Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Калябин, Точные константы в неравенствах для промежуточных производных (случай Габушина), *Функци. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 3, 29–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa115>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 07:46:29

УДК 517.518.26

Точные константы в неравенствах для промежуточных производных (случай Габушина)*

© 2004. Г. А. КАЛЯБИН

*Дорогому учителю в знак глубокого уважения
и неизменной благодарности*

§1. Обозначения и формулировка основного результата

Будем рассматривать семейство соболевских пространств $W_2^n(\mathbb{R}_+^1)$, $n \in \mathbb{N}$, каждое из которых состоит из всех (комплекснозначных) функций $f(x)$, определенных на положительной полуоси $x \geq 0$, имеющих абсолютно непрерывную на любом отрезке $[0, b]$, $b > 0$, производную $f^{(n-1)}(x)$ порядка $n - 1$ и обладающих конечной нормой

$$\|f\|_{W_2^n(\mathbb{R}_+^1)} := \left(\int_0^{+\infty} (|f(x)|^2 + |f^{(n)}(x)|^2) dx \right)^{1/2}. \quad (1.1)$$

Нашей целью является вычисление точных, т.е. наименьших возможных, констант в неравенствах типа Колмогорова

$$|f^{(k)}(0)| \leq A_{n,k} \|f\|_{W_2^n(\mathbb{R}_+^1)}, \quad k \in I_n := \{0, \dots, n-1\}. \quad (1.2)$$

ТЕОРЕМА. Для любого $k \in I_n$ наименьшая константа $A_{n,k}$ в (1.2) выражается формулой

$$A_{n,k} = \left(\sin \frac{\pi(2k+1)}{2n} \right)^{-1/2} \prod_{s=1}^k \operatorname{ctg} \frac{\pi s}{2n}; \quad (1.3)$$

в частности, при $k = 0$ имеем

$$A_{n,0} = \left(\sin \frac{\pi}{2n} \right)^{-1/2}.$$

Известные результаты о константах в неравенствах для промежуточных производных в различных случаях приведены, например, в [1, §2.4]. В частности, В. Н. Габушин [2] (см. также [1, п. 2.4.5]) нашел функции (в виде линейных комбинаций убывающих экспонент), экстремальные для неравенств (1.2). Однако неявно определяемые этим результатом числа $A_{n,k}$ не были вычислены эффективно. Например, оставалось неясным, как ведут себя при $n \rightarrow \infty$ числа $A_n := \max_k A_{n,k}$.

Л. В. Тайков [3] (см. также [1, п. 2.4.4]) получил простую явную формулу для чисел $A_{n,k}^*$, отличающихся от $A_{n,k}$ заменой в (1.2) пространства $W_2^n(\mathbb{R}_+^1)$ функций, заданных на полуоси $\mathbb{R}_+^1$, пространством $W_2^n(\mathbb{R}^1)$ функций, заданных на

*Работа была поддержана грантами РФФИ (№02-01-00602) и CRDF (проект SA-014-02).

всей оси $\mathbb{R}^1$, а именно, $A_{n,k}^* = (2n \sin((2k+1)\pi/2n))^{-1/2}$. Поэтому формула (1.3) может рассматриваться как обобщение результата Л. В. Тайкова на технически более сложный случай соболевских пространств на полуоси.

Доказательство теоремы излагается в §2. В §3 в качестве следствий выводятся свойства симметрии и регулярности, дана таблица значений $A_{n,k}$, $n \leq 6$, выражающихся в радикалах, а в §4 изучается асимптотическое поведение констант $A_{n,k}$ при $n \rightarrow \infty$ для различных случаев поведения k .

Приведены также некоторые вспомогательные утверждения, которые могут представлять и самостоятельный интерес. Часть из них (*предложения*) были получены ранее [4], тогда как другие (*леммы*) доказываются в настоящей работе, краткое содержание которой анонсировано в [8].

§2. Доказательство теоремы

Шаг 1. Предварительные рассмотрения. Для произвольного вектора $a := (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ положим

$$\psi_n(a) := \min\{\|f \mid W_2^n(\mathbb{R}_+^1)\| : y^{(s)}(0) = a_s, s \in I_n\}. \quad (2.1)$$

Ясно, что $\psi_n^2(a)$ есть положительно определенная квадратичная форма на n -мерном пространстве векторов начальных условий a , $\psi_n^2(a) = (G_n a, a)$. Матрица $G = G_n$ подробно исследована в [4], где, в частности, установлены следующие ее свойства (см. [4, §3]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Матрица G вещественна, симметрична относительно главной и побочной диагоналей и удовлетворяет тождеству

$$G^{-1} = PGP, \quad P := \text{diag}(1, -1, \dots, (-1)^{n-1}). \quad (2.2)$$

В частности, для нас большое значение имеет тот факт, вытекающий из важного и неожиданного соотношения (2.2), что *диагональные элементы матриц G и G^{-1} совпадают*.

ЛЕММА 1. Для наименьших констант $A_{n,k}$ в неравенстве (1.2) справедливо альтернативное представление

$$A_{n,k} = \min\{\|f \mid W_2^n(\mathbb{R}_+^1)\| : f^{(k)}(0) = 1, f^{(j)}(0) = 0, j \neq k, j \in I_n\}. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из определяющего соотношения (1.2) вытекает, что $A_{n,k}$ суть числа, обратные к минимальным нормам в $W_2^n(\mathbb{R}_+^1)$ экстраполяций с заданным значением $f^{(k)}(0) = 1$ при отсутствии условий на граничные значения других производных, т. е.

$$A_{n,k}^{-1} = \min\{\|f \mid W_2^n(\mathbb{R}_+^1)\| : f^{(k)}(0) = 1, f^{(j)}(0) \text{ произвольны, } j \neq k, j \in I_n\}.$$

Воспользуемся теперь тем, что для произвольной положительно определенной эрмитовой матрицы Q и любого ненулевого вектора b имеет место равенство

$$\min\{(Qa, a) : (a, b) = 1\} = (Q^{-1}b, b)^{-1}, \quad (2.4)$$

являющееся простым (и хорошо известным) следствием неравенства Коши–Буняковского. Выбирая в (2.4) $Q = G_n$, $b = e_k := (\delta_{0,k}, \dots, \delta_{n-1,k})$, где, как обычно, $\delta_{j,k}$ равно 1 при $j = k$ и 0 при $j \neq k$, $k, j \in I_n$, и принимая во внимание, что условие $a_k = 1$ при произвольности остальных a_s в точности равносильно

равенству $(a, e_k) = 1$, мы заключаем, с учетом определения (см. (2.1)), что числа $A_{n,k}^2$ равны диагональным элементам матрицы, обратной к G , а поскольку диагонали матриц G^{-1} и G совпадают, мы приходим к (2.3).

Шаг 2. Переход к задаче на всей оси. Пусть $y_k(x)$, $x > 0$, — функция, удовлетворяющая начальным условиям, указанным в (2.3), и имеющая наименьшую возможную (т.е. равную $A_{n,k}$) норму в $W_2^n(\mathbb{R}_+^1)$, и пусть $z_k(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, обозначает четное (при четных k) или нечетное (при нечетных k) продолжение функции $y_k(x)$ на всю ось. Поскольку в точке $x = 0$ имеет место непрерывность производных $z_k^{(s)}(x)$ до порядка $n - 1$ включительно, продолженная функция принадлежит пространству Соболева на всей оси, причем (см. (1.1)) $\|z_k \mid W_2^n(\mathbb{R}^1)\| = \sqrt{2} \|y_k \mid W_2^n(\mathbb{R}_+^1)\| = \sqrt{2} A_{n,k}$.

Используем теперь преобразование Фурье F и обратное к нему F^{-1} (см. [1, п. 1.6.2])

$$F[f](\xi) = \hat{f}(\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt, \quad f(x) = F^{-1}[\hat{f}] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

В силу формулы Планшереля для любой функции $f \in W_2^n(\mathbb{R}^1)$ выполняется равенство

$$\|f \mid W_2^n(\mathbb{R}^1)\|^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + \xi^{2n}) d\xi,$$

а условие $f^{(s)}(0) = a_s$, $s \in I_n$, равносильно равенству $\int \xi^s \hat{f}(\xi) d\xi = (-i)^s a_s$. Поэтому $\hat{z}_k(\xi)$ является решением экстремальной задачи

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\xi)|^2 (1 + \xi^{2n}) d\xi \rightarrow \min : \quad \int_{-\infty}^{\infty} \xi^s g(\xi) d\xi = (-i)^s \delta_{s,k}, \quad s \in I_n. \quad (2.5)$$

Согласно общему принципу Лагранжа (см. например, [1, п. 1.5.4]), решение данной экстремальной задачи представимо в виде конечной линейной комбинации

$$\hat{z}_k(\xi) = \sum_{j=0}^{n-1} c_{j,k} \frac{\xi^j}{1 + \xi^{2n}}. \quad (2.6)$$

Введем вектор $c^{(k)}$ с координатами $(c_{0,k}, \dots, c_{n-1,k})$ и матрицу Q с элементами

$$q_{j,k} := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^{j+k} d\xi}{1 + \xi^{2n}} = \frac{\varepsilon_{j,k}}{n \sin((j+k+1)\theta)}, \quad \varepsilon_{j,k} := \frac{1 + (-1)^{j+k}}{2}, \quad \theta := \frac{\pi}{2n}. \quad (2.7)$$

Здесь использована хорошо известная формула для возникающего интеграла (см. [1, п. 2.4.4] и [5, п. 2.2.5.25]), а числитель отражает то очевидное обстоятельство, что этот интеграл равен 0, если j и k — числа разной четности.

С помощью этой матрицы минимизируемый функционал (2.5) для функции (2.6) может быть записан как

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{z}_k(\xi)|^2 (1 + \xi^{2n}) d\xi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-1} c_{j,k} \bar{c}_{s,k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^j \xi^s d\xi}{1 + \xi^{2n}} = 2\pi^2 (Q c^{(k)}, c^{(k)}).$$

Если ввести вектор $\tilde{e}_k$ с координатами $(-i)^k \delta_{j,k}$, то ограничения в задаче (2.5) принимают вид

$$(-i)^s \delta_{s,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^s \hat{z}_k(\xi) d\xi = \sum_{j=0}^{n-1} c_{j,k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^j \xi^s d\xi}{1 + \xi^{2n}} \iff \tilde{e}_k = \pi Q c^{(k)},$$

и, таким образом, $2\pi^2(Qc^{(k)}, c^{(k)}) = 2(Q^{-1}\tilde{e}_k, \tilde{e}_k)$; следовательно, числа $A_{n,k}^2$ суть диагональные элементы матрицы U , обратной к матрице Q .

Шаг 3. Вывод явной формулы для диагональных элементов матрицы U . Нужные нам числа $u_{k,k}$ в силу особой структуры матрицы Q могут быть вычислены конструктивно. Действительно, в силу (2.7) и формул Эйлера для всех $j, k \in I_n$ имеем

$$\begin{aligned} q_{j,k} &= h_j \bar{h}_k \varepsilon_{j,k} v_{j,k}, \quad h_j := e^{ij\theta}, \quad \theta := \frac{\pi}{2n}, \\ v_{j,k} &:= \frac{1}{\alpha_j + \bar{\alpha}_k}, \quad \alpha_j := \frac{\exp(i(2j+1)\theta)}{in}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

а отсюда явствует, что $Q = H\tilde{V}\bar{H}$, где $H := \text{diag}(h_0, \dots, h_{n-1})$, $\tilde{v}_{j,k} := \varepsilon_{j,k} v_{j,k}$, а значит, $U = \bar{H}\tilde{\Phi}H$, $\tilde{\Phi} = \tilde{V}^{-1}$, и, в частности $u_{k,k} = \tilde{\varphi}_{k,k}$.

Переменные с четными и нечетными индексами разделяются, и для обращения матриц V_o и V_e , образующих ненулевые блоки матрицы $\tilde{V}$, соответствующие координатам с нечетными и четными индексами, мы применим утверждение (его доказательство, опирающееся на формулы для так называемых определителей Коши [6, §14], можно найти, например, в [7]), приводимое здесь в несколько большей общности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для того чтобы матрица V с элементами $v_{j,k} := (\alpha_j + \beta_k)^{-1}$ была невырожденной, необходимо и достаточно, чтобы оба набора комплексных чисел $\{\alpha_j\}$ и $\{\beta_k\}$ состояли из попарно различных чисел; при выполнении этого условия диагональные элементы обратной матрицы $\Phi = V^{-1}$ равны*

$$\varphi_{k,k} = (\alpha_k + \beta_k) \prod_{r \neq k} \frac{(\alpha_k + \beta_r)(\beta_k + \alpha_r)}{(\alpha_k - \alpha_r)(\beta_k - \beta_r)}. \quad (2.9)$$

Соединяя приведенные рассуждения, мы заключаем из (2.9) с учетом (2.8), что для чисел $A_{n,k}$ справедлива явная формула

$$A_{n,k} = (u_{k,k}^{(n)})^{1/2} = (n \sin((2k+1)\theta))^{1/2} \prod_{r \in I_{n,k}} \frac{\sin(r+k+1)\theta}{\sin|r-k|\theta}, \quad (2.10)$$

где $I_{n,k}$ обозначает множество всех тех $r \in I_n$, для которых разность $r - k$ — четное число, не равное 0, а произведения пустого множества чисел, возникающие в случаях $n = 1, k = 0$; $n = 2, k = 0, k = 1$; $n = 3, k = 1$, принимаются, как обычно, равными 1.

Отметим, что именно в таком (промежуточном) виде выражение для констант $A_{n,k}$ было приведено в [8].

Шаг 4. Завершение доказательства теоремы: переход от (2.10) к (1.3).

Вводя обозначения (напомним, что теперь $\theta = \theta_n := \pi/2n$)

$$a_s := \sin s\theta, \quad P_k := \prod_{s=1}^k a_s, \quad X_m = \prod_{0 \leq 2s \leq m} a_{2s+1}, \quad Y_m := \prod_{0 < 2s \leq m} a_{2s}, \quad (2.11)$$

мы преобразуем выражение (2.10) к виду

$$A_{n,k} = \sqrt{\frac{n}{a_{2k+1}}} B_{n,k}, \quad B_{n,k} := \frac{X_{k+n-1}}{X_{k-1}Y_kY_{n-k-1}} = \frac{X_{2n-2}}{P_k P_{n-k-1}}. \quad (2.12)$$

Последний переход здесь проверяется непосредственным разбором четырех случаев четности n , k с учетом равенств $a_j = a_{2n-j}$, $j \in I_n$, имеющих место именно при $\theta = \theta_n$. Переходя в (2.12) от k к $k+1$ и принимая во внимание тождества $\sin(n-j)\theta = \cos j\theta$, справедливые при выбранном θ , получаем соотношение

$$\frac{B_{n,k+1}}{B_{n,k}} = \frac{a_{n-k-1}}{a_{k+1}} = \frac{\sin(n-k-1)\theta}{\sin(k+1)\theta} = \operatorname{ctg}(k+1)\theta$$

и, следовательно,

$$A_{n,k} = \sqrt{\frac{n}{a_{2k+1}}} B_{n,0} \prod_{s=1}^k \operatorname{ctg} s\theta. \quad (2.13)$$

Воспользуемся теперь известными формулами для произведений синусов (см., например, [5, пп. 6.1.2.5, 6.1.2.2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *При любом натуральном n справедливы тождества*

$$\prod_{s=0}^{n-1} \sin \frac{(2s+1)\pi}{2n} = 2^{(1-n)/2}, \quad \prod_{s=0}^{n-1} \sin \frac{s\pi}{2n} = 2^{(1-n)/2} \sqrt{n}. \quad (2.14)$$

Первое произведение в (2.14) в соответствии с (2.11) есть X_{2n-2} , а второе равно P_n ; таким образом, в силу (2.12) $B_{n,0} = 1/\sqrt{n}$, а отсюда в соединении с (2.13) вытекает (1.3). Доказательство теоремы закончено.

§3. Общие свойства констант $A_{n,k}$

Из формулы (1.3) легко может быть выведено свойство симметрии, не очевидное с точки зрения исходного определения чисел $A_{n,k}$ (см. (1.2)).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Имеют место соотношения*

$$A_{n,n-k-1} = A_{n,k}, \quad n \in \{1, 2, \dots\}, \quad k \in I_n. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение легко получается из равенства (2.12), равносильного (2.10) и (1.3), с учетом тождества $\sin(2k+1)\theta = \sin(2(n-k-1)+1)\theta$. Соотношение симметрии (3.1) вытекает также из факта симметричности матрицы G_n относительно побочной диагонали (см. предложение 1).

При $n \leq 6$ константы $A_{n,k}$, вычисляемые по формуле (1.3), могут быть точно выражены, исходя из натуральных чисел, посредством арифметических операций и извлечения квадратного корня (см. таблицу значений тригонометрических функций в [5, I.1.11]):

$$\begin{aligned} A_{1,0} &= 1, & A_{2,0} &= A_{2,1} = \sqrt[4]{2} = 1.1892\dots, \\ A_{3,0} &= A_{3,2} = \sqrt{2} = 1.4142\dots, & A_{3,1} &= \sqrt{3} = 1.7320\dots, \\ A_{4,0} &= A_{4,3} = \sqrt[4]{4 + 2\sqrt{2}} = 1.6165\dots, & A_{4,1} &= A_{4,2} = \sqrt[4]{20 + 14\sqrt{2}} = 2.5117\dots, \\ A_{5,0} &= A_{5,4} = \sqrt{1 + \sqrt{5}} = 1.7989\dots, \\ A_{5,1} &= A_{5,3} = \sqrt[4]{70 + 30\sqrt{5}} = 3.4217\dots, & A_{5,2} &= 2 + \sqrt{5} = 4.2360\dots, \\ A_{6,0} &= A_{6,5} = \sqrt[4]{8 + 4\sqrt{3}} = 1.9656\dots, & A_{6,1} &= A_{6,4} = \sqrt[4]{194 + 112\sqrt{3}} = 4.4381\dots, \\ A_{6,2} &= A_{6,3} = \sqrt[4]{936 + 540\sqrt{3}} = 6.5771\dots \end{aligned}$$

Приведенная табличка наводит на предположение, что константы $A_{n,k}$ ведут себя так же регулярно, как, скажем, биномиальные коэффициенты C_n^k , которые для любого фиксированного n монотонно возрастают по k при $k < n/2$. Это действительно имеет место, причем для отношения $A_{n,k+1}/A_{n,k}$ справедливы и более точные утверждения, требующиеся в некоторых вопросах.

СЛЕДСТВИЕ 2. (i) При увеличении k отношение $A_{n,k+1}/A_{n,k}$ строго убывает, тогда как $(k+1)A_{n,k+1}/A_{n,k}$ строго возрастает;

(ii) $A_{n,k}$ строго возрастает при $k < t := [(n-1)/2]$, достигает при $k = t$ максимального значения и строго убывает при $k > t$;

$$(iii) \quad k+1 < \frac{n}{4} \implies \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \frac{n}{k+1} \leq \frac{A_{n,k+1}}{A_{n,k}} \leq \frac{\sqrt{2}+1}{4} \frac{n}{k+1};$$

$$(iv) \quad \frac{n}{4} \leq k+1 < \frac{n}{2} \implies 1 \leq \frac{A_{n,k+1}}{A_{n,k}} \leq \sqrt{2}+1,$$

где константы $2/\pi\sqrt{3}$, $(\sqrt{2}+1)/4$, 1 , $\sqrt{2}+1$ точные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из (1.3) явствует, что при $k \in \{0, \dots, n-2\}$

$$\frac{A_{n,k+1}}{A_{n,k}} = \sqrt{\frac{\sin(2k+1)\theta}{\sin(2k+3)\theta}} \operatorname{ctg}(k+1)\theta, \quad (3.2)$$

и, таким образом, утверждение (i) равносильно неравенству

$$\frac{A_{n,k+1}}{A_{n,k}} \left(\frac{A_{n,k}}{A_{n,k-1}} \right)^{-1} = \sqrt{\frac{\sin^2(2k+1)\theta}{\sin(2k-1)\theta \sin(2k+3)\theta}} \frac{\operatorname{ctg}(k+1)\theta}{\operatorname{ctg} k\theta} < 1$$

($k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$), для доказательства которого рассмотрим функцию

$$\mu(y, t) := \ln \sin 2(y+t) + \ln \sin 2(y-t) - 2 \ln \sin 2y + 2 \ln \operatorname{tg}(y+t) - 2 \ln \operatorname{tg}(y-t) \quad (3.3)$$

в области $D := \{y > t > 0, y+t < \pi/2\}$. Ее производная по t , равная

$$\frac{\partial \mu(y, t)}{\partial t} = \frac{2(2 + \cos 2(y+t))}{\sin 2(y+t)} + \frac{2(2 - \cos 2(y-t))}{\sin 2(y-t)}, \quad (3.4)$$

положительна в D , и, учитывая, что $\mu(y, 0) = 0$, мы заключаем, что в указанной области $\mu(y, t) > 0$. Отсюда, потенцируя (3.4), получаем неравенство

$$\frac{\sin 2(y+t) \sin 2(y-t)}{\sin^2 2y} > \frac{\operatorname{tg}^2(y-t)}{\operatorname{tg}^2(y+t)}, \quad y > t > 0, \quad y+t < \pi/2,$$

и, выбирая здесь $y := (k+1/2)\theta$, $t := \theta/2$, приходим к (3.3); тем самым доказана первая половина части (i).

Вторая ее половина, выражающаяся неравенством

$$\frac{(k+1)A_{n,k+1}}{A_{n,k}} \left(\frac{kA_{n,k}}{A_{n,k-1}} \right)^{-1} = \sqrt{\frac{\sin^2(2k+1)\theta}{\sin(2k-1)\theta \sin(2k+3)\theta}} \frac{\operatorname{ctg}(k+1)\theta}{\operatorname{ctg} k\theta} \frac{k+1}{k} > 1,$$

устанавливается аналогично и вытекает из отрицательности в области D функции $\lambda(y, t) := \mu(y, t) + 2 \ln(y-t) - 2 \ln(y+t)$, что доказывается так же, как положительность $\mu(y, t)$.

Далее, согласно (3.2), при четных и нечетных n имеем соответственно

$$\frac{A_{2m+2,m}}{A_{2m+2,m+1}} = 1, \quad \frac{A_{2m+1,m-1}}{A_{2m+1,m}} = \frac{A_{2m+1,m}}{A_{2m+1,m+1}} = \sqrt{\cos \frac{\theta}{2}} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) > 1,$$

а отсюда в силу свойства (i) вытекает утверждение (ii).

Из доказанного свойства монотонности (i) мы получаем также (iii) и (iv), поскольку $A_{n,1}/A_{n,0} = 2n(1+\varepsilon_n)/\pi\sqrt{3}$, $\varepsilon_n \rightarrow +0$, $n \rightarrow \infty$ (см. (3.2)), а $\operatorname{ctg} \pi/8 = \sqrt{2} + 1$. Доказательство следствия 2 закончено.

§ 4. Асимптотическое поведение $A_{n,k}$

Для получения асимптотики величин (1.3) при $n \rightarrow \infty$ мы будем опираться на формулу суммирования Тейлора–Маклорена (см., например, [10, теорема 1, I]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$; тогда

$$\begin{aligned} \sum_{a < s \leq b} f(s) &= \int_a^b f(x) dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) + \sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) \\ &+ \int_a^b \sigma(x)f''(x) dx, \quad \rho(x) := \frac{1}{2} - \{x\}, \quad \sigma(x) := \int_0^x \rho(u) du. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Отсюда может быть выведена асимптотическая формула, представляющая и некоторый самостоятельный интерес.

ЛЕММА 2. Пусть k — натуральное число, $\theta > 0$, $\delta > 0$, $y := (k+1/2)\theta < \pi/2 - \delta$; тогда

$$\prod_{s=1}^k \operatorname{ctg} s\theta = \frac{1}{k! \theta^k} \exp \left\{ -\frac{Q(y)}{\theta} \right\} (1 + \theta \varphi_k(\theta)), \quad (4.2)$$

где

$$Q(y) := \int_0^y \ln \frac{\operatorname{tg} u}{u} du, \quad |\varphi_k(\theta)| < c(\delta). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем (4.1) при $a := 0$, $b := k + 1/2$ для функции

$$f(x) = f(x, \theta) := g(\theta x), \quad g(x) := \ln \frac{\operatorname{tg} x}{x}, \quad (4.4)$$

и, учитывая, что $f(0) = \sigma(0) = 0$, $\rho(0) = 1/2$, $\rho(k + 1/2) = 0$, $\sigma(k + 1/2) = 1/8$, получим

$$\begin{aligned} T &:= \sum_{s=1}^k \ln \frac{\operatorname{tg} s\theta}{s\theta} = \sum_{s=1}^k f(s) = \int_0^{k+1/2} f(x) dx - \frac{1}{8} f' \left(k + \frac{1}{2} \right) + \int_0^{k+1/2} \sigma(x) f''(x) dx \\ &= \frac{1}{\theta} Q(y) - \frac{\theta}{8} g_1(y) + \theta \int_0^y \sigma \left(\frac{u}{\theta} \right) g_2(u) du, \quad g_1(u) := \frac{dg(u)}{du}, \quad g_2(u) := \frac{d^2 g(u)}{du^2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь в интегралах сделана линейная замена $u = x\theta$. Поскольку $0 \leq \sigma(x) \leq 1/8$ при всех x , а функции $g_1(u)$, $g_2(u)$ ограничены на отрезке $[0, \pi/2 - \delta]$, модули двух последних слагаемых в (4.5) не превосходят $c(\delta)\theta$.

Из (4.4) и (1.3) вытекает соотношение

$$\ln \prod_{s=1}^k \operatorname{ctg} s\theta = -\ln(k! \theta^k) - T = -\ln(k! \theta^k) - \frac{Q(y)}{\theta} - \frac{1}{2} g(y) + \theta \tilde{\varphi}_k(\theta),$$

которое равносильно (4.2). Доказательство леммы 2 закончено.

Выбирая в ней, как и ранее в §2, $\theta := \pi/2n$, из формул (1.3) и (4.4) получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $n \rightarrow \infty$, а числа k не превосходят $n(1 - \delta)$, $\delta > 0$; тогда

$$A_{n,k} \approx \left(\sin \frac{\pi(2k+1)}{2n} \right)^{-1/2} \left(\frac{2n}{\pi} \right)^k \frac{1}{k!} \exp \left(-\frac{2n}{\pi} Q \left(\frac{\pi(2k+1)}{4n} \right) \right), \quad (4.6)$$

где символ $\approx$, как обычно, означает, что отношение правой части к левой стремится к 1 равномерно относительно k , лежащих в указанных промежутках.

Отметим, что в силу симметрии нам вполне достаточно ограничиться рассмотрением значений $k < n/2$, что соответствует выбору $\delta = 1/2$.

В ряде случаев данная общая формула принимает более простой вид.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $n \rightarrow \infty$, а отношение k^3/n^2 ограничено; тогда

$$A_{n,k} \approx \left(\frac{2n}{\pi} \right)^{k+1/2} \frac{1}{k! \sqrt{2k+1}} \exp \left(-\frac{\pi^2 k^3}{36n^2} \right). \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие следствия подразумевает, что $k/n \rightarrow 0$, а значит, $\sin(\pi(2k+1)/2n) \approx \pi(2k+1)/2n$. Из (4.3) вытекает, что $Q(y) \approx y^3/9$, $y := \pi(2k+1)/4n \rightarrow 0$, а это в соединении с (4.6) дает (4.7).

Отметим, что в случае, когда $k = o(n^{2/3})$, в частности, для любого фиксированного k , последний множитель в (4.7) можно отбросить, поскольку он стремится к 1.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $k \rightarrow \infty$, $(n - k) \rightarrow \infty$, $\alpha := (k + 1/2)/n$; тогда

$$A_{n,k} \approx \frac{\exp(nK(\alpha))}{2\sqrt{n \sin(\pi\alpha)}}, \quad K(\alpha) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi\alpha/2} \ln(\operatorname{ctg} x) dx. \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим сначала, что функция $K(\alpha)$ положительна, возрастает на $(0, 1/2)$, достигает наибольшего значения $K_0 = K(1/2) = 0.583 \dots = \ln 1.79 \dots$ и удовлетворяет (как и знаменатель в формуле (4.8) для $A_{n,k}$) условию симметрии $K(1 - \alpha) = K(\alpha)$, причем переход от α к $1 - \alpha$ в точности соответствует переходу от индекса k к $n - k - 1$. Поэтому мы можем (и будем) далее считать, что $\alpha \leq 1/2$, т.е. $k \leq (n - 1)/2$.

Из сопоставления (4.8) и (4.3) явствует, что

$$K(\alpha) = \frac{2}{\pi} \left(-Q\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - \int_0^{\pi\alpha/2} \ln x \, dx \right) = \frac{2}{\pi} Q\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + \alpha \left(1 + \ln \frac{2}{\pi\alpha} \right), \quad (4.9)$$

а отсюда, с учетом равенства $\alpha n = k + 1/2$, вытекает соотношение

$$\exp(nK(\alpha)) = \exp \left(-\frac{2n}{\pi} Q\left(\frac{\pi(2k+1)}{4n}\right) \right) \left(\frac{4ne}{\pi(2k+1)} \right)^{k+1/2}. \quad (4.10)$$

Далее, поскольку $k \rightarrow \infty$, из формулы Стирлинга следует, что

$$\left(\frac{4ne}{\pi(2k+1)} \right)^{k+1/2} = \frac{\sqrt{4ne}}{\sqrt{\pi(2k+1)}} \left(\frac{e}{k} \right)^k \left(\frac{2n}{\pi} \right)^k \left(\frac{2k}{2k+1} \right)^k \approx \frac{2\sqrt{n}}{k!} \left(\frac{2n}{\pi} \right)^k. \quad (4.11)$$

Соединяя (4.11), (4.10) и (4.6), получаем (4.8); следствие 5 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из (4.8) вытекает асимптотика максимального (при заданном n) из чисел $A_{n,k}$, которое в силу свойства регулярности (следствие 2) есть, разумеется, $A_{n,[n-1/2]}$, а именно: $\max_k A_{n,k} \approx e^{nK_0}/2\sqrt{n}$; более грубый результат $\max_k \ln A_{n,k} \approx nK_0$ был установлен ранее в [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Переходя в (4.8) к логарифмам, устремляя α к 0 и замечая, что при этом первое слагаемое в конце цепочки (4.9) бесконечно мало относительно второго, получаем утверждение: *если $n, k, n/k \rightarrow \infty$, то $\ln A_{n,k} \approx k \ln(n/k)$* .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Используя известный прием [1, п. 2.4.3], включающий растяжения $f(x) \rightarrow f(tx)$, $t > 0$, мы можем перейти от (1.2) к равносильным неравенствам типа Ландау–Колмогорова с точными константами в мультипликативной форме:

$$\|f^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+^1)} \leq K_{n,k} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+^1)}^\beta \|f^{(n)}\|_{L_2(\mathbb{R}_+^1)}^\alpha, \\ K_{n,k} := A_{n,k} \alpha^{-\alpha/2} \beta^{-\beta/2}, \quad \alpha = \alpha_{n,k} := \frac{2k+1}{2n}, \quad \beta = \beta_{n,k} := 1 - \alpha_{n,k}.$$

Автор выражает глубокую благодарность В. М. Тихомирову, В. И. Буренкову и Л. Д. Кудрявцеву за внимание к работе, а также С. М. Никольскому, Г. Г. Магарил-Ильяеву и С. И. Похожаеву за ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. Изд-во МГУ, М., 1976.
2. Габуилин В. Н. О наилучшем приближении оператора дифференцирования на полуоси. Матем. заметки, **6**, №5, 573–582 (1969).
3. Тайков Л. В. Неравенства колмогоровского типа и наилучшие формулы численного дифференцирования. Матем. заметки, **4**, №2, 233–238 (1968).

4. *Калябин Г. А.* Наилучшие операторы продолжения для соболевских пространств на полупрямой. Функц. анализ и его прил., **36**, вып. 2, 28–37 (2002).
5. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Наука, М., 1981.
6. *Ахизер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. Наука, М., 1965.
7. *Kalyabin G. A.* On extrapolation with minimal norms in Bernstein classes. Proc. Razmadze Math. Inst., **119**, 85–92 (1999).
8. *Калябин Г. А.* О точных константах в неравенствах Колмогорова для пространств Соболева $W_2^n(\mathbb{R}_+)$. Докл. РАН, **388**, №2, 159–161 (2003).
9. *Калябин Г. А.* Асимптотика наименьших собственных значений матриц типа Гильберта. Функц. анализ и его прил., **35**, вып. 1, 80–84 (2001).
10. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. Наука, М., 1983.

Институт систем обработки изображений РАН
Самарская гуманитарная академия
email: kalyabin@mb.ssau.ru, kalyabin@lycos.com

Поступило в редакцию
16 июня 2003 г.