Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. О. Гринив, А. А. Шкаликов, Экспоненциальное убывание энергии решений уравнений, отвечающих некоторым операторным моделям механики, *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 3, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa113>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:10:00

УДК 517.43

Экспоненциальное убывание энергии решений уравнений, отвечающих некоторым операторным моделям механики*

© 2004. Р. О. Гринив, А. А. Шкаликов

*Дорогому Виктору Борисовичу Лидскому
с искренним уважением и благодарностью*

Линеаризованные уравнения движения механических систем часто записывают в операторной форме

$$\ddot{x} + B\dot{x} + Ax = 0. \quad (1)$$

Здесь $x(t)$ — функция со значениями в подходящем гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а A и B — операторы в $\mathcal{H}$. В системе с бесконечным числом степеней свободы эти операторы обычно неограничены. При этом оператор A отвечает за потенциальную энергию системы, является самосопряженным и равномерно положительным: $A = A^* \gg 0$. Оператор B отвечает за гироскопические силы и силы демпфирования, что выражается в свойстве аккретивности: $\operatorname{Re}(Bx, x) \geq 0$ при $x \in \mathcal{D}(B)$ — области определения оператора B .

Энергия решения $x(t)$ уравнения (1) определяется функционалом

$$E(x(t)) = \frac{1}{2}(\|\dot{x}\|^2 + \|A^{1/2}x\|^2).$$

Из уравнения (1) получаем соотношение $\frac{d}{dt}E(x(t)) = -\operatorname{Re}(B\dot{x}(t), \dot{x}(t)) \leq 0$, которое выражает диссипацию энергии во времени. Для многих механических систем наблюдается экспоненциальное убывание энергии. В случае систем с конечным числом степеней свободы (т. е. когда A и B — матрицы) устойчивость и экспоненциальная устойчивость изучались еще в книге Кельвина и Тейта [1]; строгие доказательства, основанные на теории Ляпунова, можно найти в книге Четаева [2]. В бесконечномерном случае задаче о нахождении условий на операторные коэффициенты уравнения (1), из которых следует экспоненциальная устойчивость, в литературе уделено много внимания; мы укажем работы [3–10], в которых можно найти дополнительные ссылки.

Далее всюду предполагаем, что A — самосопряженный и равномерно положительный оператор. Обозначим через $\mathcal{H}_\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, шкалу гильбертовых пространств, порожденных оператором A . При $\theta \geq 0$ пространство $\mathcal{H}_\theta$ совпадает с $\mathcal{D}(A^{\theta/2})$ и наделено нормой $\|x\|_\theta := \|A^{\theta/2}x\|$, а при $\theta < 0$ оно определяется как пополнение пространства $\mathcal{H}$ по этой норме. Уравнение (1) можно переписать

*Работа Р. О. Гринива частично поддержана фондом Александра фон Гумбольдта в Германии. Работа А. А. Шкаликова частично поддержана грантом РФФИ №04-01-00712 и грантом Фонда поддержки ведущих научных школ НШ-1927.2003.1.

как систему первого порядка

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{T}^0 \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\mathcal{T}^0$ — оператор в энергетическом пространстве $\mathcal{E} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}$, определяемый равенствами

$$\mathcal{T}^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{T}^0) = \mathcal{H}_2 \times (\mathcal{D}(B) \cap \mathcal{H}_1). \quad (3)$$

Легко видеть, что $\mathbf{x}(t)$ является решением уравнения (2) тогда и только тогда, когда $x_1(t)$ есть решение уравнения (1), а $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$; при этом $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{E}}^2 = 2E(x_1)$.

Имеем $\operatorname{Re}(\mathcal{T}^0 x, x)_{\mathcal{E}} = -\operatorname{Re}(Bx_2, x_2) \leq 0$; поэтому оператор $\mathcal{T}^0$ диссипативен в пространстве $\mathcal{E}$ (здесь и далее мы используем терминологию книги Като [11]), а следовательно, допускает замыкание в этом пространстве. Ниже мы укажем условие, при котором замыкание $\mathcal{T}$ оператора $\mathcal{T}^0$ оказывается максимальным диссипативным оператором. При выполнении этого условия $\mathcal{T}$ является генератором полугруппы сжатий $\mathcal{U}(t) := \exp(t\mathcal{T})$, а решение уравнения (2) определяется равенством $\mathbf{x}(t) = \mathcal{U}(t)\mathbf{x}_0$ при некотором $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}$. Следовательно, $E(x)$ убывает экспоненциально для любого решения $x(t)$ уравнения (1) в том и только том случае, когда полугруппа $\mathcal{U}$ экспоненциально устойчива, т. е. когда тип экспоненциального роста (или убывания)

$$\omega(\mathcal{T}) := \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \ln \|\mathcal{U}(t)\|$$

полугруппы $\mathcal{U}$ отрицателен (см. [12–14]).

В работах [3, 4, 6–8] было доказано, что $\omega(\mathcal{T}) < 0$, если B — симметрический (или секториальный) оператор и в некотором смысле сильнее $A^{1/2}$. Тогда полугруппа $\mathcal{U}$ в действительности оказывается аналитической, и экспоненциальный тип $\omega(\mathcal{T})$ совпадает со спектральной абсциссой

$$s(\mathcal{T}) := \sup\{\operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(\mathcal{T})\},$$

где $\sigma(\mathcal{T})$ обозначает спектр оператора $\mathcal{T}$ (заметим, что всегда $\omega(\mathcal{T}) \geq s(\mathcal{T})$). Равенство $\omega(\mathcal{T}) = s(\mathcal{T})$ остается справедливым, если B симметричен и сравним с A^α при $\alpha \in (0, 1/2)$. Тогда [5] полугруппа $\mathcal{U}$ принадлежит классу Жеврея с показателем $1/(2\alpha)$. Случай, когда B равномерно положителен и A -ограничен в смысле квадратичных форм, изучался в работе [9]; там же была получена точная верхняя граница для $\omega(\mathcal{T})$. В похожей ситуации экспоненциальная устойчивость полугруппы $\mathcal{U}$ изучалась в [10]. Отметим, что методы [9, 10] существенно используют симметричность оператора B .

Если уравнение (1) отвечает задаче механики, в которой учитываются не только силы демпфирования, но и гироскопические силы, то условие положительности оператора B заменяется условием его аккретивности. Цель настоящей статьи — найти минимальные условия на аккретивный оператор B , которые гарантируют экспоненциальную устойчивость полугруппы $\mathcal{U}$, а стало быть, и экспоненциальное убывание энергии решений уравнения (1). Эти условия существенно менее ограничительны по сравнению с предыдущими работами и ожидаемы с механической точки зрения, но доказательство требует серьезной работы. Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть B — секториальный и равномерно аккретивный оператор, причем линейал $\mathcal{D}(B) \cap \mathcal{H}_1$ плотен в $\mathcal{H}_1$. Если B , рассматриваемый как оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$, ограничен, т.е. если найдется постоянная $c > 0$, такая, что

$$|(Bx, x)| \leq c |(A^{1/2}x, A^{1/2}x)| \quad \forall x \in \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{H}_1, \quad (4)$$

то определенный равенством (3) оператор $\mathcal{T}^0$ имеет m -диссипативное замыкание $\mathcal{T}$, а полугруппа $\mathcal{U}(t) = \exp(t\mathcal{T})$ экспоненциально устойчива.

Попутно мы установим критерий максимальной диссипативности замыкания оператора $\mathcal{T}^0$. Отметим, что оценка (4) является не только достаточной, но и необходимой для экспоненциальной устойчивости полугруппы $\mathcal{U}$ (см. лемму 8). Условия секториальности и равномерной аккретивности оператора B необходимыми для экспоненциальной устойчивости не являются, но они «очень близки» к необходимым. В частности, несложно показать, что эти условия необходимы, если B коммутирует с A в том смысле, что B есть функция A . Например, если $B = I + iA$ (нет секториальности) или $B = A^{-1}$ (нет равномерной аккретивности), то экспоненциальной устойчивости не будет.

С различными конкретными задачами из теории упругости и гидродинамики, которые приводят к уравнению (1) с неограниченными операторами A и B , можно познакомиться, например, в статьях [15, 16].

§1. Предварительные сведения

1.1. Во всей работе используются стандартные обозначения: $\mathcal{D}(T)$ — область определения оператора T , действующего в пространстве $\mathcal{H}$, $\sigma(T)$ и $\rho(T)$ — его спектр и резольвентное множество. Числовой образ $\Theta(T)$ определяется как множество в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ равенством

$$\Theta(T) = \{(Tu, u) \mid u \in \mathcal{D}(T), \|u\| = 1\}.$$

Оператор T называется аккретивным (диссипативным), если $\Theta(T)$ принадлежит правой (левой) полуплоскости; T называется секториальным с полуглом $\varphi \in (0, \pi/2)$, если $\Theta(T)$ лежит в секторе $|\arg z| \leq \varphi$, $z \in \mathbb{C}$; T называется равномерно аккретивным, если $T - \delta$ является аккретивным при некотором $\delta > 0$. Аккретивный оператор называется m -аккретивным (максимально аккретивным), если левая полуплоскость принадлежит его резольвентному множеству. Аналогично определяются m -диссипативные и m -секториальные операторы. Известно [11, гл. V, § 3.10], что аккретивный, диссипативный или секториальный оператор является m -аккретивным, m -диссипативным или m -секториальным в том и только том случае, когда он не допускает собственных аккретивных, диссипативных или секториальных расширений соответственно.

Если T — секториальный оператор, то квадратичная форма

$$\mathbf{t}_R[u] = \operatorname{Re}(Tu, u), \quad u \in \mathcal{D}(T),$$

неотрицательна и замыкаема [11, теорема VI.2.9]. Согласно теоремам о представлении [11, теоремы VI.2.1 и VI.2.23], существует неотрицательный самосопряженный оператор T_R (называемый действительной частью оператора T),

такой, что $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T_R^{1/2})$ и $\mathbf{t}_R[u] = (T_R u, u)$ для всех $u \in \mathcal{D}(T_R)$. Если φ — полуугол оператора T , то существует ограниченный самосопряженный оператор S , $\|S\| \leq \operatorname{tg} \varphi$, такой, что

$$T \subset T_R^{1/2}(I + iS)T_R^{1/2},$$

причем $T = T_R^{1/2}(I + iS)T_R^{1/2}$ в том и только том случае, когда T m -диссипативен (см. [11, теорема VI.3.2]).

Определенные выше понятия сохраняют смысл и для операторов, действующих из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. В частности, $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$ называется аккретивным, если $(Tx, x) \geq 0$ для всех $x \in \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H}_1$, а $(\cdot, \cdot)$ — дуальное скалярное произведение в $\mathcal{H}_{-1} \times \mathcal{H}_1$. (Здесь мы используем одно и то же обозначение и для дуального, и для обычного скалярных произведений.) Оператор T m -аккретивен, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- (i) T не имеет собственных аккретивных расширений;
- (ii) при некотором (а тогда при любом) λ из открытой правой полуплоскости $\mathbb{C}^+$ образ $\mathcal{R}(T - \lambda)$ совпадает с $\mathcal{H}_{-1}$;
- (iii) сопряженный оператор $T^*: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$ аккретивен;
- (iv) оператор $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ m -аккретивен в $\mathcal{H}$.

1.2. Экспоненциальная устойчивость. Имеется обширная литература о необходимых и достаточных условиях на операторы в банаховых пространствах для того, чтобы они генерировали равномерно ограниченные или экспоненциально устойчивые полугруппы (см., например, [12–14, 17–24] и имеющиеся там ссылки). Нам будет удобно использовать результат Герхарта [25] для гильбертова пространства. Напомним, что пространство Харди $H^\infty(\alpha)$ в полуплоскости $\Pi^+(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \alpha\}$ состоит из голоморфных и равномерно ограниченных в $\Pi^+(\alpha)$ функций. В частности, резольвента $(T - \lambda)^{-1}$ оператора T в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ принадлежит $H^\infty(\alpha)$ в том и только том случае, когда $\Pi^+(\alpha) \subset \rho(T)$ и значения $\|(T - \lambda)^{-1}\|$ равномерно ограничены в $\Pi^+(\alpha)$.

ТЕОРЕМА ГЕРХАРТА [25]. *Экспоненциальный тип C_0 -полугруппы, генерируемой оператором T в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, определяется равенством*

$$\omega(T) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid (T - \lambda)^{-1} \in H^\infty(\alpha)\}.$$

Из этой теоремы получается такое известное утверждение (см. [14, Theorem V.1.11]).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если T есть m -диссипативный оператор, то генерируемая им полугруппа жсятий является экспоненциально устойчивой тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}^+} \|(T - \lambda)^{-1}\| < \infty. \quad (5)$$

Здесь $\mathbb{C}^+$ — открытая правая полуплоскость.

§2. Оператор $\mathcal{T}^0$ и его свойства

Наша ближайшая цель — описать замыкание $\mathcal{T}$ оператора $\mathcal{T}^0$, определенного равенством (3), и выяснить, когда $\mathcal{T}$ является m -диссипативным. Всюду далее предполагаем, что линейал $\mathcal{D}(B) \cap \mathcal{H}_1$ плотен в $\mathcal{H}_1$.

Заметим, что $\|Ax\|_{-1} = \|x\|_1$ при $x \in \mathcal{H}_2$, согласно определению шкалы пространств $\mathcal{H}_\theta$; следовательно, оператор A продолжается по непрерывности как унитарный оператор $\tilde{A}$ из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Далее, если $\operatorname{Re}(Bx, x) \geq 0$ при $x \in \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{H}_1$, то B замыкаем как оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$, а его замыкание $\tilde{B}$ удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re}(\tilde{B}x, x) \geq 0$ при $x \in \mathcal{D}(\tilde{B}) \subset \mathcal{H}_1$, где $(\cdot, \cdot)$ — дуальное скалярное произведение в $\mathcal{H}_{-1} \times \mathcal{H}_1$ (см. [11, теорема V.3.4]).

ЛЕММА 3. *Если B допускает замыкание $\tilde{B}$ как оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$, то $\mathcal{T}^0$ допускает замыкание $\mathcal{T}$, которое определено равенствами*

$$\mathcal{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\tilde{A}x_1 - \tilde{B}x_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathcal{H}_1, x_2 \in \mathcal{D}(\tilde{B}), \tilde{A}x_1 + \tilde{B}x_2 \in \mathcal{H} \right\}.$$

В частности, если B аккретивен, то $\mathcal{T}_0$ замыкаем, и его замыкание $\mathcal{T}$ — диссипативный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем сначала, что оператор $\mathcal{T}$, определенный равенствами (6), замкнут. Так как $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}^0$, то, тем самым, оператор $\mathcal{T}^0$ допускает замыкание. Обозначим это замыкание через $\tilde{\mathcal{T}}$; тогда равенство $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T}$ будет следовать из включения $\mathcal{T} \subset \tilde{\mathcal{T}}$.

Покажем, что $\mathcal{T}$ замкнут. Пусть $\mathbf{x}^n = (x_1^n, x_2^n)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ и $\mathbf{x}^n \rightarrow \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\mathcal{T}\mathbf{x}^n \rightarrow \mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ в пространстве $\mathcal{E}$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $x_1^n \rightarrow x_1$, $x_2^n \rightarrow x_2 = y_1$ в $\mathcal{H}_1$ и $-\tilde{A}x_1^n - \tilde{B}x_2^n \rightarrow y_2$ в $\mathcal{H}$. Следовательно, $x_1 \in \mathcal{H}_1$, $\tilde{A}x_1^n \rightarrow \tilde{A}x_1$, $-\tilde{B}x_2^n \rightarrow \tilde{A}x_1 + y_2$ в $\mathcal{H}_{-1}$. В силу замкнутости $\tilde{B}$ имеем $x_2 \in \mathcal{D}(\tilde{B})$ и $-\tilde{B}x_2 = \tilde{A}x_1 + y_2$. Таким образом, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ и $\mathcal{T}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, т.е. $\mathcal{T}$ замкнут.

Остается обосновать включение $\mathcal{T} \subset \tilde{\mathcal{T}}$. Для этого зафиксируем произвольный элемент $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ и найдем последовательность элементов $\mathbf{x}^n \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^0)$, такую, что $\mathbf{x}^n \rightarrow \mathbf{x}$, $\mathcal{T}^0\mathbf{x}^n \rightarrow \mathcal{T}\mathbf{x}$ в пространстве $\mathcal{E}$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T = \mathcal{T}\mathbf{x}$. Так как $x_2 \in \mathcal{D}(\tilde{B})$, то существует последовательность элементов $x_2^n \in \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{H}_1$, такая, что $x_2^n \rightarrow x_2$ в $\mathcal{H}_1$ и $Bx_2^n \rightarrow \tilde{B}x_2$ в $\mathcal{H}_{-1}$ при $n \rightarrow \infty$. Положим $x_1^n := -A^{-1}(y_2 + Bx_2^n)$, $\mathbf{x}^n := (x_1^n, x_2^n)^T$ и заметим, что $\mathbf{x}^n \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^0)$. Далее, имеем $x_2^n \rightarrow x_2 = y_1$ в $\mathcal{H}_1$. Так как $Bx_2^n \rightarrow \tilde{B}x_2$ в $\mathcal{H}_{-1}$, то $x_1^n \rightarrow -\tilde{A}^{-1}(y_2 + \tilde{B}x_2) = x_1$ в $\mathcal{H}_1$; следовательно, $\mathbf{x}^n \rightarrow \mathbf{x}$ в пространстве $\mathcal{E}$. Согласно определению, $Ax_1^n + Bx_2^n = -y_2$; поэтому $\mathcal{T}^0\mathbf{x}^n = (x_2^n, y_2)^T \rightarrow \mathbf{y}$ в $\mathcal{E}$. Таким образом, $\mathcal{T} \subset \tilde{\mathcal{T}}$, и лемма доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 4. *Оператор $\mathcal{T}$ m -диссипативен в том и только том случае, когда m -аккретивным является оператор $\tilde{B}$ — замыкание B как оператора из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{B}$ m -аккретивен. Для диссипативного оператора $\mathcal{T}$ образ оператора $\mathcal{T} - \mathcal{I}$ (здесь $\mathcal{I}$ — тождественный оператор в $\mathcal{E}$) является замкнутым; поэтому достаточно доказать, что образ оператора $\mathcal{T} - \mathcal{I}$ плотен в пространстве $\mathcal{E}$.

Предположим, что существует элемент $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T \in \mathcal{E}$, ортогональный образу оператора $\mathcal{T} - \mathcal{J}$. Тогда

$$(\mathcal{T}\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathcal{E}} - (\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathcal{E}} = (x_2, y_1)_1 - (x_1, y_1)_1 - (\tilde{A}x_1 + \tilde{B}x_2, y_2) - (x_2, y_2) = 0$$

для всех $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$. Полагая $x_2 = 0$, получаем, что равенство $(Ax_1, y_1 + y_2) = 0$ выполняется при всех $x_1 \in \mathcal{H}_2$, а потому $y_2 = -y_1$. Теперь, полагая $x_1 = 0$, находим, что

$$(x_2, y_1)_1 + (Bx_2, y_1) + (x_2, y_1) = (\tilde{A}x_2 + Bx_2 + x_2, y_1) = 0 \quad (7)$$

при всех $x_2 \in \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{H}_1$. Это равенство остается справедливым при всех $x_2 \in \mathcal{D}(\tilde{B})$. Действительно, если $x_2 \in \mathcal{D}(\tilde{B})$, то, согласно определению замыкания $\tilde{B}$, найдется последовательность элементов $x_2^n \in \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{H}_1$, такая, что $x_2^n \rightarrow x_2$ в $\mathcal{H}_1$ и $Bx_2^n \rightarrow \tilde{B}x_2$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Заменяя в (7) x_2 на x_2^n , переходя к пределу и учитывая, что $y_1 \in \mathcal{H}_1$, получаем равенство (7) при $x_2 \in \mathcal{D}(\tilde{B})$.

Положим $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B} + \tilde{I}$, где $\tilde{I}$ — оператор естественного вложения пространства $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Так как $\tilde{A} + \tilde{I}$ ограничен, то $\tilde{C}$ — замкнутый оператор с областью определения $\mathcal{D}(\tilde{C}) = \mathcal{D}(\tilde{B})$, причем $\tilde{C}^* = \tilde{A} + \tilde{B}^* + \tilde{I}$. Из равенства (7), которое по непрерывности справедливо при всех $x_2 \in \mathcal{D}(\tilde{B})$, следует, что $y_1 \in \ker \tilde{C}^*$.

Но если $\tilde{B}$ является m -аккретивным, то $\tilde{B}^*$ аккретивен, а потому

$$0 = \operatorname{Re}(\tilde{C}^* y_1, y_1) \geq (\tilde{A} y_1, y_1) + \|y_1\|^2.$$

Следовательно, $y_1 = -y_2 = 0$ и $\mathbf{y} = 0$. Тем самым доказано, что $\mathcal{T}$ является m -диссипативным.

Обратно, если $\mathcal{T}$ m -диссипативен, то уравнение $(\mathcal{T} - \mathcal{J})(x_1, x_2)^T = (y_1, 0)^T$, эквивалентное уравнению $(\tilde{A} + \tilde{B} + \tilde{I})x_2 = \tilde{A}y_1$, разрешимо при всех $y_1 \in \mathcal{H}_1$. Значит, образ оператора $\tilde{A} + \tilde{B} + \tilde{I}$ совпадает с $\mathcal{H}_{-1}$. Если бы оператор $\tilde{B}$ имел нетривиальное аккретивное расширение $\hat{B}$ из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$, то оператор $\hat{C} := \tilde{A} + \hat{B} + \tilde{I}$ обладал бы нетривиальным ядром, что невозможно ввиду соотношения

$$\operatorname{Re}(\hat{C}x, x) \geq (\tilde{A}x, x) + \|x\|^2.$$

Таким образом, $\tilde{B}$ не допускает нетривиальных аккретивных расширений из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$, а потому является m -аккретивным. Теорема доказана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Заметим, что если B — квазиаккретивный оператор, т. е. $\operatorname{Re}(Bx, x) \geq -\alpha(x, x)$ при некотором $\alpha > 0$, то (так же, как при $\alpha = 0$) существует его замыкание $\tilde{B}$ как оператора из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. В этом случае

$$-\operatorname{Re}(\mathcal{T}^0 \mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq -\alpha(x_2, x_2) \geq -\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T, \quad (8)$$

т. е. $\mathcal{T}^0$ квазидиссипативен. Теорему 4 можно переформулировать следующим образом: *если $\alpha > 0$, то оператор $\mathcal{T} - \alpha$ m -диссипативен (и полугруппа $\exp(t\mathcal{T})$ имеет экспоненциальный тип $\leq \alpha$) в том и только том случае, когда $\tilde{B} + \alpha$ m -аккретивен.* При $\alpha < 0$ второе неравенство в (8) не выполняется, и из равномерной аккретивности оператора B не следует равномерной диссипативности оператора $\mathcal{T}$. Это служит объяснением, почему доказательство теоремы 1 не получается на простом пути.

Наш следующий шаг — получение представления для резольвенты оператора $\mathcal{T}$. Положим при $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\tilde{L}(\lambda) = \lambda^2 \tilde{I} + \lambda \tilde{B} + \tilde{A}, \quad \mathcal{D}(\tilde{L}) = \mathcal{D}(\tilde{B}) \subset \mathcal{H}_1,$$

рассматривая $\tilde{L}(\lambda)$ как оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. В общем случае нельзя сказать, что $\tilde{L}(\lambda)$ есть расширение Лаплас-символа $L(\lambda) = \lambda^2 + \lambda B + A$ уравнения (1) как оператора из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$, поскольку может случиться даже, что $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \{0\}$. Множество значений $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, для которых оператор $\tilde{L}(\lambda)$ имеет ограниченный обратный оператор из $\mathcal{H}_{-1}$ в $\mathcal{H}_1$, называется резольвентным множеством пучка $\tilde{L}$, а дополнение к этому множеству в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ — его спектром. Отметим, что в случае $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$ оператор $L(\lambda)$ корректно определен в $\mathcal{H}$ на области $\mathcal{D}(L) = \mathcal{H}_2$. Но спектры пучков L и $\tilde{L}$ могут не совпадать, хотя дискретные части спектров совпадают [26].

Следующая теорема показывает, что спектры оператора $\mathcal{T}$ и пучка $\tilde{L}(\lambda)$ тесно связаны между собой.

ТЕОРЕМА 6. Пусть B замыкаем как оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$, и пусть $\tilde{B}$ обозначает это замыкание. Тогда ненулевой спектр оператора $\mathcal{T}$ совпадает со спектром $\sigma(\tilde{L})$ пучка $\tilde{L}$, причем для всех ненулевых $\lambda \notin \sigma(\tilde{L})$ справедливо представление

$$(\mathcal{T} - \lambda \mathcal{I})^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1}(\tilde{L}^{-1}(\lambda)\tilde{A} - I) & -\tilde{L}^{-1}(\lambda) \\ \tilde{L}^{-1}(\lambda)\tilde{A} & -\lambda\tilde{L}^{-1}(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 \neq \lambda \in \rho(\mathcal{T})$; тогда при любом $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T \in \mathcal{E}$ существует единственный элемент $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$, такой, что $(\mathcal{T} - \lambda \mathcal{I})\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Записывая это уравнение по координатам, получаем систему

$$\begin{aligned} x_2 - \lambda x_1 &= y_1, \\ -\tilde{A}x_1 - \tilde{B}x_2 - \lambda x_2 &= y_2. \end{aligned}$$

Подставив $x_1 = \lambda^{-1}(x_2 - y_1)$ во второе уравнение, получим $\tilde{L}(\lambda)x_2 = -\lambda y_2 + \tilde{A}y_1$. Если $y_2 = 0$, а y_1 пробегает все пространство $\mathcal{H}_1$, то $\tilde{L}(\lambda)x_2$ пробегает $\mathcal{H}_{-1}$. Следовательно, образ оператора $\tilde{L}(\lambda)$ совпадает с $\mathcal{H}_{-1}$. Если x_2 принадлежит ядру оператора $\tilde{L}(\lambda)$, то $\mathbf{x} = (\lambda^{-1}x_2, x_2)^T$ принадлежит ядру оператора $\mathcal{T} - \lambda \mathcal{I}$. Поэтому ядро оператора $\tilde{L}(\lambda)$ тривиально и $\tilde{L}(\lambda)$, будучи замкнутым оператором, является ограничено обратимым. Представление (9) получается теперь из выписанной системы прямым вычислением.

Обратно, пусть $0 \neq \lambda \in \rho(\tilde{L})$. Обозначим через $\mathcal{B}_\lambda$ оператор, определенный в правой части формулы (9). Фиксируем произвольный элемент $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T \in \mathcal{E}$ и положим $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T := \mathcal{B}_\lambda \mathbf{y}$. Так как оператор $\tilde{L}^{-1}(\lambda)$ переводит $\mathcal{H}_{-1}$ в $\mathcal{D}(\tilde{B}) \subset \mathcal{H}_1$, то $x_1 \in \mathcal{H}_1$, $x_2 \in \mathcal{D}(\tilde{B})$ и $x_2 - \lambda x_1 = y_1$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \tilde{A}x_1 + \tilde{B}x_2 + \lambda x_2 &= [\lambda^{-1}\tilde{A}(\tilde{L}^{-1}(\lambda)\tilde{A} - \tilde{I}) + \tilde{B}\tilde{L}^{-1}(\lambda)\tilde{A} + \lambda\tilde{L}^{-1}(\lambda)\tilde{A}]y_1 \\ &\quad - [\tilde{A}\tilde{L}^{-1}(\lambda) + \lambda\tilde{B}\tilde{L}^{-1}(\lambda) + \lambda^2\tilde{L}^{-1}(\lambda)]y_2 = -y_2. \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует равенство $(\mathcal{T} - \lambda \mathcal{J})\mathcal{B}_\lambda = \mathcal{J}$. Равенство $\mathcal{B}_\lambda(\mathcal{T} - \lambda \mathcal{J}) = \mathcal{J}$ проверяется аналогично; поэтому $\mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{T} - \lambda \mathcal{J})^{-1}$. Теорема доказана. $\square$

Из теорем 4 и 6 получаем

СЛЕДСТВИЕ 7. Если $\tilde{B}$ m -аккретивен, то открытая правая полуплоскость $\mathbb{C}^+$ принадлежит резольвентному множеству пучка $\tilde{L}(\lambda)$.

Конечно, этот результат проще получить независимо, исходя из неравенств

$$\begin{aligned} \|\tilde{L}(\lambda)x\|_{-1} &\geq \frac{|\lambda|}{\|x\|_1} \operatorname{Re}(\lambda^{-1}\tilde{L}(\lambda)x, x) \geq |\lambda|^{-1}(\operatorname{Re} \lambda)\|x\|_1, \\ \|\tilde{L}^*(\lambda)x\|_{-1} &\geq |\lambda|^{-1}(\operatorname{Re} \lambda)\|x\|_1, \end{aligned}$$

которые справедливы при $\lambda \in \mathbb{C}^+$.

Теперь выясним, когда нуль принадлежит спектру оператора $\mathcal{T}$.

ЛЕММА 8. Предположим, что оператор B допускает замыкание $\tilde{B}$ как оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Тогда точка $\lambda = 0$ принадлежит резольвентному множеству оператора $\mathcal{T}$ в том и только том случае, когда оператор $\tilde{B}: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$ ограничен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что оператор $\mathcal{T}$ ограниченно обратим. Тогда его образ совпадает с пространством $\mathcal{E}$. Из уравнения

$$\mathcal{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

следует равенство $x_2 = y_1$. Поэтому из разрешимости уравнения (10) при всех $y \in \mathcal{E}$ (в частности, при всех $y_1 \in \mathcal{H}_1$) вытекает $\mathcal{D}(\tilde{B}) \supset \mathcal{H}_1$. Но $\tilde{B}$ замкнут; поэтому в силу теоремы о замкнутом графике $\tilde{B}$ ограничен.

Обратно, из ограниченности оператора $\tilde{B}$ следует существование единственного решения уравнения (10): $x_2 = y_1 \in \mathcal{H}_1 = \mathcal{D}(\tilde{B})$, $x_1 = A^{-1}(y_2 - \tilde{B}x_2) \in \mathcal{H}_1$. Лемма доказана. $\square$

§3. Доказательство основной теоремы

Базой для доказательства теоремы 1 служит следующий результат.

ЛЕММА 9. Пусть B — аккретивный оператор, и пусть выполнена оценка (4). Тогда оператор $\mathcal{T}$ генерирует экспоненциально устойчивую полугруппу в том и только том случае, когда четыре оператор-функции

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) &:= \lambda^{-1}A^{1/2}\tilde{L}^{-1/2}(\lambda)\tilde{A}^{1/2}, & F_2(\lambda) &:= A^{1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda), \\ F_3(\lambda) &:= \tilde{L}^{-1}(\lambda)\tilde{A}^{1/2}, & F_4(\lambda) &:= \lambda\tilde{L}^{-1}(\lambda) \end{aligned}$$

равномерно ограничены в открытой правой полуплоскости $\mathbb{C}^+$ в равномерной операторной топологии пространства $\mathcal{H}$. Здесь $\tilde{A}^{1/2} = \tilde{A}A^{-1/2}$ — расширение оператора $A^{1/2}$ как оператора из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении оценки (4) оператор $\tilde{B}$ ограничен. Поэтому $\tilde{B}$ является m -аккретивным, если B аккретивен. Согласно следствию 7, все четыре функции корректно определены при $\lambda \in \mathbb{C}^+$. В силу теоремы 6

ограниченность оператора $(\mathcal{T} - \lambda \mathcal{J})^{-1}$ при $\lambda \neq 0$ в пространстве $\mathcal{E}$ эквивалентна ограниченности четырех операторов $F_j(\lambda)$ в пространстве $\mathcal{H}$. Принадлежность точки $\lambda = 0$ резольвентному множеству оператора $\mathcal{T}$ гарантируется леммой 8. Поэтому из равномерной ограниченности указанных функций в $\mathbb{C}^+$ следует равномерная ограниченность оператора $(\mathcal{T} - \lambda \mathcal{J})^{-1}$ в $\mathbb{C}^+$. Остается воспользоваться следствием 2. $\square$

Оценка функции $F_4(\lambda)$ получается относительно просто (это будет сделано в следующей лемме); основная трудность заключается в оценке первых трех функций. Решающую роль сыграет следующее равенство, в справедливости которого легко убедиться непосредственной проверкой:

$$\tilde{L}^{-1}(\lambda) - \tilde{L}_0^{-1}(\lambda) = \lambda \tilde{L}_0^{-1}(\lambda) \tilde{A}^{1/2} \tilde{L}^{-1}(\lambda) - \lambda \tilde{L}_0^{-1}(\lambda) \tilde{B} \tilde{L}^{-1}(\lambda). \quad (11)$$

Здесь

$$L_0(\lambda) := \lambda^2 I + \lambda A^{1/2} + A, \quad (12)$$

и $\tilde{L}_0(\lambda)$ — расширение $L_0(\lambda)$ как оператора из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$.

ЛЕММА 10. Пусть оператор B является секториальным и равномерно аккретивным, а $\tilde{B}$ ограничен. Обозначим через B_R действительную часть оператора B , а через $\beta > 0$ нижнюю грань значений квадратичной формы $(B_R x, x)$ на единичной сфере. Тогда справедливы оценки

- (a) $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}^+} \|\lambda \tilde{L}^{-1}(\lambda)\| \leq 1/\beta$,
- (b) $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}^+} \|\lambda B_R^{1/2} \tilde{L}^{-1}(\lambda)\| \leq 1/\sqrt{\beta}$,
- (c) $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}^+} \|\lambda B_R^{1/2} \tilde{L}^{-1}(\lambda) B_R^{1/2}\| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольный элемент $y \in \mathcal{H}$. Если $\lambda \in \mathbb{C}^+$, то уравнение $\tilde{L}(\lambda)x = y$ разрешимо при любом $y \in \mathcal{H}_{-1}$, тем более при $y \in \mathcal{H}$. Справедливы оценки

$$|(\lambda^{-1} \tilde{L}(\lambda)x, x)| \geq |\operatorname{Re}(\lambda^{-1} \tilde{L}(\lambda)x, x)| \geq \operatorname{Re}(\tilde{B}x, x) \geq \beta \|x\|^2. \quad (13)$$

Следовательно, $\|\tilde{L}(\lambda)x\| \geq \beta |\lambda| \|x\|$; поэтому $\|\lambda \tilde{L}^{-1}(\lambda)y\| \leq 1/\beta \|y\|$, т.е. справедлива оценка (a).

Согласно определению оператора B_R , имеем $\|B_R^{1/2}x\|^2 = \operatorname{Re}(Bx, x)$ при $x \in \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{H}_1$. Поскольку замыкание $\tilde{B}$ — ограниченный оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$, а $\mathcal{D}(B) \cap \mathcal{H}_1$ плотно в $\mathcal{H}_1$, по непрерывности имеем

$$\|B_R^{1/2}x\|^2 = \operatorname{Re}(\tilde{B}x, x) \quad \forall x \in \mathcal{H}_1.$$

Пользуясь неравенством (13) и доказанным неравенством (a) при $y \in \mathcal{H}$ и $\lambda \in \mathbb{C}^+$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\|y\|^2}{\beta} &\geq \|y\| \|\lambda \tilde{L}^{-1}(\lambda)y\| \geq |\lambda| (y, \tilde{L}^{-1}(\lambda)y) = |\lambda| (\tilde{L}(\lambda) \tilde{L}^{-1}(\lambda)y, \tilde{L}^{-1}(\lambda)y) \\ &\geq |\lambda|^2 \operatorname{Re}(\tilde{B} \tilde{L}^{-1}(\lambda)y, \tilde{L}^{-1}(\lambda)y) = |\lambda|^2 \|B_R^{1/2} \tilde{L}^{-1}(\lambda)y\|^2, \end{aligned}$$

т.е. справедлива оценка (b).

Множество элементов $y = B_R^{1/2}x$ плотно в $\mathcal{H}$, когда x пробегает $\mathcal{H}_1$. Воспользовавшись оценкой

$$|(\lambda^{-1}\tilde{L}(\lambda)x, x)| \geq \operatorname{Re}(\tilde{B}x, x) = \|B_R^{1/2}x\|^2,$$

получим

$$\|y\|^2 \leq |\lambda|^{-1} |(B_R^{-1/2}\tilde{L}(\lambda)B_R^{-1/2}y, y)| \leq |\lambda|^{-1} \|B_R^{-1/2}\tilde{L}(\lambda)B_R^{-1/2}y\| \|y\|,$$

откуда следует оценка (с). Лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 11. *Функции $F_2(\lambda)$ и $F_3(\lambda)$ равномерно ограничены в $\mathbb{C}^+$ в равномерной операторной топологии пространства $\mathcal{H}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L_0(\lambda)$ определен формулой (12), и пусть $\tilde{L}_0(\lambda)$ — его расширение как оператора из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Элементарной проверкой (см. [4]) устанавливается, что оператор-функции

$$\begin{aligned} G_1(\lambda) &= A^{1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)\tilde{A}^{1/2}, & G_2(\lambda) &= \lambda A^{1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda), \\ G_3(\lambda) &= \lambda\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)\tilde{A}^{1/2}, & G_4(\lambda) &= \lambda^2\tilde{L}_0^{-1}(\lambda) \end{aligned}$$

равномерно ограничены в замкнутой правой полуплоскости. (В частности, $\|(\mathcal{T}_0 - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{E}} \leq \operatorname{const} |(1 + \lambda)^{-1}|$ при $\lambda \in \mathbb{C}^+$, где через $\mathcal{T}_0$ обозначен оператор $\mathcal{T}$, в котором $B = A^{1/2}$; поэтому $\mathcal{T}_0$ генерирует аналитическую полугруппу сжатий.)

Умножив равенство (11) слева на $A^{1/2}$, получим

$$A^{1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda) = A^{1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda) + A^{1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)\tilde{A}^{1/2}\lambda\tilde{L}^{-1}(\lambda) - A^{1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)\tilde{B}\lambda\tilde{L}^{-1}(\lambda).$$

Первые два слагаемых равномерно ограничены в $\mathbb{C}^+$, поскольку функции $F_4(\lambda)$, $G_1(\lambda)$ и $G_2(\lambda)$ равномерно ограничены. Третье слагаемое перепишем в виде

$$[A^{1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)A^{1/2}][A^{-1/2}B_R^{1/2}][B_R^{-1/2}\tilde{B}B_R^{-1/2}][\lambda B_R^{1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)].$$

Все сомножители в этом произведении являются ограниченными функциями в $\mathbb{C}^+$. Действительно, первый сомножитель совпадает с $G_1(\lambda)$, а ограниченность четвертого доказана в лемме 10. Так как B — секториальный оператор, то, согласно второй теореме о представлении, $B \subset B_R^{1/2}(I + iS)B_R^{1/2}$, где $\|S\| \leq \operatorname{tg} \varphi$, а потому третий сомножитель ограничен в $\mathcal{H}$. Из оценки (4) имеем при $x \in \mathcal{H}_1$

$$\|B_R^{1/2}x\|^2 = \operatorname{Re}(\tilde{B}x, x) \leq \operatorname{const} \|A^{1/2}x\|^2,$$

откуда следует, что оператор $B_R^{1/2}A^{-1/2}$ ограничен. Но тогда ограничен оператор $A^{-1/2}B_R^{1/2} \subset (B_R^{1/2}A^{-1/2})^*$. Тем самым доказана ограниченность функции $F_2(\lambda)$.

Заметим, что $(\tilde{B})^*$ совпадает с расширением B^* как оператора из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Поэтому, повторяя рассуждения леммы 10, получим равномерную ограниченность функции $A^{1/2}(\tilde{L}^*(\bar{\lambda}))^{-1}$, где $\tilde{L}^*(\lambda) = \lambda^2 + \lambda\tilde{B}^* + A$. Но тогда функция $F_3(\lambda)$ также равномерно ограничена в $\mathbb{C}^+$. Лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 12. *Функция $F_1(\lambda)$ равномерно ограничена в $\mathbb{C}^+$ в норме пространства $\mathcal{H}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим равенство (11) на $A^{1/2}$ слева и на $B_R^{1/2}$ справа. Получим

$$A^{1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)B_R^{1/2} = A^{1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)B_R^{1/2} + A^{1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)\tilde{A}^{1/2}\lambda\tilde{L}^{-1}(\lambda)B_R^{1/2} + A^{1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)\tilde{B}\lambda\tilde{L}^{-1}(\lambda)B_R^{1/2}.$$

Все три слагаемых в правой части являются равномерно ограниченными операторами в $\mathbb{C}^+$. Действительно, $A^{1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)B_R^{1/2} = G_1(\lambda)(A^{-1/2}B_R^{1/2})$; поэтому равномерная ограниченность первого слагаемого следует из ограниченности оператора $A^{-1/2}B_R^{1/2}$ и равномерной ограниченности оператор-функции $G_1(\lambda)$. Далее, второе слагаемое равно $G_1(\lambda)F_2^*(\bar{\lambda})$, а потому также равномерно ограничено в $\mathbb{C}^+$. Наконец, третье слагаемое можно переписать в виде

$$[A^{1/2}\tilde{L}_0^{-1}(\lambda)A^{1/2}][A^{-1/2}B_R^{1/2}][B_R^{-1/2}\tilde{B}B_R^{-1/2}][\lambda B_R^{1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)B_R^{1/2}].$$

Ранее было показано, что первые три сомножителя в этом произведении равномерно ограничены, а четвертый сомножитель обладает тем же свойством в силу леммы 10. Следовательно, функция $A^{1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)B_R^{1/2}$, а потому и $B_R^{1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)A^{1/2}$ равномерно ограничены в $\mathbb{C}^+$.

Умножив равенство (11) на $A^{1/2}$ с обеих сторон и воспользовавшись теми же аргументами, что и ранее, получим, что функция $\lambda^{-1}A^{1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)\tilde{A}^{1/2}$ также равномерно ограничена в $\mathbb{C}^+$. Лемма доказана. $\square$

Утверждение теоремы 1 теперь следует из лемм 9–12.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thompson W. (Lord Kelvin), Tait P.* Treatise on Natural Philosophy, Part 1. Cambridge University Press, 1869.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Наука, М., 1990.
3. *Chen G., Russel D. L.* A mathematical model for linear elastic systems with structural damping. Quart. Appl. Math., **39**, 433–454 (1982).
4. *Chen S., Triggiani R.* Proof of extensions of two conjectures on structural damping for elastic systems. Pacific J. Math., **136**, No. 1, 15–55 (1989).
5. *Chen S., Triggiani R.* Gevrey class semigroups arising from elastic systems with gentle dissipation: the case $0 < \alpha < 1/2$. Proc. Amer. Math. Soc., **110**, No. 2, 401–415 (1990).
6. *Huang F.* On the mathematical model for linear elastic systems with analytic damping. SIAM J. Control Optim., **26**, No. 3, 714–724 (1988).
7. *Huang F.* Some problems for linear elastic systems with damping. Acta Math. Sci., **10**, No. 3, 316–326 (1990).
8. *Гринив Р. О., Шкаликов А. А.* Операторные модели в теории упругости и гидромеханике и ассоциированные с ними аналитические полугруппы. Вестник МГУ, сер. матем., мех., №5, 5–14 (1999).
9. *Гринив Р. О., Шкаликов А. А.* Экспоненциальная устойчивость полугрупп, связанных с некоторыми операторными моделями в механике. Матем. заметки, **73**, №5, 657–664 (2003).
10. *Veselić K.* Energy decay of damped systems. Представлена в Z. Angew. Math. Mech.
11. *Kato T.* Теория возмущений линейных операторов. Мир, М., 1972.
12. *Любич Ю. И.* Классическое и локальное преобразование Лапласа в абстрактной задаче Коши. УМН, **21(129)**, №3, 3–51 (1966).

13. *Pazy A.* Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1983.
14. *Engel K. J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 2000.
15. *Paidoussis M. P., Issid N. T.* Dynamic stability of pipes conveying fluid. J. Sound Vibration, **33**, 267–294 (1974).
16. *Зефирова В. Н., Колесов В. В., Милославский А. И.* Исследование собственных частот прямолинейного трубопровода. Изв. АН СССР, серия мех. тв. тела, №1, 179–188 (1985).
17. *Datko R.* Extending a theorem of A. M. Liapunov to Hilbert space. J. Math. Anal. Appl., **32**, 610–616 (1970).
18. *van Casteren J. A.* Operators similar to unitary or selfadjoint ones. Pacific J. Math., **104**, No. 1, 241–255 (1983).
19. *Набоко С. Н.* Об условиях подобия унитарным и самосопряженным операторам. Функц. анализ и его прил., **18**, вып. 1, 16–27 (1984).
20. *Маламуд М. М.* Критерий подобия замкнутого оператора самосопряженному. Укр. матем. ж., **37**, №1, 49–56 (1985).
21. *Rolewicz S.* On uniform N -equistability. J. Math. Anal. Appl., **115**, 431–441 (1986).
22. *Littman W.* A generalization of a theorem of Datko and Pazy. In: Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Vol. 130, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1989, pp. 318–323.
23. *Гомилко А. М.* Об условиях на производящий оператор равномерно ограниченной C_0 -полугруппы операторов. Функц. анализ и его прил., **33**, вып. 4, 66–69 (1999).
24. *Маламуд М. М.* О подобии треугольного оператора диагональному. Зап. научн. семин. ПОМИ, **270**, 201–241 (2000).
25. *Gearhart L.* Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces. Trans. Amer. Math. Soc., **236**, 385–394 (1978).
26. *Shkalikov A. A.* Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula. In: Operator Theory: Adv. and Appl., Vol. 87, Birkhäuser, 1996, pp. 358–385.

Институт прикладных проблем механики и математики,
Львов, Украина
email: rhrniv@iapmm.lviv.ua

Поступило в редакцию
10 марта 2004 г.

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
email: ashkalikov@yahoo.com