Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жиков, Замечания о единственности решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с младшими членами, *Функци. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 3, 15–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 18:27:44

УДК 517.97

Замечания о единственности решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с младшими членами*

© 2004. В. В. Жиков

*Глубокоуважаемому Виктору Борисовичу Лидскому
в связи с его юбилеем*

§1. Введение

1.1. Рассмотрим задачу Дирихле для стационарного уравнения диффузии в несжимаемом потоке

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad -\operatorname{div}(\nabla u + au) = f \in H^{-1}(\Omega). \quad (1.1)$$

Здесь Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^d$, a — соленоидальное векторное поле, т. е.

$$a \in L^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} a \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

$H_0^1(\Omega)$ — соболевское пространство, определяемое как замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx)^{1/2}$, $H^{-1}(\Omega)$ — сопряженное к нему пространство, а решение понимается в смысле выполнения интегрального тождества

$$\int_{\Omega} (\nabla u + au) \cdot \nabla \varphi \, dx = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.2)$$

Ниже мы не различаем скалярные и векторные пространства Лебега L^p .

Будем временно считать, что $a \in L^\infty(\Omega)$. В этом случае очевидно, что билинейная форма

$$\int_{\Omega} au \cdot \nabla \varphi \, dx \quad (1.3)$$

ограничена на $H_0^1(\Omega)$, так как

$$\left| \int_{\Omega} au \cdot \nabla \varphi \, dx \right|^2 \leq c \int_{\Omega} u^2 \, dx \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx \leq c_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx$$

по неравенству Фридрихса. Кроме того, эта форма кососимметрична, поскольку для $u, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} au \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} a \cdot \nabla(u\varphi) \, dx - \int_{\Omega} a\varphi \cdot \nabla u \, dx = - \int_{\Omega} a\varphi \cdot \nabla u \, dx$$

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №02-01-00114.

в силу соленоидальности вектора a , а для $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$ достаточно ссылки на непрерывность формы. По лемме Лакса–Мильграма решение задачи Дирихле (1.1) существует и единственно. Полагая в интегральном тождестве (1.2) $\varphi = u$ и учитывая, что $\int_{\Omega} au \cdot \nabla u \, dx = 0$, получим энергетическое равенство

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dx = (f, u) \quad (1.4)$$

и энергетическую оценку $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$, в которых сам вектор a не участвует.

Имеется еще одна оценка, в которой не участвует вектор a , а именно оценка по принципу максимума: если $f \in L^\infty(\Omega)$, то

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_0 \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (1.5)$$

где константа c_0 зависит только от Ω и d .

Указанные оценки наводят на мысль рассмотреть произвольное соленоидальное поле $a \in L^1(\Omega)$, когда билинейная форма (1.3) уже не является ограниченной, и получить решение уравнения (1.1) как предел решений u_N уравнений (1.1) с векторами a_N вместо a , $a_N \in L^\infty(\Omega)$, $a_N \rightarrow a$ при $N \rightarrow \infty$. Действительно, на этом пути существование решения получается без всякого труда, но вопрос о единственности оказывается далеко не простым.

1.2. Перейдем к более подробному рассмотрению теоремы существования.

Функция $u \in H_0^1(\Omega)$ есть решение задачи (1.1), если выполнено интегральное тождество (1.2). Это определение имеет смысл, если $au \in L^1(\Omega)$ для любого $u \in H_0^1(\Omega)$, что накладывает некоторые ограничения на векторное поле a . По теореме вложения Соболева $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, где $q = 2d/(d-2)$, $d > 2$. Поэтому для a должно выполняться условие $a \in L^{2d/(d+2)}(\Omega)$, которое обеспечивает непрерывность формы (1.3) по $u \in H_0^1(\Omega)$ при фиксированном $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. В случае $d = 2$ требование $au \in L^1(\Omega)$ выполнено, если $a \in L^p(\Omega)$ при некотором $p > 1$. Итак, предполагается, что

$$a \in L^p(\Omega), \quad p = \frac{2d}{d+2} \quad \text{при } d > 2, \quad p = 1 + \delta, \delta > 0, \quad \text{при } d = 2. \quad (1.6)$$

Это условие на векторное поле a гарантирует и существование решения. В самом деле, рассмотрим аппроксимацию

$$a_N \in L^\infty(\Omega), \quad \operatorname{div} a_N = 0, \quad a_N \rightarrow a \quad \text{в } L^p,$$

и пусть u_N — решение соответствующего уравнения:

$$u_N \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} [\nabla u_N + a_N u_N] \cdot \nabla \varphi = (f, \varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1.7)$$

$$\int_{\Omega} \nabla u_N \cdot \nabla u_N \, dx = (f, u_N). \quad (1.8)$$

Последовательность u_N ограничена в $H_0^1(\Omega)$, и можно считать, что она слабо сходится, $u_N \rightharpoonup u$ в $H_0^1(\Omega)$. Так как $u_N \rightharpoonup u$ в $L^q(\Omega)$, а $a_N \cdot \nabla \varphi \rightarrow a \cdot \nabla \varphi$ в $L^p(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, то предельный переход в (1.7) дает искомое тождество (1.2), а из (1.8) и слабой сходимости $\nabla u_N \rightharpoonup \nabla u$ в $L^2(\Omega)$ следует неравенство

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dx \leq (f, u). \quad (1.9)$$

Мы видим, что процедура аппроксимации всякий раз приводит к некоторому решению исходного уравнения (1.1). Такие решения будем называть *аппроксимационными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Элемент $v \in H_0^1(\Omega)$ принадлежит множеству D , если

$$\left| \int_{\Omega} av \cdot \nabla \varphi \, dx \right|^2 \leq c(v) \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.10)$$

Положим

$$[v, \varphi] = \int_{\Omega} av \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad v \in D, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

а для $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ определим $[v, \varphi]$ по непрерывности:

$$[v, \varphi] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [v, \varphi_\varepsilon], \quad \text{где } \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega), \quad \varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi \text{ в } H_0^1(\Omega).$$

В частности, для $v \in D$ величина $[v, v]$ конечна, хотя «подынтегральная» функция $av \cdot \nabla v$, вообще говоря, не суммируема.

Из тождества (1.2) видно, что любое решение уравнения (1.1) принадлежит множеству D , а само тождество принимает вид

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + [u, \varphi] = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.11)$$

Для любого аппроксимационного решения выполняется неравенство $[u, u] \geq 0$, что очевидно в силу (1.9), (1.11).

Если $f \in L^\infty(\Omega)$, то аппроксимационное решение ограничено, $u \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (оценка (1.5)), а для существования этого решения достаточно минимального требования $a \in L^1(\Omega)$. Действительно, помимо того, что $a_N \rightarrow a$ в $L^1(\Omega)$, можно считать, что $u_N(x) \rightarrow u(x)$, $a_N(x) \rightarrow a(x)$ п. в. на Ω . Так как последовательность $a_N u_N \cdot \nabla \varphi$ равностепенно интегрируема, то по теореме Лебега она сходится к $au \cdot \nabla \varphi$ в $L^1(\Omega)$, что и дает интегральное тождество (1.2).

Напомним саму теорему Лебега: *если последовательность $w_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ равностепенно интегрируема и $w_\varepsilon(x) \rightarrow w_0(x)$ п. в. на Ω , то $w_\varepsilon \rightarrow w_0$ в $L^1(\Omega)$.*

1.3. Аналогично изучается более общее уравнение диффузии

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad -\operatorname{div}(\nabla u + A \nabla u) = f, \quad (1.12)$$

в котором матрица A измерима и кососимметрична, $A_{ij} = -A_{ji}$.

Функция $u \in H_0^1(\Omega)$ есть решение этого уравнения, если

$$\int_{\Omega} (\nabla u + A \nabla u) \cdot \nabla \varphi \, dx = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.13)$$

Данное определение имеет смысл, если $A \in L^2(\Omega)$. Это минимальное условие обеспечивает и существование решения. Действительно, пусть A_N кососимметричны, $A_N \in L^\infty(\Omega)$, $A_N \rightarrow A$ в $L^2(\Omega)$. Для уравнения (1.12) с A_N решение u_N существует, и, благодаря кососимметричности A_N , выполнено энергетическое равенство (1.8). Последовательность u_N ограничена в $H_0^1(\Omega)$, и предельный переход дает тождество (1.13) и неравенство (1.9).

Элементы множества D — это те элементы $u \in H_0^1(\Omega)$, для которых выполнена оценка

$$[u, \varphi] = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \leq c(u) \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.14)$$

Справедливо тождество (1.11), которое вместе с (1.9) приводит к неравенству $[u, u] \geq 0$ для любых аппроксимационных решений.

Оценка (1.5) более известна как раз для уравнения (1.12), но любое из известных ее доказательств годится и для уравнения (1.1) (см. [1, 2]).

Уравнение (1.1) сводится к уравнению (1.12), если область Ω гомеоморфна шару. Чтобы это установить, достаточно представить вектор a в виде дивергенции от кососимметрической матрицы, $a = \operatorname{div} A$, $a_j = \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij}$, а это по определению означает, что

$$A \in L^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} a_j \psi_j \, dx = - \int_{\Omega} A_{ij} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \, dx \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega)^d.$$

Например, если $a \in L^{2d/(d+2)}(\Omega)$ (см. условие (1.6)), то такое представление возможно с $A \in L^2(\Omega)$.

Об уравнении (1.12) говорят, что оно описывает диффузию в «турбулентном потоке», поскольку в этом случае скорость a самого потока существует только в смысле распределений, $a = \operatorname{div} A$. В приложениях матрица A («матрица тока») лишь измерима и принадлежит L^2 (а не L^∞). Вопрос о единственности поднят в работах [3, 4] в связи с теорией усреднения.

1.4. В настоящей работе указан пример, в котором условие (1.6) на векторное поле a выполнено, но уравнение (1.1) помимо аппроксимационного решения имеет и другое решение, которое не может быть получено никакой аппроксимацией. Пример неединственности строится в любой размерности $d \geq 3$. В то же время не удалось построить такой пример неединственности, чтобы дополнительно наблюдалась единственность аппроксимационного решения.

Под единственностью аппроксимационного решения понимается следующее: для любой подходящей аппроксимации вектора a (или матрицы A) соответствующая последовательность решений u_N имеет предел (слабый в $H_0^1(\Omega)$), и этот предел не зависит от способа аппроксимации. При этом нужно оговаривать, о какой правой части f в (1.1) (или (1.12)) идет речь, поскольку из единственности для одной правой части, вообще говоря, не следует единственность для другой.

Пример неединственности аппроксимационного решения не известен.

Достаточных условий единственности известно немного.

ТЕОРЕМА 1.2. Если $a \in L^2(\Omega)$, то уравнение (1.1) имеет единственное решение и выполнено энергетическое равенство.

(Здесь и далее под энергетическим равенством мы понимаем равенство (1.4).)

Условие $a \in L^2(\Omega)$ не удастся ослабить даже в модельном примере, когда вектор a является гладким вне одной особой точки. Это обстоятельство тем более любопытно, что доказывается теорема 1.2 довольно просто.

Для уравнения (1.12) отправным пунктом служит тривиальное условие существования и единственности: $A \in L^\infty(\Omega)$. Его удастся ослабить, заменив пространство $L^\infty(\Omega)$ на более широкое пространство функций с ограниченным

средним колебанием (ВМО). Тогда аппроксимационное решение единственно для любого $f \in H^{-1}(\Omega)$ и для него выполнено энергетическое равенство. Основную роль при этом играет (доказанное в §3) свойство повышенной суммируемости градиента решения, где как раз и важно, что матрица A берется из ВМО.

Пространство $L^\infty(\Omega)$ можно расширить еще и другим способом.

ТЕОРЕМА 1.3. *Если матрица A удовлетворяет условию*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p^{-1} \|A\|_{L^p(\Omega)} = 0, \quad (1.15)$$

то уравнение (1.12) имеет единственное решение.

Например, коэффициенты матрицы A могут иметь структуру $\ln \ln |x|$.

Было бы интересно и теорему 1.2 усилить в аналогичном духе.

ТЕОРЕМА 1.4. *Если вектор a удовлетворяет условию $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \|a\|_{L^{2-\varepsilon}(\Omega)} = 0$, то аппроксимационное решение уравнения (1.1) единственно для любого $f \in H^{-1}(\Omega)$.*

При этом вопрос о единственности просто решений остался открытым.

1.5. В дальнейшем используются простые признаки единственности.

ЛЕММА 1.5. *Если однородное уравнение не имеет ненулевых ограниченных решений, то аппроксимационное решение единственно при любом $f \in H^{-1}(\Omega)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $T_N f = u_N$. По энергетической оценке операторы $T_N: H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ равномерно ограничены, $\|T_N\| \leq 1$. Если $f \in L^\infty(\Omega)$, то слабые H_0^1 -предельные точки последовательности $u_N = T_N f$ принадлежат $L^\infty(\Omega)$ (оценка (1.5)). Поскольку разность таких предельных точек есть решение однородного уравнения, в действительности слабый предел $T_N f \rightharpoonup u = T f$ существует и не зависит от выбора аппроксимации. Но в таком случае этот предел существует и для любого $f \in H^{-1}(\Omega)$, так как $L^\infty(\Omega)$ плотно в $H^{-1}(\Omega)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.6. *Если*

$$[u, u] = 0 \quad \forall u \in D, \quad (1.16)$$

то решение единственно и для него выполнено энергетическое равенство. Если

$$[u, u] = 0 \quad \forall u \in L^\infty(\Omega) \cap D, \quad (1.17)$$

то при любом $f \in H^{-1}(\Omega)$ аппроксимационное решение единственно и для него выполнено энергетическое равенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае (1.16) энергетическое равенство следует из тождества (1.11). Кроме того, однородное уравнение имеет только нулевое решение, так как для этого решения

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dx = -[u, u] = 0.$$

В случае условия (1.17) те же аргументы применимы для ограниченных решений и достаточно ссылки на лемму 1.5. Лемма доказана.

Нельзя не отметить очевидного сходства проблемы единственности аппроксимационного решения с известной проблемой Н. В. Крылова для недивергентно-

го эллиптического уравнения с измеримыми коэффициентами. Решение задачи Дирихле

$$a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

он определил как подходящий предел классических решений u_N , отвечающих уравнению с гладкими коэффициентами $a_N^{ij} \rightarrow a^{ij}$, и поставил вопрос о единственности такого «аппроксимационного» решения. Было получено много достаточных условий единственности. Пример неединственности указал Надирашвили [5]. Построенный ниже пример можно сопоставить с примером Гилбарга и Серрина [6], см. также [7, задача 3.8] и [1, с. 44]. Аналог примера Надирашвили для уравнения (1.1) или (1.12) не известен. Для знакомства с недивергентной тематикой см. статью [8].

§2. Пример неединственности

Построение примеров опирается на следующее простое утверждение

ЛЕММА 2.1. *Если найдется элемент $v \in D$ с $[v, v] < 0$, то решение уравнения (1.1) (или (1.12)) неединственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение (1.1) с $f = -\operatorname{div}(\nabla v + av)$. Замечаем, что $f \in H^{-1}(\Omega)$ в силу (1.10), а одним из решений является сама функция v . С другой стороны, как ранее установлено, имеется аппроксимационное решение, для которого $[u, u] \geq 0$. Поэтому $u \neq v$, и мы получаем два решения. Лемма доказана.

Пусть $d = 3$, $\Omega = \{|x| < 1\}$ — единичный шар и

$$a(x) = \frac{x}{|x|^3} a_0 \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad (2.1)$$

где a_0 — гладкая функция на единичной сфере $\Gamma = \{|x| = 1\}$,

$$\int_{\Gamma} a_0 d\Gamma = 0. \quad (2.2)$$

Вне начала координат вектор $Q = x/|x|^3$ имеет нулевую дивергенцию, а градиент функции $\Phi(x) = a_0(x/|x|)$ ортогонален Q , т.е. вне начала координат $\operatorname{div} a = \Phi \operatorname{div} Q + Q \cdot \nabla \Phi = 0$. Проверим, что вектор a соленоидален в Ω . Очевидно, что $a \in L^1(\Omega)$. Для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\int_{\Omega} a \cdot \nabla \varphi dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} a \cdot \nabla \varphi dx,$$

где $\Omega_\varepsilon = \{\varepsilon < |x| < 1\}$. Если $\Gamma_\varepsilon = \{|x| = \varepsilon\}$ — сфера радиуса ε , а n — нормаль к Γ_ε , то по формуле Гаусса–Остроградского

$$\int_{\Omega_\varepsilon} a \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Gamma_\varepsilon} a \cdot n \varphi d\Gamma_\varepsilon = \varepsilon^{-2} \int_{\Gamma_\varepsilon} a_0 \left(\frac{x}{|x|} \right) \varphi(x) d\Gamma_\varepsilon = \int_{\Gamma} a_0(x) \varphi(\varepsilon x) d\Gamma \rightarrow 0$$

в силу (2.2). Итак, вектор a соленоидален в Ω . Кроме того, $a \in L^{3/2-\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$, так что основное условие (1.6) выполнено.

Определим функцию v равенством

$$v(x) = (1 - |x|^4) v_0 \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad (2.3)$$

где v_0 — некоторая гладкая функция на единичной сфере. Функции a_0 и v_0 подчиним, кроме (2.2), еще двум условиям

$$\int_{\Gamma} v_0 a_0 d\Gamma = 0, \quad \int_{\Gamma} v_0^2 a_0 d\Gamma = -2. \quad (2.4)$$

Из неравенства $|\nabla v_0(x/|x|)| \leq |x|^{-1}$ следует, что $v \in H_0^1(\Omega)$, а так как $a \cdot \nabla v_0 \equiv 0$, то

$$a \cdot \nabla v \in L^\infty(\Omega). \quad (2.5)$$

Проверим оценку (1.10). Для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} av \cdot \nabla \varphi dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} av \cdot \nabla \varphi dx, \\ \int_{\Omega_\varepsilon} av \cdot \nabla \varphi dx &= - \int_{\Omega_\varepsilon} a \cdot \nabla v \varphi dx - \int_{\Gamma_\varepsilon} a \cdot nv \varphi d\Gamma_\varepsilon. \end{aligned}$$

На сфере Γ_ε функцию v можно заменить на v_0 , и потому

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} a \cdot nv \varphi d\Gamma_\varepsilon = \int_{\Gamma} a_0(x) v_0(x) \varphi(\varepsilon x) d\Gamma + o(1) \rightarrow 0$$

согласно первому из условий (2.4). Получаем соотношение

$$\int_{\Omega} av \cdot \nabla \varphi dx = - \int_{\Omega} a \cdot \nabla v \varphi dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (2.6)$$

из которого (в силу (2.5) и неравенства Фридрихса) следует оценка (1.10).

Теперь убедимся, что $[v, v] = -1$. Из (2.6) получаем равенство

$$[v, v] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} av \cdot \nabla v_\varepsilon dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} a \cdot \nabla v v_\varepsilon dx.$$

Важно, что в правой части этого равенства уже возможен предельный переход под знаком интеграла, так как $a \cdot \nabla v \in L^\infty(\Omega)$, а $v_\varepsilon \rightarrow v$ в $L^2(\Omega)$. В результате

$$\begin{aligned} -[v, v] &= \int_{\Omega} a \cdot \nabla v v dx, \quad -[v, v] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} a \cdot \nabla v v dx = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} a \cdot \nabla (v^2) dx, \\ &- \int_{\Omega_\varepsilon} a \cdot \nabla (v^2) dx = \int_{\Gamma_\varepsilon} a \cdot nv^2 d\Gamma_\varepsilon = \int_{\Gamma_\varepsilon} a \cdot nv_0^2 d\Gamma_\varepsilon + o(1) \\ &= \int_{\Gamma} a_0(x) v_0^2(x) d\Gamma + o(1) = 2 + o(1) \end{aligned}$$

в силу второго из условий (2.4) и равенства (2.3). Пример неединственности построен.

Можно было бы определить вектор a при любом $d \geq 2$ равенством $a(x) = (x/|x|^d) a_0(x/|x|)$, но при $d \geq 4$ не выполнено условие (1.6), а при $d = 2$ функция v не принадлежит $H_0^1(\Omega)$. Более того, в случае $d = 2$ единственность имеет место, так как уравнение (1.1) с вектором $a(x) = (x/|x|^2) a_0(\theta)$, θ — полярный угол, эквивалентно уравнению (1.12) с ограниченной матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & c_0(\theta) \\ -c_0(\theta) & 0 \end{pmatrix}$,

где $c'_0 = a_0$. В случае $d = 4, 5$ пример неединственности легко строится простым повышением размерности: в качестве области Ω надо взять произведение трехмерного шара на $(d-3)$ -мерный цилиндр.

В построенном примере условие (1.17) не выполнено и вопрос о единственности аппроксимационного решения остался открытым. Поскольку в этом примере $a \in L^{3/2-\varepsilon}(\Omega)$, представляет интерес следующее утверждение

ЛЕММА 2.2. Пусть Ω — единичный шар в $\mathbb{R}^3$, вектор a гладок вне начала координат и $a \in L^{3/2}(\Omega)$. Тогда выполнено условие (1.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in D \cap L^\infty(\Omega)$. Возьмем $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\xi \equiv 1$ при $|x| \leq 1/2$, $\xi \equiv 0$ при $|x| \geq 1$, и положим $\theta_\varepsilon(x) = 1 - \xi(\varepsilon^{-1}x)$. Так как $u \in L^\infty(\Omega)$, а $\nabla \theta_\varepsilon \rightarrow 0$ в $L^2(\Omega)$, то $\theta_\varepsilon u \rightarrow u$ в $H_0^1(\Omega)$ и $[u, u] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [u, \theta_\varepsilon u]$.

Функция θ_ε равна нулю в окрестности начала координат, и потому

$$[u, \theta_\varepsilon u] = \int_{\Omega} a u \cdot \nabla(\theta_\varepsilon u) dx = - \int_{\Omega} a \theta_\varepsilon u \cdot \nabla u dx = J_\varepsilon,$$

а так как $\int_{\Omega} a \cdot \nabla(\theta_\varepsilon u^2) dx = 0$, то $J_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon} a \cdot \nabla \theta_\varepsilon u^2 dx$, где $B_\varepsilon = \{|x| < \varepsilon\}$. Отсюда

$$|J_\varepsilon| \leq c\varepsilon^{-1} |B_\varepsilon|^{1/3} \left(\int_{B_\varepsilon} |a|^{3/2} dx \right)^{2/3} \rightarrow 0,$$

т. е. $[u, u] = 0$. Предложение доказано.

Таким образом, в предположениях леммы 2.2 аппроксимационное решение единственно, но единственность просто решения осталась невыясненной.

§3. Достаточные условия единственности

3.1. Доказательство теоремы 1.2. Прежде всего, из включения $a \in L^2(\Omega)$ следует, что

$$\begin{aligned} [u, \varphi] &= \int_{\Omega} a u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} a \cdot \nabla(u\varphi) dx - \int_{\Omega} a \cdot \nabla u \varphi dx \\ &= - \int_{\Omega} a \cdot \nabla u \varphi dx, \quad u \in H_0^1(\Omega), \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Достаточно проверить условие (1.16). Введем в рассмотрение срезку

$$\bar{u} = \begin{cases} u, & \text{если } |u| \leq k, \\ \pm k, & \text{если } |u| > k, \end{cases}$$

и воспользуемся доказанным ниже важным равенством

$$\int_{\Omega} a \cdot \nabla u \bar{u} dx = 0 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (3.1)$$

Возьмем $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi_\varepsilon \rightarrow \bar{u}$ в $H_0^1(\Omega)$, $|\varphi_\varepsilon| \leq 2k$, $\varphi_\varepsilon(x) \rightarrow \bar{u}(x)$ п. в. на Ω . Так как $a \cdot \nabla u \in L^1(\Omega)$, то по теореме Лебега $a \cdot \nabla u \varphi_\varepsilon \rightarrow a \cdot \nabla u \bar{u}$ в $L^1(\Omega)$. Отсюда

$$[u, \bar{u}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [u, \varphi_\varepsilon] = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} a \cdot \nabla u \varphi_\varepsilon dx = - \int_{\Omega} a \cdot \nabla u \bar{u} dx = 0$$

в силу (3.1). Учитывая, что $u \in D$ и $\bar{u} \rightarrow u$ в $H_0^1(\Omega)$ при $k \rightarrow \infty$, заключаем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} [u, \bar{u}] = [u, u] = 0$, т. е. условие (1.16) выполнено.

Остается доказать равенство (3.1). Сначала рассмотрим случай $u \geq 0$, и пусть $S = \{x \in \Omega, u(x) > k\}$. Замечаем, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a \cdot \nabla \bar{u} \bar{u} \, dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} a \cdot \nabla (\bar{u}^2) \, dx = 0 \quad (\text{так как } \bar{u}^2 \in H_0^1(\Omega)), \\ \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \bar{u} \, dx &= \int_{\Omega} a \cdot (\nabla u - \nabla \bar{u}) \bar{u} \, dx = k \int_S a \cdot (\nabla u - \nabla \bar{u}) \, dx \\ &= k \int_{\Omega} a \cdot (\nabla u - \nabla \bar{u}) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Общий случай легко получается путем разложения функции u на положительную и отрицательную части. Теорема доказана.

3.2. Напомним (см. [9]), что заданная на $\mathbb{R}^d$ измеримая функция g принадлежит пространству ВМО, если

$$\|g\|_{\text{ВМО}} = \sup \frac{1}{|B|} \int_B |g - g_B| \, dx < \infty,$$

где $\sup$ берется по всем шарам $B \subset \mathbb{R}^d$. Здесь $g_B = \frac{1}{|B|} \int_B g \, dx = \bar{f}_B g \, dx$.

Очевидно, что $L^\infty \subset \text{ВМО}$. Примером неограниченной функции из ВМО служит $\ln |x|$, а также $\ln |P(x)|$, где $P(x)$ — полином.

Функции из ВМО образуют решетку, т.е. $\max(f, g), \min(f, g) \in \text{ВМО}$, если $f, g \in \text{ВМО}$. Для срезки

$$g_N = \begin{cases} g, & \text{если } |g| \leq N, \\ \pm N, & \text{если } |g| > N, \end{cases}$$

справедлива оценка $\|g_N\|_{\text{ВМО}} \leq c \|g\|_{\text{ВМО}}$, где c не зависит от N .

Важен следующий результат: если $g \in \text{ВМО}$, то

$$\frac{1}{|B|} \int_B |g - g_B|^p \, dx \leq c_p \|g\|_{\text{ВМО}}^p \quad \text{для любого } p > 1. \quad (3.2)$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть матрица A (продолженная нулем на $\mathbb{R}^d$) принадлежит пространству $\text{ВМО}(\mathbb{R}^d)$. Тогда аппроксимационное решение единственно при любом $f \in H^{-1}(\Omega)$, и для него выполнено энергетическое равенство.

Здесь предполагается, что аппроксимация A_N удовлетворяет условиям

$$A_N \in L^\infty(\Omega), \quad A_N \rightarrow A \text{ в } L^1(\Omega), \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \|A_N\|_{\text{ВМО}} < \infty.$$

Доказательство теоремы 3.1 опирается на следующее свойство.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $A \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^\infty(\Omega)$, u — решение уравнения (1.12). Тогда существует показатель $p_0 > 2$ и число $c_0 > 0$, такие, что

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p_0} \, dx \leq c_0 \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{p_0}.$$

Показатель p_0 и константа c_0 зависят только от $d, \Omega, \|A\|_{\text{ВМО}}$.

Эта теорема будет доказана ниже. Итак, если $f \in L^\infty(\Omega)$, то все аппроксимационные решения принадлежат соболевскому пространству $W_0^{1,p_0}(\Omega)$ (замыканию множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $(\int_\Omega |\nabla u|^{p_0} dx)^{1/p_0}$). Проверим, что

$$[u, u] = 0 \quad \forall u \in W_0^{1,p_0}(\Omega) \cap D. \quad (3.3)$$

Возьмем $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, $u_\varepsilon \rightarrow u$ в $W_0^{1,p_0}(\Omega)$. Так как $A \in L^p(\Omega)$ для любого $p > 1$, то $A \nabla u \in L^{p_0}(\Omega)$, и в силу кососимметричности матрицы A

$$[u, u] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [u, u_\varepsilon] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega A \nabla u \cdot \nabla u_\varepsilon dx = \int_\Omega A \nabla u \cdot \nabla u dx = 0.$$

Из свойства (3.3) следует утверждение теоремы 3.1, поскольку это свойство аналогично свойству (1.17) (см. доказательство леммы 1.6).

3.3. Доказательство теоремы 3.2. Считаем, что $\|f\|_{L^\infty} \leq 1$, а решение u продолжено нулем на $\Omega^c = \mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Достаточно установить оценку

$$\int_{B_{r/2}} |\nabla u|^2 dx \leq c \left[\left(\int_{B_r} |\nabla u|^{2/\theta} dx \right)^\theta + 1 \right], \quad (3.4)$$

в которой B_r — произвольный шар радиуса $r \leq r_0$ с центром в Ω , $B_{r/2}$ — концентрический с ним шар радиуса $r/2$, а константы $\theta > 1$, c_0 зависят только от Ω , d , $\|A\|_{\text{ВМО}}$. Тогда по лемме Геринга [10, 11] выполнено $|\nabla u|^2 \in L^{1+\delta}(\Omega)$ для некоторого $\delta > 0$, что и составляет утверждение теоремы 3.2. Пусть

$$\eta \in C_0^\infty(B_{3r/4}), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \eta \equiv 1 \text{ на } B_{r/2}, \quad |\nabla \eta| \leq 4r^{-1}.$$

Пробная функция

$$\varphi = (u - \lambda)\eta^2, \quad \lambda = \begin{cases} \int_{B_r} u dx, & \text{если } B_{3r/4} \subset \Omega, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (3.5)$$

принадлежит $H_0^1(\Omega)$ благодаря свойствам функции η и определению числа λ . Заметим, что уравнение (1.12) не меняется, если матрицу A заменить матрицей $A - C$, где C — постоянная кососимметрическая матрица. Поэтому интегральное тождество (1.13) дает

$$\int_{B_r} \nabla u \cdot \nabla u \eta^2 dx + 2 \int_{B_r} [\nabla u + \tilde{A} \nabla u] \eta (u - \lambda) \cdot \nabla \eta dx = \int_{B_r} f (u - \lambda) \eta^2 dx,$$

где $\tilde{A} = A - \int_{B_r} A dx$. Отсюда по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_{B_{r/2}} |\nabla u|^2 dx &\leq 8 \int_{B_r} (1 + |\tilde{A}|) |\nabla u| \left| \frac{u - \lambda}{r} \right| dx + \|f\|_{L^\infty} \int_{B_r} |u - \lambda| dx \\ &\leq 8 \left(\int_{B_r} (1 + |\tilde{A}|)^{p_1} dx \right)^{1/p_1} \left(\int_{B_r} |\nabla u|^{p_2} dx \right)^{1/p_2} \left(\int_{B_r} \left| \frac{u - \lambda}{r} \right|^{p_3} dx \right)^{1/p_3} \\ &\quad + \left(\int_{B_r} \left| \frac{u - \lambda}{r} \right|^{p_3} dx \right)^{1/p_3}, \end{aligned}$$

где $p_1 = 4d - 1$, $p_2 = (4d - 1)/(2d)$, $p_3 = (d/(d - 1))p_2$. Теперь воспользуемся неравенством

$$\int_{B_r} \left| \frac{u - \lambda}{r} \right|^{p_3} dx \leq c_1 \left(\int_{B_r} |\nabla u|^{p_2} dx \right)^{p_3/p_2}.$$

Для $\lambda = \int_{B_r} u dx$ это обычное неравенство Соболева. В случае $\lambda = 0$ (см. (3.5)) имеем

$$u|_{B_r \cap \Omega^c} = 0, \quad |B_r \cap \Omega^c| \geq \nu |B_r|, \quad \nu > 0,$$

что является следствием липшицевости области Ω . Поэтому неравенство выполнено также и при $\lambda = 0$. В результате получим

$$\begin{aligned} & \int_{B_{r/2}} |\nabla u|^2 dx \\ & \leq c_2 \left(\int_{B_r} (1 + |\tilde{A}|)^{p_1} dx \right)^{1/p_1} \left(\int_{B_r} |\nabla u|^{p_2} dx \right)^{2/p_2} + \left(\int_{B_r} |\nabla u|^{p_2} dx \right)^{1/p_2}. \end{aligned}$$

Интеграл, содержащий матрицу A , оценивается через $\|A\|_{\text{ВМО}}$ (см. (3.2)), а второе слагаемое справа не превосходит $1 + (\int_{B_r} |\nabla u|^{p_2} dx)^{2/p_2}$. Тем самым получена искомая оценка (3.4) с $\theta = 2/p_2$. Теорема доказана.

3.4. Доказательство теорем 1.3, 1.4. Пусть u — решение однородного уравнения (1.12),

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = - \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla \varphi dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.6)$$

Построим пробную функцию $\varphi = u_\lambda$, связанную с решением u . Считая u и ∇u продолженными нулем на $\Omega^c = \mathbb{R}^d \setminus \Omega$, введем максимальную функцию

$$M(\nabla u)(x) = \sup_B \int_B |\nabla u(y)| dy,$$

где $\sup$ берется по всем шарам с центром в точке $x \in \mathbb{R}^d$. Положим также

$$g(x) = \max \left[M(|\nabla u|)(x), \frac{|u(x)|}{\rho(x)} \right] + 1, \quad x \in \Omega,$$

где $\rho(x)$ — расстояние до границы области Ω . Так как $M(|\nabla u|) \in L^2(\Omega)$, а по неравенству Харди $\rho^{-1}u \in L^2(\Omega)$, то $g \in L^2(\Omega)$. Определим множество

$$F_\lambda = \{x \in \Omega, g(x) \leq \lambda\}.$$

Известно (см. [12, р. 255]), что $|u(x) - u(y)| \leq c\lambda|x - y|$ для почти всех $x, y \in F_\lambda$, причем постоянная $c \geq 1$ зависит только от d . Кроме того, по построению $|u(x)| \leq \lambda\rho(x)$ на F_λ . Отсюда следует, что функция $u(x)|_{F_\lambda \cup \Omega^c}$ является $c\lambda$ -липшицевой, и по известной теореме [12, р. 80] ее можно продолжить на $\mathbb{R}^d$ с сохранением константы Липшица. В результате получим функцию $u_\lambda(x)$, такую, что

$$u_\lambda \in H_0^1(\Omega), \quad \nabla u_\lambda = \nabla u \text{ п. в. на } F_\lambda, \quad |\nabla u_\lambda| \leq c\lambda \text{ п. в. на } \Omega.$$

Полагая в (3.6) $\varphi = u_\lambda$ и используя кососимметричность матрицы A , имеем

$$\int_{F_\lambda} |\nabla u|^2 dx = - \int_{\Omega \setminus F_\lambda} (A + I) \nabla u \cdot \nabla u_\lambda \leq c\lambda \int_{\Omega \setminus F_\lambda} (|A| + 1) |\nabla u| dx.$$

Умножив крайние члены неравенства на $\varepsilon\lambda^{-(1+\varepsilon)}$, $0 < \varepsilon < 1$, и проинтегрировав по λ в пределах от 0 до ∞ , приходим к неравенству

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 g^{-\varepsilon} dx \leq \frac{c\varepsilon}{1-\varepsilon} \int_{\Omega} (|A| + 1) |\nabla u| g^{1-\varepsilon} dx. \quad (3.7)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 f(g(x)) dx &= - \int_0^{\infty} f'(\lambda) \int_{F_{\lambda}} |\nabla u|^2 dx d\lambda, \quad f(\lambda) = \lambda^{-\varepsilon}, \\ \int_{\Omega} (|A(x)| + 1) |\nabla u(x)| f(g(x)) dx &= \int_0^{\infty} f'(\lambda) \int_{\Omega \setminus F_{\lambda}} (|A| + 1) |\nabla u| dx d\lambda, \\ f(\lambda) &= \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \lambda^{1-\varepsilon}, \end{aligned}$$

которые получаются из общей формулы вида

$$\int_{\Omega} f(g(x)) k(x) dx = \int_0^{\infty} f(\lambda) d\lambda \left(\int_{F_{\lambda}} k dx \right)$$

интегрированием по частям. Теперь из (3.7) по неравенству Гёльдера вытекает, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 g^{-\varepsilon} dx \leq \frac{c\varepsilon}{1-\varepsilon} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} g^2 dx \right)^{(1-\varepsilon)/2} \left(\int_{\Omega} (|A| + 1)^{2/\varepsilon} dx \right)^{\varepsilon/2} \rightarrow 0$$

в силу условия (1.15). Отсюда следует, что $u \equiv 0$, и теорема 1.3 доказана.

Теорема 1.4 доказывается аналогично. Пусть u — ограниченное решение однородного уравнения (1.1),

$$u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = - \int_{\Omega} au \cdot \nabla \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Полагая здесь $\varphi = u_\lambda$ и используя равенство

$$\int_{\Omega} au \cdot \nabla u_\lambda dx = \int_{\Omega} a(u - u_\lambda) \cdot \nabla u_\lambda dx = \int_{\Omega \setminus F_\lambda} a(u - u_\lambda) \cdot \nabla u_\lambda dx,$$

получим оценку

$$\int_{F_\lambda} |\nabla u|^2 dx \leq c_1 \lambda \int_{\Omega \setminus F_\lambda} (|a| + 1) dx,$$

из которой указанным выше приемом интегрирования по λ заключаем, что $u \equiv 0$. Тогда лемма 1.5 дает единственность аппроксимационных решений.

3.5. Обсудим вопросы единственности с операторной точки зрения. Для определенности будем говорить об уравнении (1.12). Наряду с этим уравнением будем рассматривать уравнение с матрицей $-A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Однозначная разрешимость уравнений (1.12) с матрицами $\pm A$ эквивалентна выполнению условия (1.16).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество D (см. (1.14)) — одно и то же для обоих уравнений. Если $[u, u] < 0$, то по лемме 2.1 уравнение с матрицей A разрешимо неоднозначно. Если $[u, u] > 0$, то неоднозначно разрешимо уравнение с матрицей $-A$. Предложение доказано.

Введем оператор $S: H_0(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, отвечающий дифференциальному выражению $\operatorname{div}(A\nabla)$. Для $u \in C_0^\infty(\Omega)$ элемент $Su \in H^{-1}(\Omega)$ определяем равенством

$$(Su, \varphi) = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

что возможно в силу включения $A \in L^2(\Omega)$. Очевидно, что оператор S кососимметричен на $C_0^\infty(\Omega)$, т.е. $(Su, \varphi) = -(S\varphi, u)$, и таковым останется после замыкания.

Область определения сопряженного оператора S^* совпадает с множеством D , и при этом $(S^*u, \varphi) = -[u, \varphi]$ для любого $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, см. (1.14). Множество D может оказаться шире области определения оператора S , и поэтому свойство кососамосопряженности $S^* = -S$ не обязательно выполняется. Нетрудно видеть, что это свойство эквивалентно выполнению условия (1.16). Дадим интерпретацию условия (1.17) (или (3.3)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Если выполнено условие (1.17), то оператор $S^*|_{L^\infty(\Omega) \cap D}$ является существенно кососамосопряженным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Само условие (1.17) означает кососимметричность указанного оператора. Если $f \in L^\infty(\Omega)$ и u — аппроксимационное решение, то

$$-(\Delta + S^*)u = f, \quad \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}, \quad u \in L^\infty(\Omega) \cap D.$$

Мы видим, что образ оператора $(\Delta + S^*)|_{L^\infty(\Omega) \cap D}$ плотен в $H^{-1}(\Omega)$, а обратный оператор $(\Delta + S^*)^{-1}$ ограничен. Отсюда следует, что замыкание оператора $S^*|_{L^\infty(\Omega) \cap D}$ является кососамосопряженным. Предложение доказано.

В связи с неединственностью возникает вопрос, как указать регулярный способ однозначного выделения решения. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} \Delta u_1 + Su_2 = -f, \\ \Delta u_2 - S^*u_1 = 0, \end{cases} \quad u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega). \quad (3.8)$$

Поскольку матричный оператор $\begin{pmatrix} 0 & S \\ -S^* & 0 \end{pmatrix}$ всегда кососамосопряжен, эта система однозначно разрешима. Легко понять, что сумма $u = u_1 + u_2$ будет решением исходного уравнения. Для этого решения энергетическое равенство (1.4), вообще говоря, не выполняется.

Указанный способ играет ключевую роль в работе [4] и назван там вариационным, поскольку из (3.8) для компоненты u_1 получаем уравнение

$$-\Delta u_1 + Ku_1 = f,$$

где $K = S(-\Delta)^{-1}S^*$ — положительно определенный оператор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Наука, М., 1973.
2. Киндерлер Д., Штампакья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. Мир, М., 1983.
3. Жиков В. В. Диффузия в несжимаемом случайном потоке. Функц. анализ и его прил., 31, вып. 3, 10–22 (1997).

4. *Fannjiang M. A., Papanicolaou G. C.* Diffusion in turbulence. *Probab. Theory Related Fields*, **105**, 279–334 (1996).
5. *Nadirashvili N. S.* Nonuniqueness in the martingale problem and the Dirichlet problem for uniformly elliptic operators. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **24**, 537–550 (1997).
6. *Gilbarg D., Serrin J.* On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations. *J. Anal. Math.*, **4**, 309–340 (1955/56).
7. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. Наука, М., 1989.
8. *Safonov M.* Nonuniqueness for second order elliptic equations with measurable coefficients. *SIAM J. Math. Anal.*, **30**, 879–895 (1999).
9. *Stein E. M.* *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals.* Princeton University Press, 1993.
10. *Giaquinta and Modica G.* Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems. *J. Reine Angew. Math.*, **311/312**, 145–169 (1979).
11. *Gehring F. W.* The L^p -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping. *Acta Math.*, **130**, 265–277 (1973).
12. *Evans L. C., Gariepy R. F.* *Measure theory and fine properties of functions.* CRC Press. Boca Ration, Ann Arbor, London, 1992.

Владимирский государственный
педагогический университет
e-mail: zhikov@vgpu.vladimir.ru

Поступило в редакцию
12 сентября 2003 г.