha \in \mathbb{R}$, для которых существуют $2n$ ортопроекторов $P_1, Q_1, \dots, P_n, Q_n$, удовлетворяющих условию $P_k \perp Q_k$ ($k = 1, \dots, n$), таких, что

$$\sum_{k=1}^n (P_k + 2Q_k) = \alpha I.$$

Множество W_n также есть множество параметров $\alpha \in \mathbb{R}$, при которых существует хотя бы одно $*$ -представление $*$ -алгебры

$$\mathcal{P}_{n,\alpha,\{0,1,2\}} = \mathbb{C} \left\langle p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n \mid p_k^2 = p_k^* = p_k, q_k^2 = q_k^* = q_k, \right. \\ \left. p_k q_k = q_k p_k = 0, \sum_{k=1}^n (p_k + 2q_k) = \alpha e \right\rangle.$$

Отметим, что при $n \geq 4$ множество W_n содержит дискретные серии точек и непрерывный отрезок. В дискретных точках $\alpha \in W_n$ существует конечное число неприводимых неэквивалентных представлений $*$ -алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha,\{0,1,2\}}$. В точках α , принадлежащих непрерывному отрезку, $*$ -алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha,\{0,1,2\}}$ являются $*$ -алгебрами не типа I. Описание неприводимых неэквивалентных $*$ -представлений $*$ -алгебры $\mathcal{R}_{3,0}$ или $\mathcal{P}_{3,3,\{0,1,2\}}$ см. в [6], неприводимые представления существуют в размерностях 1, 2, 3, семейство представлений размерности 3 параметризуется точками некоторого подмножества двумерной сферы.

Отметим также, что задача об описании $*$ -представлений $*$ -алгебры $\mathcal{R}_{n,\alpha}$ может быть переформулирована как задача об описании локально скалярных $*$ -представлений соответствующих графов [7].

2. Свойства множества W_n ($n \in \mathbb{N}$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть n — натуральное число. Тогда

- (1) $W_n \subset W_{n+1}$;
- (2) $W_1 = \{0, 1, 2\}$, $W_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $W_n \supset \{0, 1, \dots, 2n\}$;
- (3) множество W_n симметрично относительно точки n , т. е. $\alpha \in W_n \iff 2n - \alpha \in W_n$;
- (4) $W_n \subset \Sigma_{2n} \subset [0, 2n]$;
- (5) $W_n \supset \Sigma_n + \Sigma_n$;
- (6) $W_n \cap [0, 2] = \Sigma_n \cap [0, 2]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем, например, доказательство того, что $W_n \supset \Sigma_n + \Sigma_n$. Пусть $P_1, \dots, P_n$ — ортопроекторы в H , такие, что $\sum_{k=1}^n P_k = \alpha I_H$, и $P'_1, \dots, P'_n$ — ортопроекторы в H' , такие, что $\sum_{k=1}^n P'_k = \alpha' I_{H'}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n (P_k \otimes I_{H'} + I_H \otimes P'_k) = (\alpha + \alpha') I_H \otimes I_{H'},$$

причем оператор $P_k \otimes I_{H'} + I_H \otimes P'_k$ для каждого k является суммой двух коммутирующих проекторов; следовательно, его спектр содержится в множестве $\{0, 1, 2\}$. $\square$

3. Описание множества W_n при $n \geq 5$.

ТЕОРЕМА 1. При $n \geq 5$ множество W_n имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} W_n &= ([0, 2] \cap \Sigma_n) \cup [2, 2n - 2] \cup (2n - ([0, 2] \cap \Sigma_n)) \\ &= \Lambda_n^{(0)} \cup \Lambda_n^{(1)} \cup \left[n - \frac{n + \sqrt{n^2 - 4n}}{2}, n + \frac{n + \sqrt{n^2 - 4n}}{2} \right] \\ &\quad \cup (2n - \Lambda_n^{(1)}) \cup (2n - \Lambda_n^{(0)}). \end{aligned} \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы следует из свойств множества W_n , сформулированных в предложении 1. $\square$

4. Описание множества W_4 .

ТЕОРЕМА 2. Множество W_4 также имеет вид (1), т. е.

$$W_4 = \Lambda_4^{(0)} \cup \Lambda_4^{(1)} \cup [2, 6] \cup (8 - \Lambda_4^{(1)}) \cup (8 - \Lambda_4^{(0)}).$$

Доказательство с помощью предложения 1 сводится к доказательству следующей леммы.

ЛЕММА 1. $[2, 4] \subset W_4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство леммы конструктивно: для каждого $\alpha \in [2, 4]$ непосредственно строятся операторы $V^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) в l_2 , такие, что $\sum_{k=1}^4 V^{(k)} = \alpha I_{l_2}$. Операторы $V^{(k)}$ берутся вида $V^{(k)} = V_1^{(k)} \oplus V_2^{(k)} \oplus \dots$ для $k = 1, 2$ и $V^{(k)} = 0_{\mathbb{C}} \oplus V_1^{(k)} \oplus V_2^{(k)} \oplus \dots$ для $k = 3, 4$. Матрицы $V_i^{(1)} + V_i^{(2)}$ и $V_i^{(3)} + V_i^{(4)}$ суть 2×2 -матрицы одного из трех видов: $\text{diag}(\alpha_i, 2 - \alpha_i)$, $\text{diag}(\alpha_i, 3 - \alpha_i)$ или $\text{diag}(\alpha_i, 4 - \alpha_i)$. Любая из этих матриц есть сумма двух самосопряженных матриц со спектром из $\{0, 1, 2\}$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно дать описание, подобное приведенному в теореме 2, множества $W_{(1,1,1,2)}$ тех $\alpha \in \mathbb{R}$, для которых существует гильбертово пространство H и проекторы P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ($P_4 \perp P_5$) в H , такие, что

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + 2P_5 = \alpha I_H.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $W_{(1,1,1,2)} = \Lambda_4 \cup [2, 3] \cup (5 - \Lambda_4)$

5. Описание множества W_3 .

ТЕОРЕМА 3. Множество W_3 имеет следующий вид:

$$W_3 = W_3^{(0)} \cup W_3^{(1)} \cup W_3^{(\frac{3}{2})} \cup W_3^{(2)} \cup \{3\} \\ \cup (6 - W_3^{(2)}) \cup (6 - W_3^{(\frac{3}{2})}) \cup (6 - W_3^{(1)}) \cup (6 - W_3^{(0)}),$$

где

$$W_3^{(0)} = \left\{ 3 - \frac{1}{k + \frac{1}{3}} \right\}_{k \geq 0}, \quad W_3^{(1)} = \left\{ 3 - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right\}_{k \geq 0}, \\ W_3^{(\frac{3}{2})} = \left\{ 3 - \frac{1}{k + \frac{2}{3}} \right\}_{k \geq 0}, \quad W_3^{(2)} = \left\{ 3 - \frac{1}{k + 1} \right\}_{k \geq 0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 1 следует, что $W_3 \cap (-\infty, 2] = \{0, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ и $3 \in W_3$. Если доказать, что $3 - \frac{1}{x} \in W_3 \iff 3 - \frac{1}{x+1} \in W_3$ ($x > 0$), утверждение теоремы станет очевидным. Остановимся на доказательстве последнего утверждения. Нам понадобится следующий факт, который доказывается с помощью конструкций, подобных конструкциям из [8].

ЛЕММА 2. Пусть $\mathbb{R}_m^3$ — множество возрастающих троек действительных чисел, и пусть Ω_3 — множество таких троек $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}_m^3$, что существуют три самосопряженных оператора A_1, A_2, A_3 , таких, что $\sigma(A_i) \subset \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ и $A_1 + A_2 + A_3 = 0$. Положим $L(\vec{\alpha}) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_1)$ и $R(\vec{\alpha}) = (-\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1, \alpha_3 + \alpha_2)$. Тогда для $\vec{\alpha} \in \Omega_3$

- (1) если $L\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_m^3$, то $L\vec{\alpha} \in \Omega_3$;
- (2) если $R\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_m^3$, то $R\vec{\alpha} \in \Omega_3$.

Теперь пусть $3 - \frac{1}{x} \in W_3$, где $x > 0$. Это означает, что $(-1 + \frac{1}{3x}, \frac{1}{3x}, 1 + \frac{1}{3x}) \in \Omega_3$ или, что равносильно, $\vec{\alpha}_x = (-3x + 1, 1, 3x + 1) \in \Omega_3$. Далее, $R\vec{\alpha}_x = (-3x - 1, 2, 3x + 2) \in \mathbb{R}_m^3$ и $R^2\vec{\alpha}_x = (-3x - 2, 1, 3x + 4) = \vec{\alpha}_{x+1} \in \mathbb{R}_m^3$. Из леммы 2 следует, что $\vec{\alpha}_{x+1} \in \Omega_3$, т. е. $3 - \frac{1}{x+1} \in W_3$. Обратное утверждение доказывается аналогично, только с применением оператора L .

ЛИТЕРАТУРА

1. Klyachko A. A. Selecta Math., **4**, 419–445 (1998).
2. Fulton W. Bull. Amer. Math. Soc., **37**, No. 3, 209–249 (2000).
3. Рабанович В. И., Самойленко Ю. С. Функц. анализ и его прил., **34**, вып. 4, 91–93 (2000).
4. Рабанович В. И., Самойленко Ю. С. Укр. матем. ж., **53**, №7, 939–952 (2001).
5. Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С. Функц. анализ и его прил., **36**, вып. 3, 20–35 (2002).
6. Меллит А. С. Укр. матем. ж., **59**, №9, 1277–1383 (2003).
7. Кругляк С. А., Роутер А. В. Функц. анализ и его прил., готовится к печати.
8. Kruglyak S. A. Meth. Func. Anal. Topology, **8**, No. 4, 49–57 (2002).

Институт математики НАН Украины,
e-mail: mellit@imath.kiev.ua

Институт математики НАН Украины,
e-mail: slavik@imath.kiev.ua

Институт математики НАН Украины,
e-mail: yurii_sam@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
12 февраля 2003 г.