Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Киселев, С. Н. Набоко, Несамосопряженные операторы с почти эрмитовым спектром: слабые аннуляторы, *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 3, 39–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa116>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 03:58:41

УДК 517.9

Несамосопряженные операторы с почти эрмитовым спектром: слабые аннуляторы*

© 2004. А. В. КИСЕЛЕВ, С. Н. НАБОКО

*Посвящается В. Б. Лидскому
в связи с его восьмидесятилетием*

§1. Введение

В настоящей работе рассматривается класс несамосопряженных недиссипативных ядерных аддитивных возмущений $L = A + iV$ ограниченного самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве H . Операторы указанного класса активно изучались в работах [16, 17, 6, 4, 5] (результаты для операторов, «близких к унитарным», содержатся в [19, 13, 9, 10]). Основной целью исследования является изучение свойств сингулярного спектрального подпространства N_i оператора L (определения содержатся в §2).

Напомним [18], что спектральные подпространства $N_i^+, N_i^-, N_i^0 \subset N_i$ выделяются естественным образом для произвольного несамосопряженного оператора L из указанного класса. Здесь подпространство N_i^+ (N_i^-) [17] соответствует точечному спектру в верхней полуплоскости и части вещественного сингулярного спектра (точечному спектру в нижней полуплоскости и части вещественного сингулярного спектра соответственно) и полностью аналогично сингулярному подпространству диссипативного (сопряженного к диссипативному) вполне несамосопряженного [25] оператора. Подпространство N_i^0 (введенное в [18], см. также [6, 4]) соответствует части вещественного сингулярного спектра и играет особую роль в спектральной теории несамосопряженного недиссипативного оператора. В некотором смысле большая часть новых свойств недиссипативных операторов (по сравнению с диссипативными и сопряженными к диссипативным) связана с наличием и свойствами подпространства N_i^0 . Следует также отметить, что подпространство N_i^0 играет особую роль и в изучении задачи подобия оператора L диссипативному, см. [18].

При наложении дополнительного условия «слабости» взаимодействия между положительной и отрицательной частями возмущения в работе [17] установлено тождество $N_i^0 = \{0\}$ и доказано, что углы между спектральными подпространствами N_e , N_i^+ и N_i^- положительны. Более того, можно показать, что с точки зрения задачи подобия (самосопряженному или диссипативному оператору) оператор L , по существу, ведет себя как ортогональная сумма диссипативного оператора и оператора, сопряженного к диссипативному.

Тем не менее в общем случае сингулярное подпространство N_i^0 нетривиально, что может приводить к пересечению подпространств N_e и N_i под нулевым

* Авторы благодарны за финансовую поддержку РФФИ (грант 03-01-00090) и IRCSET.

углом и даже к нетривиальности их пересечения [6]. С другой точки зрения, наличие N_i^0 как таковое еще не влечет за собой этих артефактов (см. [4, 5], где показано, что задача подобия может иметь положительное решение, а углы между спектральными подпространствами могут быть оценены снизу даже в случае нетривиальности N_i^0 , см. также [9, 10]).

В настоящей работе обсуждается другая важная особенность спектрального подпространства N_i^0 , которая состоит в том, что, по существу, его свойства до некоторой степени напоминают свойства сингулярного спектрального подпространства самосопряженного оператора. А именно, в работе доказано, что оператор L и сопряженный к нему оператор L^* слабо аннулируются (см. определение в §3) некоторыми скалярными ограниченными внешними аналитическими функциями в том и только том случае, когда они оба удовлетворяют условию $N_i^0 = H$ (см. также [20], где обсуждается существование внутреннего аннулятора для сжатий класса C_0). Данный результат обобщает хорошо известное тождество Кели на случай несамосопряженных операторов указанного класса.

Для получения описанных результатов в настоящей работе оказывается весьма удобным использование методов функциональной модели несамосопряженного недиссипативного оператора, разработанной в [16] (§2 настоящей работы частично посвящен изложению необходимых нам фактов, касающихся данной модели). В качестве модельного пространства здесь выбирается пространство дилатации [25] диссипативного оператора, близкого исходному, в котором оказывается возможным описать действие резольвенты последнего для всех значений спектрального параметра. Наиболее удобной для использования оказывается «симметричная» форма функциональной модели диссипативного оператора [21], причем в этом случае в формулы для действия резольвенты естественным образом входят компоненты треугольной факторизации характеристической функции оператора. Такое описание позволяет определить абсолютно непрерывное и сингулярные подпространства сначала в модели, а затем и переписать определения в терминах исходного гильбертова пространства и операторов в нем.

§2. Функциональная модель. Свойства подпространства N_i^0

Функциональная модель несамосопряженного оператора была построена в [25, 21] для диссипативного оператора и обобщена затем в [14–16, 23] на широкий класс недиссипативных операторов. Мы рассматриваем класс операторов вида [16] $L = A + iV$, где A – самосопряженный оператор в H на области определения $D(A)$, а возмущение V допускает факторизацию $V = \alpha J \alpha / 2$, где α – неотрицательный самосопряженный оператор в H и J – унитарный оператор в E , вспомогательном гильбертовом пространстве, получаемом замыканием области значений оператора α , $E \equiv \overline{R(\alpha)}$. Данная факторизация отвечает полярному разложению оператора V . Также она допускает обобщение и на случай «узлов» [3]: в этом случае J действует во вспомогательном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и $V = \alpha^* J \alpha / 2$, α – оператор, действующий из H в $\mathfrak{H}$. Для придания строгого смысла выражению $A + iV$ мы налагаем на оператор V условие (A) -ограниченности с относительной границей, меньшей 1, т. е. $D(A) \subset D(V)$ и для некоторых a и b ($a < 1$) выполнено условие $\|Vu\| \leq a\|Au\| + b\|u\|$,

$u \in D(A)$, см. [11]. В этом случае оператор L определен на области определения $D(L) = D(A)$.

Наряду с оператором L рассмотрим максимальный диссипативный оператор $L^\parallel = A + i\frac{\alpha^2}{2}$ и сопряженный к нему оператор $L^{-\parallel} \equiv L^{\parallel*} = A - i\frac{\alpha^2}{2}$. Так как ниже нами используется функциональная модель диссипативного оператора $L^\parallel$, мы предполагаем, что оператор $L^\parallel$ является вполне самосопряженным, т.е. не содержит приводящих самосопряженных частей. Данное требование в нашем случае не является ограничением в силу предложения 1 из [16].

Вкратце опишем, следуя [25, 21] (см. также [16]), построение самосопряженной дилатации вполне самосопряженного диссипативного оператора $L^\parallel$.

Характеристическая функция $S(\lambda)$ оператора $L^\parallel$ является сжимающей аналитической операторнозначной функцией в гильбертовом пространстве E , определенной для $\text{Im } \lambda > 0$ тождеством $S(\lambda) = I + i\alpha(L^{-\parallel} - \lambda)^{-1}\alpha$. В случае неограниченности оператора α характеристическая функция сначала определяется последним выражением на линейале $E \cap D(\alpha)$, а затем продолжается по непрерывности на все пространство E . Приведенное выше определение позволяет рассмотреть $S(\lambda)$ и для $\text{Im } \lambda < 0$: $S(\bar{\lambda}) = (S^*(\lambda))^{-1}$. Наконец, $S(\lambda)$ обладает граничными значениями на вещественной оси в смысле сильной топологии: $S(k) \equiv S(k + i0)$, $k \in \mathbb{R}$ (см. [25]).

Рассмотрим модельное пространство $\mathcal{H} = L_2\left(\begin{smallmatrix} I & S^* \\ S & I \end{smallmatrix}\right)$, определенное в [21] (см. также описание общих бескоординатных моделей в [19]) как гильбертово пространство двухкомпонентных вектор-функций $(\tilde{g}, g)$ на оси $(\tilde{g}(k), g(k)) \in E$, $k \in \mathbb{R}$ с метрикой

$$\left\langle \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \begin{pmatrix} I & S^*(k) \\ S(k) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{g}(k) \\ g(k) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{g}(k) \\ g(k) \end{pmatrix} \right\rangle_{E \oplus E} dk. \quad (2.1)$$

Здесь предполагается, что пространство двухкомпонентных функций факторизовано по множеству элементов с нулевой нормой. Несмотря на то, что $(\tilde{g}, g)$ рассматривается нами лишь как символ, можно показать, что формальные выражения $g_- := (\tilde{g} + S^*g)$ и $g_+ := (S\tilde{g} + g)$ отвечают некоторым настоящим $L_2(E)$ -функциям на вещественной оси [16]. Ниже мы в основном работаем именно с этими функциями.

Определим следующие ортогональные подпространства в $\mathcal{H}$:

$$D_- \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ H_2^-(E) \end{pmatrix}, \quad D_+ \equiv \begin{pmatrix} H_2^+(E) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K \equiv \mathcal{H} \ominus (D_- \oplus D_+),$$

где $H_2^{+(-)}(E)$ обозначает класс Харди [25] аналитических функций f в верхней (нижней) полуплоскости со значениями в гильбертовом пространстве E .

Подпространство K может быть описано следующим образом: $K = \{(\tilde{g}, g) \in \mathcal{H} : \tilde{g} + S^*g \in H_2^-(E), S\tilde{g} + g \in H_2^+(E)\}$. Пусть P_K — ортогональный проектор пространства $\mathcal{H}$ на K ; тогда [21]

$$P_K \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{g} - P_+(\tilde{g} + S^*g) \\ g - P_-(S\tilde{g} + g) \end{pmatrix},$$

где $P_\pm$ — ортогональные проекторы пространства $L_2(E)$ на $H_2^\pm(E)$.

Справедлива следующая теорема [25, 21]:

ТЕОРЕМА 2.1. Оператор $(L^\parallel - \lambda_0)^{-1}$ унитарно эквивалентен оператору $P_K(k - \lambda_0)^{-1}|_K$ для всех λ_0 , $\text{Im } \lambda_0 < 0$.

Иными словами, оператор умножения на k служит минимальной $(\text{clos}_{\text{Im } \lambda \neq 0}(k - \lambda)^{-1}K = \mathcal{H})$ самосопряженной дилатацией [25] для оператора $L^\parallel$.

При условии, что не вещественный спектр оператора L образует счетное множество, характеристическая функция оператора L определяется для $\text{Im } \lambda \neq 0$ выражением $\Theta(\lambda) \equiv I + iJ\alpha(L^* - \lambda)^{-1}\alpha$ и при наложении дополнительного условия относительной компактности возмущения V по отношению к оператору $A^{(1)}$ является мероморфной J -сжимающей ($\Theta^*(\lambda)J\Theta(\lambda) \leq J$, $\text{Im } \lambda > 0$) оператор-функцией [2]. Характеристическая функция $\Theta(\lambda)$ допускает [2, 14] факторизацию (называемую также факторизацией Гинзбурга–Потапова J -сжимающей функции [1]), имеющую вид отношения двух ограниченных аналитических (в соответствующих полуплоскостях $\text{Im } \lambda < 0$, $\text{Im } \lambda > 0$) оператор-функций, треугольную по отношению к разложению пространства E в ортогональную сумму $E = (\mathcal{X}_+ E) \oplus (\mathcal{X}_- E)$, $\mathcal{X}_\pm := (I \pm J)/2$,

$$\Theta(\lambda) = \Theta_1^*(\bar{\lambda})(\Theta_2^*)^{-1}(\bar{\lambda}), \quad \text{Im } \lambda > 0, \quad \Theta(\lambda) = \Theta_2^*(\bar{\lambda})(\Theta_1^*)^{-1}(\bar{\lambda}), \quad \text{Im } \lambda < 0, \quad (2.2)$$

где (см. [15])

$$\begin{aligned} \Theta_1(\lambda) &= \mathcal{X}_- + S(\lambda)\mathcal{X}_+, & \Theta_2(\lambda) &= \mathcal{X}_+ + S(\lambda)\mathcal{X}_-, \\ \Theta_1'(\lambda) &= \mathcal{X}_- + S^*(\bar{\lambda})\mathcal{X}_+, & \Theta_2'(\lambda) &= \mathcal{X}_+ + S^*(\bar{\lambda})\mathcal{X}_-, \end{aligned}$$

а $S(\lambda)$ является характеристической функцией диссипативного оператора $L^\parallel$.

Следуя [15], определим линеалы $\hat{N}_\pm$ в $\mathcal{H}$ следующим образом:

$$\hat{N}_\pm \equiv \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{H}, P_\pm(\Theta_1'^* \tilde{g} + \Theta_2^* g) \equiv P_\pm(\mathcal{X}_+ g_+ + \mathcal{X}_- g_-) = 0 \right\},$$

и введем обозначение $N_\pm = \text{clos } P_K \hat{N}_\pm$. Тогда, как показано в [16], для $\text{Im } \lambda < 0$ ($\text{Im } \lambda > 0$) и $(\tilde{g}, g) \in \hat{N}_{-(+)}$ соответственно имеем

$$(L - \lambda)^{-1} P_K \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} = P_K \frac{1}{k - \lambda} \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Обратно, выполнение условия (2.3) для $\text{Im } \lambda < 0$ ($\text{Im } \lambda > 0$) гарантирует принадлежность вектора $(\tilde{g}, g)$ множеству $\hat{N}_{-(+)}$.

Абсолютно непрерывное и сингулярное подпространства несамосопряженного оператора L определены в [14]: пусть $N \equiv \hat{N}_+ \cap \hat{N}_-$, $\tilde{N}_\pm \equiv P_K \hat{N}_\pm$, $\tilde{N}_e \equiv \tilde{N}_+ \cap \tilde{N}_-$. Тогда²⁾

$$N_e \equiv \text{clos}(\tilde{N}_+ \cap \tilde{N}_-) = \text{clos } P_K N \equiv \text{clos } \tilde{N}_e, \quad N_i \equiv K \ominus N_e(L^*), \quad (2.4)$$

где $N_e(L^*)$ — абсолютно непрерывное подпространство оператора L^* .

¹⁾ Данное предположение гарантирует дискретность не вещественного спектра оператора L .

²⁾ Линеал $\tilde{N}_e$ носит название множества «гладких» векторов оператора L (см. [16]).

Данное определение в случае максимального диссипативного оператора совпадает с классическим определением Л. А. Сахновича [24] и позднее разрабатывалось В. А. Рыжовым (в случае более общих недиссипативных операторов) [23] и А. С. Тихоновым (так называемое слабое определение абсолютно непрерывного подпространства). Недавно было установлено, что слабое определение совпадает с сильным (2.4) (см. [22]).

Сингулярные спектральные подпространства $N_i^0 \subset N_i$, $N_i^0(L^*) \subset N_i(L^*)$ были введены в [18], см. также [6]: $N_i^0 \equiv K \ominus \{N_+(L^*) \vee N_-(L^*)\}$, $N_i^0(L^*) \equiv K \ominus \{N_+ \vee N_-\}$. Можно также показать (см. [6]), что подпространство N_i^0 во всяком случае содержит все собственные и корневые векторы оператора L , отвечающие вещественным значениям спектрального параметра λ .

В дополнение к приведенному выше определению, сформулированному в терминах функциональной модели, дадим описание спектрального подпространства N_i^0 и в терминах исходного гильбертова пространства и операторов в нем.

ЛЕММА 2.2. Пусть несамосопряженный оператор L таков, что все операторнозначные функции в факторизации (2.2) обладают скалярными кратными [25, 16]. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) вектор $u \in H$ принадлежит сингулярному спектральному подпространству N_i^0 ;
- (ii) вектор $u \in H$ принадлежит сингулярному спектральному подпространству N_i , а вектор $\alpha(L - \lambda)^{-1}u$ принадлежит векторным классам Смирнова¹⁾ $N_2^\pm(E)$ [19], т. е. допускает представление $h_\pm(\lambda)/\delta_\pm(\lambda)$, где $h_\pm \in H_2^\pm(E)$, а $\delta_\pm(\lambda)$ являются скалярными внешними аналитическими в полуплоскостях $\mathbb{C}_\pm$ функциями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что в [6] приведено следующее описание подпространства N_i^0 в модельном представлении:

$$N_i^0 = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} \in K : g_+ = (\Theta_1)_i v_+, g_- = (\Theta'_2)_i v_-, \text{ где } v_\pm \in H_2^\pm(E) \right\}. \quad (2.5)$$

Здесь использована каноническая факторизация [25] оператор-функций Θ_1 и Θ'_2 в произведение их внутренних и внешних частей, $\Theta_1 = (\Theta_1)_i(\tilde{\Theta}_1)_e$, $\Theta'_2 = (\Theta'_2)_i(\tilde{\Theta}'_2)_e$. В условиях леммы 2.2 все оператор-функции, входящие в эту каноническую факторизацию, также обладают скалярными кратными [25].

Пусть теперь $u \in N_i^0$. Используя тождества $\sqrt{2\pi}g_+(\lambda) = -\Theta_1(\lambda)\alpha(L - \lambda)^{-1}u$, $\sqrt{2\pi}g_-(\lambda) = -\Theta'_2(\lambda)\alpha(L - \lambda)^{-1}u$ (см. [16]) и описание (2.5), немедленно получаем, что $\alpha(L - \lambda)^{-1}u = -\sqrt{2\pi}(\Theta_1)_e^{-1}(\lambda)v_+(\lambda) = -\sqrt{2\pi}\delta_+^{-1}(\lambda)\Omega(\lambda)v_+(\lambda)$, где $\Omega(\lambda)(\Theta_1)_e(\lambda) = (\Theta_1)_e(\lambda)\Omega(\lambda) = \delta_+(\lambda)I$, т. е. функция δ_+ является скалярным кратным оператор-функции $(\Theta_1)_e$ и, следовательно, может быть выбрана внешней аналитической функцией в верхней полуплоскости [25]. В свою очередь, $\Omega(\lambda)$ – ограниченная оператор-функция в $\mathbb{C}_+$. Аналогичное рассуждение в применении к вектору g_- завершает доказательство импликации (i) $\implies$ (ii).

Обратно, если выполнено (ii), то $g_+(\lambda) = -(1/\sqrt{2\pi})\Theta_1(\lambda)h_+(\lambda)/\delta_+(\lambda)$ с некоторой скалярной аналитической функцией δ_+ , внешней в верхней полуплоскости, и E -значной функцией $h_+ \in H_2^+(E)$.

¹⁾То есть аналитические продолжения вектора $\alpha(L - \lambda)^{-1}u$ из области аналитичности резольвенты в полуплоскости $\mathbb{C}_\pm$ существуют и принадлежат соответствующим классам Смирнова.

Положим $v_+(\lambda) = -(1/\sqrt{2\pi})(\tilde{\Theta}_1)_e(\lambda)h_+(\lambda)/\delta_+(\lambda)$. Достаточно доказать, что $v_+ \in H_2^+(E)$. Так как $\delta_+(\lambda)$ внешняя в верхней полуплоскости, это немедленно следует из векторной версии теоремы Смирнова [7] и того факта, что $g_+ \in H_2^+$, в то время как оператор-функция $(\Theta_1)_i(t+i0)$ является унитарной для п. в. $t \in \mathbb{R}$. Аналогичное рассмотрение вектора $g_-(\lambda)$ завершает доказательство. $\square$

Назовем оператор, для которого выполнены тождества $H = N_i^0 = N_i^0(L^*)$, оператором с почти эрмитовым спектром. Спектр оператора $L|_{N_i^0}$ веществен [6]; в то же время, для использования предложенного термина существуют и гораздо более глубокие основания (см. также [6, 4, 5]). Подробному обсуждению этой темы будет посвящена отдельная работа. Здесь достаточно отметить, что в матричном случае (т. е. при $\dim(H) < \infty$) класс операторов с почти эрмитовым спектром совпадает с классом вполне несамосопряженных матриц, обладающих вещественным спектром.

§3. Слабый аннулятор и его влияние на спектральную структуру

Дадим сначала следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $\gamma(\lambda)$ — внешняя [7] в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ равномерно ограниченная скалярная аналитическая функция. Назовем эту функцию *слабым аннулятором* несамосопряженного оператора L , если выполнено условие $w\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \gamma(L + i\varepsilon) = 0$.

В случае ограниченности оператора L функция $\gamma(L + i\varepsilon)$ может быть определена с использованием стандартного функционального исчисления Рисса–Данфорда [8] (при этом мы предполагаем формально, что функция $\gamma(\lambda)$ тождественно равна нулю в некоторой окрестности спектра оператора L в $\mathbb{C}_-$). Более общее функциональное исчисление несамосопряженных операторов обсуждается в [25].

Следующая лемма описывает следствия существования слабого аннулятора для не вещественной части спектров операторов L и L^* .

ЛЕММА 3.2. Пусть $L = A + iV$ — ограниченный несамосопряженный оператор с ядерной мнимой частью $V \in \mathfrak{S}_1$. Тогда

- (i) если у оператора L существует внешний ограниченный слабый аннулятор $\gamma(\lambda)$, то дискретный спектр этого оператора в верхней полуплоскости пуст, $\sigma(L) \cap \mathbb{C}_+ = \emptyset$;
- (ii) если у оператора L^* существует внешний ограниченный слабый аннулятор $\gamma_*(\lambda)$, то дискретный спектр оператора L в нижней полуплоскости пуст, $\sigma(L) \cap \mathbb{C}_- = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим импликацию (i); (ii) доказывается переходом к сопряженному оператору.

Из условий, наложенных на оператор L , следует [11], что спектр этого оператора дискретен в открытых верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости. Пусть λ_0 , $\text{Im } \lambda_0 > 0$, — собственное значение оператора L и u_0 — соответствующий собственный вектор. Тогда, очевидно, $\gamma(L + i\varepsilon)u_0 = \gamma(\lambda_0 + i\varepsilon)u_0$. Слабый предел последнего выражения при $\varepsilon \rightarrow 0$ существует и равен $\gamma(\lambda_0)u_0$. Следовательно, так как $\gamma(\lambda)$ — внешняя функция в верхней полуплоскости, $u_0 = 0$. $\square$

Покажем теперь, что из существования слабого аннулятора следует тривиальность абсолютно непрерывного подпространства оператора L .

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $L = A + iV$ — ограниченный несамосопряженный оператор с ядерной мнимой частью $V \in \mathfrak{S}_1$. Пусть спектр оператора L веществен. Тогда из существования либо внешнего ограниченного слабого аннулятора $\gamma(\lambda)$ у оператора L , либо соответствующего аннулятора у оператора L^* следует, что абсолютно непрерывные подпространства операторов L и L^* тривиальны, $N_e(L) = N_e(L^*) = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\gamma(\lambda)$ — слабый аннулятор для оператора L (случай существования слабого аннулятора у сопряженного оператора сводится к данному переходом к сопряжению). Пусть абсолютно непрерывное подпространство оператора L нетривиально. Тогда существует ненулевой гладкий вектор $(\tilde{g}, g) \in N$, для которого выполнено условие (2.3) при всех не вещественных λ . Принимая теперь во внимание предположение об отсутствии не вещественного спектра, получаем

$$\begin{aligned} \gamma(L + i\varepsilon)P_K \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2\pi i} \oint \gamma(\lambda)(L + i\varepsilon - \lambda)^{-1}P_K \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint \gamma(\lambda)P_K \frac{1}{k + i\varepsilon - \lambda} \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} d\lambda = P_K \left[-\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\gamma(\lambda) d\lambda}{k + i\varepsilon - \lambda} \right] \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В качестве контура интегрирования здесь может быть выбран произвольный кусочно-гладкий контур, охватывающий спектр оператора $L + i\varepsilon$ и полностью погруженный в верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+$.

Таким образом, мы приходим к следующей формуле:

$$\gamma(L + i\varepsilon)P_K \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} = P_K \gamma(k + i\varepsilon) \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

для всякого $(\tilde{g}, g) \in N$. Так как $\gamma(\lambda)$ слабо аннулирует оператор L , из теоремы Лебега о предельном переходе вытекает, что на всех векторах $(\tilde{g}, g)$ из линейала N справедливо тождество

$$P_K \gamma(k) \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} = 0, \quad (3.3)$$

где $\gamma(k) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \gamma(k + i\varepsilon)$, причем предел существует для п. в. $k \in \mathbb{R}$ по теореме Фату [7].

Воспользуемся тем [16], что линейал N состоит из векторов $(\tilde{g}, g)$, для которых $\Theta_1^*(k)\tilde{g} + \Theta_2^*(k)g = 0$. Тогда для всякой ограниченной скалярной функции $\beta(k)$ вектор $\beta(k)(\tilde{g}, g)$ также принадлежит N . Рассмотрим последовательность множеств $\delta_n \subset \mathbb{R}$, определенных для всех натуральных n следующим образом: $\delta_n := \{k \in \mathbb{R} : |\gamma(k)| \geq 1/n\}$, и построим соответствующую последовательность характеристических функций $\mathcal{X}_n$. Очевидно, что для всякого n функция $\mathcal{X}_n(k)/\gamma(k)$ является ограниченной на вещественной оси. Следовательно,

$$P_K \gamma(k) \left[\frac{\mathcal{X}_n(k)}{\gamma(k)} \right] \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} \equiv P_K \mathcal{X}_n(k) \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} = 0,$$

и наконец, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем $P_K(\tilde{g}, g) = 0$, из чего вытекает, что $\tilde{N}_e = \{0\}$.

Для сопряженного оператора L^* рассмотрим внешнюю ограниченную аналитическую в нижней полуплоскости функцию $\gamma_1(\lambda)$, определенную тождеством

$\gamma_1(\lambda) := \overline{\gamma(\bar{\lambda})}$. Пользуясь (3.1), легко видеть, что $\gamma_1(L^* - i\varepsilon) \xrightarrow{w} 0$ тогда и только тогда, когда $\gamma(\lambda)$ слабо аннулирует оператор L . Таким образом, вычисление, аналогичное приведенному выше, показывает, что абсолютно непрерывное подпространство оператора L^* также тривиально, что и завершает доказательство. $\square$

Следующая лемма устанавливает следствия существования слабого аннулятора для гладких векторов операторов L и L^* соответственно.

ЛЕММА 3.4. Пусть $L = A + iV$ — ограниченный несамосопряженный оператор с ядерной мнимой частью $V \in \mathfrak{S}_1$. Пусть внешние ограниченные в верхней полуплоскости функции $\gamma(\lambda)$ и $\gamma_*(\lambda)$ слабо аннулируют операторы L и L^* соответственно. Тогда линейалы $\tilde{N}_\pm, \tilde{N}_\pm(L^*)$ тривиальны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $\tilde{N}_\pm = \{0\}$; соответствующий результат для сопряженного оператора L^* может быть получен аналогичным образом.

В первую очередь отметим, что из леммы 3.2 немедленно следует вещественность спектров операторов L и L^* .

Далее, как и в доказательстве предыдущей теоремы, легко получить следующую формулу:

$$\gamma(L + i\varepsilon)P_K \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\pi i} \oint \gamma(\lambda)(L + i\varepsilon - \lambda)^{-1}P_K \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} d\lambda,$$

где $(\tilde{g}, g) \in \tilde{N}_-$ и контур интегрирования выбран соответствующим образом.

Без ограничения общности предположим, что функция $\gamma(\lambda)$ не только ограничена, но и удовлетворяет асимптотической оценке $O(1/\lambda^2)$ при $|\lambda| \gg 1$. В самом деле, если это не так для $\gamma(\lambda)$, рассмотрим функцию $\tilde{\gamma}(\lambda) := \gamma(\lambda)/(\lambda + i)^2$. Очевидно, что она тоже внешняя и ограниченная в $\mathbb{C}_+$. Также очевидно, что в условиях леммы она аннулирует L , поскольку $\gamma(L + i\varepsilon)(L + i\varepsilon + i)^{-2} \xrightarrow{w} 0$.

Модифицируем контур интегрирования Γ следующим образом: $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, где $\Gamma_1 = \{\lambda : \lambda = t + i\varepsilon/2, t \in [-R, R]\}$, а Γ_2 — сегмент окружности радиуса R в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, соединяющий концы отрезка Γ_1 . Переходя к пределу при $R \rightarrow +\infty$ и используя асимптотику функции $\gamma(\lambda)$, заключаем, что

$$\begin{aligned} \gamma(L + i\varepsilon)P_K \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t + i\varepsilon/2)(L + i\varepsilon/2 - t)^{-1}P_K \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} dt \\ &= P_K \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t + i\varepsilon/2) \frac{1}{k + i\varepsilon/2 - t} dt \right] \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где использован тот факт, что вектор $(\tilde{g}, g)$ принадлежит линейалу $\tilde{N}_-$.

Вычисляя интеграл в последнем выражении, приходим к формуле (3.2). Так как $\gamma(\lambda)$ аннулирует оператор L (см. с. 45), заключаем, что для всех векторов $(\tilde{g}, g) \in \tilde{N}_-$ справедливо тождество (3.3).

Вспомним [16], что линейал $\tilde{N}_-$ состоит из векторов $(\tilde{g}, g)$, удовлетворяющих условию $P_-(\Theta_1^*(k)\tilde{g} + \Theta_2^*(k)g) = 0$. Таким образом, для всякой функции $\beta(k)$ из $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ вектор $\beta(k)(\tilde{g}, g)$ также принадлежит линейалу $\tilde{N}_-$.

Как и в доказательстве теоремы 3.3 (с учетом необходимых модификаций, сохраняющих аналитичность, см., например, [6]) мы можем ввести в рассмотрение такую последовательность ограниченных аналитических в верхней полуплоскости функций $\mathcal{X}'_n(k)$, что для всякого натурального n функция $\mathcal{X}'_n(k)/\gamma(k)$

принадлежит $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ и $\mathcal{X}'_n(k) \rightarrow 1$ для п. в. вещественных k . Тогда

$$P_K \gamma(k) \left[\frac{\mathcal{X}'_n(k)}{\gamma(k)} \right] \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} \equiv P_K \mathcal{X}'_n(k) \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} = 0,$$

из чего следует равенство $\tilde{N}_- = \{0\}$.

Соответствующий результат для $\tilde{N}_+$ получается из рассмотрения ограниченной внешней в нижней полуплоскости функции $\gamma_2(\lambda) := \gamma_*(\bar{\lambda})$ аналогично доказательству теоремы 3.3. $\square$

Используя определение спектрального подпространства N_i^0 (см. §2), сформулируем следствие результатов, доказанных в этой части работы, в таком виде:

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $L = A + iV$ — ограниченный несамосопряженный оператор с ядерной мнимой частью $V \in \mathfrak{S}_1$. Пусть внешние ограниченные в верхней полуплоскости функции $\gamma(\lambda)$ и $\gamma_*(\lambda)$ слабо аннулируют операторы L и L^* соответственно. Тогда оба оператора L и L^* являются операторами с почти эрмитовым спектром, т. е. $H = N_i^0(L) = N_i^0(L^*)$.

§4. Существование слабого аннулятора

В настоящем параграфе мы устанавливаем факт существования слабого аннулятора для обоих операторов L и L^* при наложении дополнительных условий на спектральную структуру оператора L . Докажем сначала следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $L = A + iV$ — ограниченный несамосопряженный оператор с ядерной мнимой частью $V \in \mathfrak{S}_1$. Пусть оператор L обладает почти эрмитовым спектром, т. е. $H = N_i^0$. Тогда существует ограниченная внешняя в верхней полуплоскости функция $\gamma(\lambda)$, слабо аннулирующая оператор L . Более того, эта функция может быть выбрана следующим образом¹⁾:

$$\gamma(\lambda) = \det(\Theta_1(\lambda)) \equiv \det(\mathcal{X}_+ S(\lambda) \mathcal{X}_+). \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим сначала, что в условиях теоремы функция $\gamma(\lambda)$ является ограниченной внешней в верхней полуплоскости функцией. Действительно, так как спектр оператора L почти эрмитов, т. е. $N_i^0(L) = H$, все оператор-функции в факторизации (2.2) являются внешними и ограниченными (на самом деле сжимающими) в соответствующих полуплоскостях [6] и, следовательно, их определители также являются внешними и ограниченными [25, 16].

Как и при доказательстве леммы 3.4, с использованием исчисления Рисса–Данфорда получаем

$$\begin{aligned} \left\langle \gamma(L + i\varepsilon) P_K \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ f \end{pmatrix} \right\rangle &= -\frac{1}{2\pi i} \oint \gamma(\lambda) \left\langle (L + i\varepsilon - \lambda)^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ f \end{pmatrix} \right\rangle d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-\infty + 3i\varepsilon/2}^{+\infty + 3i\varepsilon/2} - \int_{-\infty + i\varepsilon/2}^{+\infty + i\varepsilon/2} \right) \gamma(\lambda) \left\langle (L + i\varepsilon - \lambda)^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ f \end{pmatrix} \right\rangle d\lambda, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где модификация контура интегрирования произведена на основании асимптотических свойств функции $\gamma(\lambda)$.

¹⁾В (4.1) $\mathcal{X}_+ S(\lambda) \mathcal{X}_+$ рассматривается как оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{X}_+ H$.

Используем формулы, полученные в [16] для действия резольвенты оператора L в модельном представлении на всем пространстве K по отдельности для значений спектрального параметра, принадлежащих верхней и нижней полуплоскостям (см. также §1 и §2 настоящей работы),

$$(L - \lambda)^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} = P_K \frac{1}{k - \lambda} \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} - P_K \frac{1}{k - \lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{X}_- \Theta_2'^{-1}(\lambda) g_-(\lambda) \end{pmatrix},$$

где $(\tilde{g}, g) \in K$, а $\lambda \in \mathbb{C}_-$, и

$$(L - \lambda)^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} = P_K \frac{1}{k - \lambda} \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix} - P_K \frac{1}{k - \lambda} \begin{pmatrix} \mathcal{X}_+ \Theta_1^{-1}(\lambda) g_+(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $(\tilde{g}, g) \in K$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, а $g_+(\lambda) \equiv (S\tilde{g} + g)(\lambda)$, $g_-(\lambda) \equiv (\tilde{g} + S^*g)(\lambda)$ — значения в точке λ аналитических продолжений функций $g_{\pm} \in H_2^{\pm}(E)$ в верхнюю и нижнюю полуплоскости соответственно. По формуле Коши с использованием (2.1) получаем

$$\begin{aligned} \left\langle \gamma(L + i\varepsilon) \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ f \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \gamma(k + i\varepsilon) \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ f \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma\left(t + i\frac{\varepsilon}{2}\right) \left\langle \frac{1}{k - (t - i\frac{\varepsilon}{2})} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{X}_- \Theta_2'^{-1}(t - i\frac{\varepsilon}{2}) g_-(t - i\frac{\varepsilon}{2}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ f \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma\left(t + i\frac{3\varepsilon}{2}\right) \left\langle \frac{1}{k - (t + i\frac{\varepsilon}{2})} \begin{pmatrix} \mathcal{X}_+ \Theta_1^{-1}(t + i\frac{\varepsilon}{2}) g_+(t + i\frac{\varepsilon}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ f \end{pmatrix} \right\rangle dt. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь $\Theta_1^{-1}(\lambda) = \Omega(\lambda)/\gamma(\lambda)$ (соответственно $\Theta_2'^{-1}(\lambda) = \Omega'(\lambda)/\det(\Theta_2'(\lambda))$) с некоторой ограниченной оператор-функцией $\Omega(\lambda)$ ($\Omega'(\lambda)$), внешней в верхней (нижней) полуплоскости (см. [25, 16]). С другой точки зрения, на основании [6] тождество $\det \Theta(\lambda) \equiv 1$ для $\text{Im } \lambda \neq 0$ следует из того, что спектр оператора L почти эрмитов. Тогда из факторизации (2.2) ясно, что $\det(\mathcal{X}_+ S(\lambda) \mathcal{X}_+) = \det(\mathcal{X}_+ + S^*(\lambda) \mathcal{X}_-)$ и, наконец, $\gamma(\lambda) = \det(\Theta_2'(\bar{\lambda}))$.

Легко видеть, что выражение (4.3) может быть переписано теперь следующим образом:

$$\begin{aligned} \left\langle \gamma(L + i\varepsilon) \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ f \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \gamma(k + i\varepsilon) \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ f \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma(t + i\frac{\varepsilon}{2})}{\gamma(t + i\frac{\varepsilon}{2})} \left\langle \mathcal{X}_- \Omega' \begin{pmatrix} t - i\frac{\varepsilon}{2} \\ g_- \end{pmatrix}, f_+ \begin{pmatrix} t + i\frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma(t + i\frac{3\varepsilon}{2})}{\gamma(t + i\frac{\varepsilon}{2})} \left\langle \mathcal{X}_+ \Omega \begin{pmatrix} t + i\frac{\varepsilon}{2} \\ g_+ \end{pmatrix}, f_- \begin{pmatrix} t - i\frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix} \right\rangle dt. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Благодаря аналитическим свойствам функций $g_{\pm} \in H_2^{\pm}(E)$, $f_{\pm} \in H_2^{\pm}(E)$ последнее выражение имеет предел при стремлении ε к 0, и по теореме Лебега о

предельном переходе с использованием неравенства Шварца получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\langle \gamma(L + i\varepsilon) \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ f \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\langle \gamma \tilde{f}, g_- \rangle + \langle \gamma f, g_+ \rangle + \langle \mathcal{X}_+ \Omega g_+, f_- \rangle + \frac{\gamma(t)}{\gamma(t)} \langle \mathcal{X}_- \Omega' g_-, f_+ \rangle \right] dt. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь выражение $\int [\langle \gamma \tilde{f}, g_- \rangle + \langle \gamma f, g_+ \rangle] dt$ равно $\langle \gamma(\tilde{g}, g), (\tilde{f}, f) \rangle$ и, следовательно, является осмысленным.

Для того чтобы доказать, что этот предел равен нулю, напомним [6, 13], что для всех $(\tilde{g}, g) \in N_i$ и любого вектора $(\tilde{f}, f) \in K$

$$\left\langle [(L - k - i\varepsilon)^{-1} - (L - k + i\varepsilon)^{-1}] \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ f \end{pmatrix} \right\rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (4.6)$$

для п.в. вещественных k . Вновь используя формулы, описывающие действие резольвенты оператора L в модельном представлении в верхней и нижней полуплоскостях, рассмотрим следующее выражение для произвольных векторов $(\tilde{g}, g), (\tilde{f}, f) \in K \equiv N_i^0 \subset N_i$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \gamma(t + i\varepsilon) \left\langle [(L - t - i\varepsilon)^{-1} - (L - t + i\varepsilon)^{-1}] \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ f \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{\gamma(t + i\varepsilon)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i\varepsilon}{(k - t)^2 + \varepsilon^2} \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ f \end{pmatrix} \right\rangle dk + \langle \mathcal{X}_+ \Omega(t + i\varepsilon) g_+(t + i\varepsilon), f_-(t - i\varepsilon) \rangle \\ & \quad + \frac{\gamma(t + i\varepsilon)}{\gamma(t + i\varepsilon)} \langle \mathcal{X}_- \Omega'(t - i\varepsilon) g_-(t - i\varepsilon), f_+(t + i\varepsilon) \rangle \end{aligned}$$

(ср. (4.4)). Последнее выражение имеет предел при п.в. $t \in \mathbb{R}$, равный подынтегральному выражению в (4.5). С другой точки зрения, из (4.6) следует, что этот предел тождественно равен нулю при п.в. t . Это наблюдение и завершает доказательство. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Из последнего доказательства легко видеть, что в условиях теоремы 4.1 обоснован предельный переход в правой части формулы (4.2) при стремлении ε к 0. Предел при этом равен интегралу от предельных значений подынтегрального выражения.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Заметим, что условие почти эрмитовости спектра для оператора L эквивалентно условию почти эрмитовости спектра сопряженного оператора L^* . В самом деле, из леммы 3.3 работы [6] следует, что подпространство N_i^0 не содержит гладких векторов, т.е. $N_i^0 \cap \tilde{N}_- = N_i^0 \cap \tilde{N}_+ = \{0\}$. Тогда $N_i^0(L^*) = K \ominus \{N_+ \vee N_-\} = K$ по определению N_i^0 . Таким образом, в условиях теоремы 4.1 также существует ограниченная внешняя в верхней полуплоскости функция $\gamma_*(\lambda)$, слабо аннулирующая сопряженный оператор L^* , причем эта функция может быть выбрана следующим образом: $\gamma_*(\lambda) = \det(\Theta_2(\lambda)) \equiv \det(\mathcal{X}_- S(\lambda) \mathcal{X}_-)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Из теорем 3.5 и 4.1 следует, что при условии, что оператор L является ядерным несамосопряженным возмущением ограниченного самосопряженного оператора, операторы L и L^* одновременно слабо аннулируются

некоторыми скалярными ограниченными внешними аналитическими функциями тогда и только тогда, когда они оба обладают почти эрмитовым спектром.

§5. Приложение

Рассмотрим оператор одномерной несамосопряженной модели Фридрихса, т. е. одномерное несамосопряженное возмущение оператора умножения в пространстве $L_2([-1, 1]; d\sigma)$, где предполагается, что $d\sigma$ — конечная положительная мера на интервале $[-1, 1]$, сингулярная по отношению к мере Лебега: $(Lu)(x) = xu(x) + \langle u, \varphi \rangle \psi(x)$, $u, \varphi, \psi \in L_2([-1, 1]; d\sigma)$. Справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть $\varphi(x)\overline{\psi(x)} = 0$ $d\sigma$ -н. в. в интервале $[-1, 1]$. Тогда

- (i) спектр оператора L почти эрмитов, т. е. $N_i^0 = L_2([-1, 1]; d\sigma)$;
- (ii) оператор L слабо аннулируется внешней ограниченной аналитической в верхней полуплоскости функцией

$$\gamma(\lambda) := (2 - i(\|\psi\|\|\varphi\|)^{-1}r_\psi(\lambda) - i(\|\psi\|\|\varphi\|)^{-1}r_\varphi(\lambda) + r_\varphi(\lambda)r_\psi(\lambda))^{-1},$$

где $r_\varphi(\lambda) = \langle \varphi(x)/(x - \lambda), \varphi(x) \rangle$ и $r_\psi(\lambda) = \langle \psi(x)/(x - \lambda), \psi(x) \rangle$.

Доказательство следует из теоремы 4.1 (см. также [12], где приведены формулы для характеристических функций $\Theta(\lambda)$ и $S(\lambda)$). Тот факт, что спектр оператора L почти эрмитов, может быть доказан на основании теоремы Ф. и М. Риссов [7], из которой немедленно следует, что так как наличие гладких векторов у оператора L приводит к принадлежности преобразования Рисса от сингулярной меры пространствам Харди $H_2^\pm$, нарушение условия $N_i^0 = L_2([-1, 1]; d\sigma)$ влечет за собой тождество $\sigma \equiv 0$. Подробности соответствующих вычислений содержатся в [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Наука, М., 1986.
2. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. Наука, М., 1969.
3. Веселов В. Ф. Спектральные разложения несамосопряженных операторов с сингулярным спектром. Дисс. к.ф.-м.н., Л., 1986.
4. Веселов В. Ф. Об отделмости абсолютно непрерывного и сингулярного подпространств недиссипативного оператора. Вестник ЛГУ, сер. 1, вып. 2, 11–17 (1988).
5. Веселов В. Ф. Об отделмости инвариантных подпространств недиссипативного оператора. Вестник ЛГУ, сер. 1, вып. 4, 19–24 (1988).
6. Веселов В. Ф., Набоко С. Н. Определитель характеристической функции и сингулярный спектр несамосопряженного оператора. Матем. сб., **129** (171), №1, 20–39 (1986).
7. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. ИЛ, М., 1963.
8. Данффорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Ч. I: общая теория. ИЛ, М., 1962.
9. Капустин В. В. Операторы, близкие к унитарным, и их функциональные модели. I. Зап. научн. семин. ПОМИ, **255**, 82–91 (1998).
10. Капустин В. В. Спектральный анализ почти унитарных операторов. Алгебра и анализ, **13**, вып. 5, 44–68 (2001).
11. Като Т. Теория возмущений для линейных операторов. Мир, М., 1972.

12. *Kiselev A. V.* Some Spectral Properties of the Non-Self-Adjoint Friedrichs Model Operator. направлено в Math. Proc. of Royal Irish Academy (см. также <http://www.maths.kst.dit.ie/preprints/preprints.html>).
13. *Makarov N. G., Vasjunin V. I.* A model for noncontractions and stability of the continuous spectrum. Lect. Notes in Math., Vol. 864, 1981, pp. 365–412.
14. *Набоко С. Н.* Абсолютно непрерывный спектр недиссипативного оператора и функциональная модель I. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **65**, 90–102 (1976).
15. *Набоко С. Н.* Абсолютно непрерывный спектр недиссипативного оператора и функциональная модель II. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **73**, 118–135 (1977).
16. *Набоко С. Н.* Функциональная модель теории возмущений и ее приложение к теории рассеяния. Труды МИАН, **147**, 86–114 (1980).
17. *Набоко С. Н.* О сингулярном спектре несамосопряженного оператора. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **113**, 149–177 (1981).
18. *Naboko S. N.* Similarity problem and the structure of the singular spectrum of non-dissipative operators. Lect. Notes in Math., Vol. 1043, 1984, pp. 147–151.
19. *Nikolski N. K.* Operators, Functions and Systems: An Easy Reading. Vol. I, II, Amer. Math. Soc., 2002.
20. *Никольский Н. К.* Лекции об операторе сдвига. Наука, М., 1980.
21. *Павлов Б. С.* Об условиях отделимости спектральных компонент диссипативного оператора. Изв. АН СССР, сер. матем., **39**, 123–148 (1975).
22. *Romanov R. V.* A remark on equivalence of weak and strong definitions of absolutely continuous subspace for non-self-adjoint operators. В печати в: Operator Theory: Advances and Applications (Proc. OTAMP'02 conference), 2004.
23. *Рыжов В. А.* Абсолютно непрерывное подпространство несамосопряженного оператора и теория рассеяния. Дисс. к.ф.-м.н., СПб., 1994.
24. *Сазонович Л. А.* Неунитарные операторы с абсолютно непрерывным спектром. Изв. АН СССР, сер. матем., **33**, 52–64 (1969).
25. *Секефальви-Надь Б., Фоляш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Мир, М., 1970.

School of Mathematics, Dublin Institute of Technology
Санкт-Петербургский государственный университет,
НИИ Физики
email: akiselev@mph.phys.spbu.ru
Санкт-Петербургский государственный университет,
НИИ Физики
email: naboko@snoopy.phys.spbu.ru

Поступило в редакцию
1 марта 2004 г.