Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Л. Лакштанов, Р. А. Минлос, Спектр двух-
частичных связанных состояний трансфер-матриц
гиббсовских полей (уединенное связанное состоя-
ние), *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, вы-
пуск 3, 52–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa117>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским
соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:18:29

УДК 517.9

Спектр двухчастичных связанных состояний трансфер-матриц гиббсовских полей (уединенное связанное состояние)

© 2004. Е. Л. Лакштанов, Р. А. Минлос

*Посвящается В. Б. Лидскому в связи
с его восьмидесятилетием*

§1. Введение и постановка задачи

Изучение трансфер-матриц (стохастических операторов) многих решетчатых моделей статистической физики и квантовой теории поля (в высокотемпературной области) приводит к так называемой «корпускулярной картине» их спектра. Это означает, что в гильбертовом пространстве функций от поля, в котором действует трансфер-матрица $\mathcal{T}_\beta$ ($\beta = 1/T$), можно выделить некоторые специальные подпространства, инвариантные относительно трансфер-матрицы и группы трансляций (в предположении трансляционной инвариантности модели): одночастичное, двухчастичное, трехчастичное и т. д. подпространства (см. об этом подробнее в [1, 2]). После этого возникает задача об изучении спектра трансфер-матрицы в каждом из этих подпространств. Если спектр в одночастичном подпространстве описывается сравнительно легко, то уже в двухчастичном подпространстве изучение этого спектра является непростой задачей из-за наличия так называемых «связанных состояний». Чисто аналитически эта задача состоит в нахождении собственных значений некоторого семейства операторов фридрихсовского типа. В таком виде, применительно к случаю трансфер-матрицы модели Изинга, задача была сформулирована (и решена для двумерной модели Изинга) в работах [3–5]. Более общий случай, охватывающий, в частности, модель Изинга произвольной размерности, изучался в работах [1, 6]. Здесь обобщаются результаты упомянутых работ. Это обобщение позволяет изучать так называемые двухчастичные связанные состояния трансфер-матриц для гиббсовских полей с компактным пространством спинов более общего вида, чем в модели Изинга, и с взаимодействием между спинами также общего вида (произвольное финитное взаимодействие вдоль «пространственных» направлений).

В упомянутой работе [5], где впервые было предпринято такое обобщение, как и в данной работе, рассматриваются лишь потенциалы «общего положения». Для таких потенциалов свойства соответствующего фридрихсовского семейства операторов сохраняются при малых «шевелениях» потенциала или — что одно и то же — при малых шевелениях «символа» этого семейства (т. е. энергии двух «квазичастиц» в состоянии рассеяния как функции их квазиимпульсов). Потенциалы взаимодействия, приводящие к исключительным «символам», образуют гиперповерхность конечной коразмерности в пространстве всех потенциалов. Следует отметить, что часто рассматриваемый случай взаимодействия

ближайших соседей приводит к символам уже не общего положения, и тогда картина спектра отличается от той, которая описана в данной статье.

В настоящей работе мы следуем плану статьи [5]; при этом мы рассматриваем более общие спиновые пространства и приводим подробные доказательства, которые в [5] лишь кратко намечены. Работа состоит из нескольких частей. В данной, первой ее части мы описываем изучаемые модели в общем виде для любого значения размерности решетки и устанавливаем существование так называемого «уединенного уровня» (уточняя при этом результаты работ [9, 11]), находящегося на расстоянии порядка β^2 от непрерывного спектра.

Кроме этого уровня, существующего при всех значениях полного квазиимпульса системы, могут существовать другие связанные состояния, так называемые «прилегающие» уровни, «живущие» лишь в окрестностях некоторых специальных значений полного квазиимпульса и расположенные на расстояниях порядка β^α , $\alpha \geq 4$, от краев непрерывного спектра. Эти прилегающие уровни мы изучим в следующих частях предлагаемой работы.

Итак, мы предполагаем, что формальный гамильтониан гиббсовского поля имеет вид

$$H(\sigma) = \beta \sum \Phi(x - y) \sigma(x) \sigma(y), \quad (1.1)$$

где $\sigma = \{\sigma(x), x \in \mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}\}$ ($\mathbb{Z}^\nu$ — «пространство», $\mathbb{Z}$ — «время») — конфигурация поля, принимающая значения в некотором компактном симметричном относительно нуля подмножестве $S \in \mathbb{R}^1$, причем $\#S > 2$.

Здесь $\beta = 1/T$ — обратная температура (которая в дальнейшем предполагается достаточно малой), а $\Phi(z)$ — финитный потенциал взаимодействия, отличный от нуля только для векторов вида $z = (\bar{z}, z_0) \in \mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^1$, у которых «временная» координата удовлетворяет условию $|z_0| \leq 1$ (это условие и позволяет рассматривать наше гиббсовское поле как марковское вдоль направления «времени»). При этом в данной работе мы рассматриваем даже более узкий класс потенциалов $\Phi(z)$: их носители состоят либо из векторов $(\bar{z}, 0)$, либо из векторов $(0, z_0)$, $|z_0| = 1$.

Как обычно, предполагается, что задано некоторое симметричное относительно нуля четное распределение вероятностей v на множестве S , с помощью которого задается «свободная» мера $\mu_0 = v^{\mathbb{Z}^{\nu+1}}$ в пространстве $\Omega = S^{\mathbb{Z}^{\nu+1}}$ всех конфигураций поля. Гиббсовское поле μ_β определяется стандартным образом с помощью гамильтониана (1.1) и свободной меры μ_0 (подробности см., например, в [7]). Относительно меры v мы сделаем следующее предположение:

$$\langle \sigma^4 \rangle_v \neq 3 \langle \sigma^2 \rangle_v, \quad (1.2)$$

где $\langle \sigma^k \rangle_v = \int_S \sigma^k dv(\sigma)$ есть k -й момент распределения v .

Далее, рассматривается так называемое физическое пространство $\mathcal{H} \subset L_2(\Omega, \mu_\beta)$, состоящее из функций $f(\sigma)$, зависящих лишь от значений конфигурации σ в нулевой момент времени. В $\mathcal{H}$ обычным образом вводится стохастический оператор гиббсовского поля $\mathcal{T}_\beta$ (называемый обычно трансфер-матрицей). Поскольку мера μ_β инвариантна относительно пространственных сдвигов поля, в пространстве $\mathcal{H}$ определена также унитарная группа $\{U_t, t \in \mathbb{Z}^\nu\}$ пространственных трансляций, коммутирующая с $\mathcal{T}_\beta$ (подробнее см. [2]).

Напомним основную схему построения одночастичного и двухчастичного инвариантных пространств трансфер-матрицы $\mathcal{T}_\beta$ (и группы трансляций U_t). В качестве исходного приближения к одночастичному пространству выбирается

линейная оболочка функций $\{h_x^0(\sigma) = \sigma(x), x \in \mathbb{Z}^\nu\}$, и затем с помощью некоторого приема теории возмущений (см. [1, 2]) строится истинное инвариантное подпространство $\mathcal{H}_1$ вместе с ортонормированным базисом $\{h_x, x \in \mathbb{Z}^\nu\}$, в котором операторы трансляций $U_t|_{\mathcal{H}_1} = U_t^{(1)}$ действуют циклически, $U_t^{(1)}h_x = h_{x+t}$, $t, x \in \mathbb{Z}^\nu$, а трансфер-матрица $\mathcal{T}_\beta|_{\mathcal{H}_1} = \mathcal{T}_\beta^{(1)}$ — с помощью свертки:

$$\mathcal{T}_\beta^{(1)}h_x = \sum_{y \in C_1} a_{x-y}h_y$$

с некоторой экспоненциально убывающей функцией $\{a_z, z \in \mathbb{Z}^\nu\}$.

После унитарного отображения («преобразования Фурье»)

$$W_1: \mathcal{H}_1 \rightarrow L_2(\mathbb{T}^\nu, d\lambda), \quad (W_1h_x)(\lambda) = e^{i\lambda \cdot x}, \quad \lambda \in \mathbb{T}^\nu,$$

где $\mathbb{T}^\nu = [0, 2\pi]^\nu$ есть ν -мерный тор, а $d\lambda$ — нормированная мера Хаара на $\mathbb{T}^\nu$, операторы $U_t^{(1)}$ и $\mathcal{T}_\beta^{(1)}$ перейдут в операторы $\tilde{U}_t^{(1)}$, $\tilde{\mathcal{T}}_\beta^{(1)}$ умножения на функции:

$$(\tilde{U}_t^{(1)}f)(\lambda) = e^{i(t, \lambda)}f(\lambda), \quad (\tilde{\mathcal{T}}_\beta^{(1)}f)(\lambda) = \tilde{a}(\lambda)f(\lambda), \quad f \in L_2(\mathbb{T}^\nu, d\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{T}^\nu, \quad t \in \mathbb{Z}^\nu, \quad (1.3)$$

где $\tilde{a}(\lambda) = \sum_z a_z e^{i(z, \lambda)}$ — преобразование Фурье функции a .

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно физической интерпретации, оператор $-\frac{1}{2} \ln \mathcal{T}_\beta^2$ обь является гамильтонианом соответствующего решетчатого поля, а пространство $\mathcal{H}_1$ — пространством состояний его «квазичастицы» (с наименьшей массой), причем λ — квазиимпульс этой «квазичастицы», а $-\frac{1}{2} \ln \tilde{a}^2(\lambda)$ — энергия «квазичастицы» с квазиимпульсом λ .

В силу того, что функция a_x убывает экспоненциально, с большим показателем экспоненты, функция $\tilde{a}(\lambda)$ аналитична в некоторой комплексной окрестности тора $\mathbb{T}^\nu$

$$W_A = \{\lambda \in \mathbb{C}^\nu / \mathbb{Z}^\nu : |\operatorname{Im} \lambda^{(i)}| < A, i = 1, \dots, \nu\}, \quad (1.4)$$

где значение $A = A(\beta)$ достаточно велико при малых β (через $\mathbb{C}^\nu / \mathbb{Z}^\nu$ обозначено факторпространство относительно действия $z \rightarrow z + n$, $z \in \mathbb{C}^\nu$, $n \in \mathbb{Z}^\nu$, группы $\mathbb{Z}^\nu$ в $\mathbb{C}^\nu$). Кроме того, $\tilde{a}(\lambda)$ аналитически зависит от β и при малых β допускает представление

$$\tilde{a}(\lambda) = \beta a_0 + \beta^2 a_1(\lambda) + a_2(\lambda, \beta),$$

где $a_2(\lambda, \beta) \sim O(\beta^3)$, а константа $a_0 \neq 0$ и функция $a_1(\lambda)$ обе не зависят от β . Здесь и в дальнейшем обозначение $O(\beta^k)$ означает, что соответствующая величина допускает оценку $C\beta^k$ с константой $C > 0$, не зависящей от β (и, возможно, других переменных).

Двухчастичное пространство оператора $\mathcal{T}_\beta$ строится подобным же образом: в качестве приближения к нему выбирается пространство, натянутое на векторы $\{\sigma(x)\sigma(y), (x, y) \in \mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu, x \neq y; \sigma^2(x), x \in \mathbb{Z}^\nu\}$, и затем, применяя упомянутый выше прием из теории возмущений, мы получаем инвариантное относительно $\mathcal{T}_\beta$ и $\{U_t\}$ подпространство $\mathcal{H}_2$ вместе с некоторым его специальным базисом

$$\{h_x^{(2)}, x \in \mathbb{Z}^\nu; h_{(x, y)}, (x, y) \in \mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu, x \neq y\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае модели Изинга $\sigma_x^2 \equiv 1$ и поэтому в $\mathcal{H}_2$ отсутствует часть $\{h_x^{(2)}, x \in \mathbb{Z}^\nu\}$ базиса.

Действие операторов $U_t^{(2)} = U_t|_{\mathcal{H}_2}$ и $\mathcal{T}_\beta^{(2)} = \mathcal{T}_\beta|_{\mathcal{H}_2}$ удобнее сразу описать после «преобразования Фурье»

$$W_2: \mathcal{H}_2 \rightarrow L_2(\mathbb{T}^\nu, d\lambda) \oplus \bar{L}_2^{\text{sym}}(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu, d\lambda_1 d\lambda_2) \equiv \widetilde{\mathcal{H}}_2, \quad (1.5)$$

где $\bar{L}_2^{\text{sym}}(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu, d\lambda_1 d\lambda_2)$ — гильбертово пространство симметрических функций $f(\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{T}^\nu$, ортогональных любой функции вида $h(\lambda_1 + \lambda_2)$, $h(\lambda) \in L_2(\mathbb{T}^\nu, d\lambda)$, а отображение W_2 задается формулами

$$(W_2 h_x^{(2)})(\lambda) = e^{i(x, \lambda)} \in L_2(\mathbb{T}^\nu, d\lambda),$$

$$(W_2 h_{(x, y)})(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i(\lambda_1, x) + i(\lambda_2, y)} + e^{i(\lambda_1, y) + i(\lambda_2, x)}) \in \bar{L}_2^{\text{sym}}(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu, d\lambda_1 d\lambda_2). \quad (1.6)$$

При этом операторы $\tilde{U}_t^{(2)}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}_\beta^{(2)}$ в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}_2$ (получаемые из $U_t^{(2)}$ и $\mathcal{T}_\beta^{(2)}$ при отображении W_2) имеют вид

$$(\tilde{U}_t^{(2)} F)_1(\lambda) = e^{i(\lambda, t)} f_1(\lambda), \quad (\tilde{U}_t^{(2)} F)_2(\lambda_1, \lambda_2) = e^{i(\lambda_1 + \lambda_2, t)} f_2(\lambda_1, \lambda_2), \quad (1.7)$$

$$(\widetilde{\mathcal{T}}_t^{(2)} F)_1(\lambda) = \bar{\gamma}(\lambda) f_1(\lambda) + \int_{\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu} b(\lambda, \mu_1, \mu_2) \delta(\lambda - \mu_1 - \mu_2) f_2(\mu_1, \mu_2) d\mu_1 d\mu_2, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} & (\widetilde{\mathcal{T}}_t^{(2)} F)_2(\lambda_1, \lambda_2) = \tilde{a}(\lambda_1) \tilde{a}(\lambda_2) f_2(\lambda_1, \lambda_2) \\ & + \int_{(\mathbb{T}^\nu)^2} (S(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) - \tilde{a}(\mu_1) \tilde{a}(\mu_2)) \delta(\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2) f_2(\mu_1, \mu_2) d\mu_1 d\mu_2 \\ & + \int_{\mathbb{T}^\nu} b^*(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \delta(\lambda_1 + \lambda_2 - \mu) f_1(\mu) d\mu, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $F = (f_1(\lambda), f_2(\lambda_1, \lambda_2)) \in L_1(\mathbb{T}^\nu) \oplus \bar{L}_2^{\text{sym}}(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu)$, а $\delta(\cdot)$ — дельта-функция на торе $\mathbb{T}^\nu$.

Здесь $\gamma(\lambda)$ — четная вещественная функция, аналитическая в комплексной окрестности (1.4) тора $\mathbb{T}^\nu$, $\tilde{a}(\lambda)$ — та же функция, что и в (1.3), а $S(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$ определена на гиперповерхности $\Gamma = \{\lambda_1 + \lambda_2 = \mu_1 + \mu_2\} \subset (\mathbb{T}^\nu)^4$ и также аналитична в комплексной окрестности этой гиперповерхности. При этом выполняется условие самосопряженности

$$S(\lambda_1, \lambda_2, \mu_2, \mu_2) = \overline{S(\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2)}, \quad (1.10)$$

а также условие

$$\int S(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \delta(\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2) d\mu_1 d\mu_2 = 0. \quad (1.11)$$

Кроме того, $S(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$ является симметрической функцией как по первой паре переменных (λ_1, λ_2) , так и по второй паре (μ_1, μ_2) .

Наконец, ядра $b(\lambda, \mu_1, \mu_2)$ и $b^*(\lambda_1, \lambda_2, \mu)$, определенные соответственно на гиперповерхностях $\{\lambda = \mu_1 + \mu_2\}$ и $\{\lambda_1 + \lambda_2 = \mu\}$, также аналитичны и связаны соотношениями

$$b^*(\lambda_1, \lambda_2, \mu) = \overline{b(\mu, \lambda_1, \lambda_2)}, \quad \int b(\lambda, \mu_1, \mu_2) \delta(\lambda - \mu_1 - \mu_2) d\mu_1 d\mu_2 = 0. \quad (1.12)$$

Функция $b^*(\lambda_1, \lambda_2, \mu)$ является симметрической по паре переменных (λ_1, λ_2) , а функция $b(\lambda, \mu_1, \mu_2)$ — по паре (μ_1, μ_2) .

Все перечисленные свойства входящих в (1.8), (1.9) функций обеспечивают самосопряженность оператора $\widetilde{\mathcal{T}}_\beta^{(2)}$ в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}_2$. Кроме того, все эти функции аналитически зависят от β и при малых β допускают разложения

$$\begin{aligned}\overline{\gamma}(\lambda) &= \beta^2(\gamma_0 + O(\beta^2)), \\ \tilde{a}(\lambda_1)\tilde{a}(\lambda_2) &= \beta^2(a_0^2 + 2\beta a_0 a_1(\lambda) + O(\beta^2)), \\ S(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) &= \beta^2(\beta^2 S_0(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) + O(\beta^3)), \\ b(\lambda_1, \lambda_2, \mu) &= \beta^2(\beta b_0(\lambda_1, \lambda_2, \mu) + O(\beta^2)),\end{aligned}\tag{1.13}$$

где γ_0 , S_0 и b_0 не зависят от β . Естественно сократить все эти выражения на β^2 и впредь рассматривать оператор $\widehat{\mathcal{T}}_\beta^{(2)} = \beta^{-2} \widetilde{\mathcal{T}}_\beta^{(2)}$.

Вся изложенная здесь вкратце схема построения одно- и двухчастичных инвариантных подпространств трансфер-матрицы, а также вид трансфер-матрицы в этих подпространствах описаны в книге [2] и статьях [9, 10].

В этой работе мы будем исследовать спектр оператора $\mathcal{T}$ в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}_2$, введенном в (1.5), чуть более общего вида, чем оператор $\widehat{\mathcal{T}}_\beta^{(2)}$, а именно в выражении (1.9) умножение на $\tilde{a}(\lambda_1)\tilde{a}(\lambda_2)$ мы заменим умножением на функцию более общего вида $\beta^2\omega(\lambda_1, \lambda_2)$, причем для ω выполняется условие (аналогичное (1.13) после сокращения на β^2)

$$\omega(\lambda_1, \lambda_2) = \omega_0 + \beta\omega_1(\lambda_1, \lambda_2) + \omega_2(\lambda_1, \lambda_2),\tag{1.14}$$

где константа ω_0 и функция $\omega_1(\lambda_1, \lambda_2)$ обе не зависят от β , а $\omega_2(\lambda_1, \lambda_2) = O(\beta^2)$. При этом предполагается, что $\omega(\lambda_1, \lambda_2)$ аналитична по каждой переменной λ_1 и λ_2 в области (1.4).

Поскольку, как видно из (1.8), (1.9), оператор $\widehat{\mathcal{T}}_\beta^{(2)}$ сохраняет полный квазиимпульс $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, естественно будет перейти в (1.8) и (1.9) к переменным $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ и $k = \lambda_1$ и представить пространство $\widetilde{\mathcal{H}}_2$ в виде прямого интеграла (см. [12]),

$$\widetilde{\mathcal{H}}_2 = \int \mathcal{H}_\Lambda^{(2)} d\Lambda,$$

где $\mathcal{H}_\Lambda^{(2)} = \mathbb{C}^1 \oplus \overline{L}_2^\Lambda(\mathbb{T}^\nu)$, а $\overline{L}_2^\Lambda(\mathbb{T}^\nu) \subset L_2(\mathbb{T}^\nu)$ — пространство функций $\{f(k), k \in \mathbb{T}^\nu\}$, инвариантных относительно инволюции тора $\mathbb{T}^\nu: k \rightarrow \Lambda - k$ и таких, что $\int f(k) dk = 0$. При этом оператор $\mathcal{T}$ также разложится в прямой интеграл операторов,

$$\mathcal{T} = \int_{\mathbb{T}^\nu} \mathcal{T}_\Lambda d\Lambda,$$

где $\mathcal{T}_\Lambda$ действует на векторы $F = (c_0, f) \in \mathcal{H}_\Lambda^{(2)}$ по формулам

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}_\Lambda F)_0 &= \gamma(\Lambda)c_0 + \int b_\Lambda(p)f(p) dp, \\ (\mathcal{T}_\Lambda F)_1(k) &= \omega_\Lambda(k)f(k) + \int (K_\Lambda(k, p) - \omega_\Lambda(p))f(p) dp + b_\Lambda^*(k)c_0.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\gamma &= \beta^{-2}\overline{\gamma} = \gamma_0 + O(\beta^2), \\ \omega_\Lambda(k) &= \omega(k, \Lambda - k), \\ K_\Lambda(k, p) &= \beta^{-2}S(k, \Lambda - k, p, \Lambda - p) = \beta^2 S_0(k, \Lambda - k, p, \Lambda - p) + O(\beta^3), \\ b_\Lambda(p) &= \beta^{-2}b_0(\Lambda, p, \Lambda - p) = \beta b_0(\Lambda, p, \Lambda - p) + O(\beta^2), \\ b_\Lambda^*(k) &= \beta^{-2}b_0^*(k, \Lambda - k, \Lambda) = \beta b_0^*(k, \Lambda - k, \Lambda) + O(\beta^2).\end{aligned}\quad (1.16)$$

Заметим, что условия (1.10)–(1.12) влекут за собой следующие соотношения:

$$\int K_\Lambda(k, p) dp = 0, \quad \int b_\Lambda(p) dp = 0, \quad K_\Lambda(k, p) = \overline{K}_\Lambda(p, k), \quad b_\Lambda^*(k) = \overline{b}_\Lambda(k), \quad (1.17)$$

а также, что очень важно, соотношение

$$\omega_\Lambda(k) = \omega_\Lambda(\Lambda - k) \quad (1.18)$$

для $\omega_\Lambda(k)$ и соотношения $K_\Lambda(k, p) = K_\Lambda(\Lambda - k, p)$, $K_\Lambda(k, p) = K_\Lambda(k, \Lambda - p)$. Кроме того, $b_\Lambda(k)$ и $b_\Lambda^*(p)$ не меняются при заменах $k \rightarrow \Lambda - k$, $p \rightarrow \Lambda - p$. Для нас существенно, что при любом $\Lambda \in \mathbb{T}^\nu$ функции $\omega_\Lambda(k)$ и $b_\Lambda(k)$ аналитичны относительно k в комплексной окрестности (1.4) тора $\mathbb{T}^\nu$, а ядро $K_\Lambda(k, p)$ также аналитично по k и p в декартовом произведении этих окрестностей.

Итак, мы пришли к задаче изучения спектра семейства операторов $\{\mathcal{T}_\Lambda, \Lambda \in \mathbb{T}^\nu\}$ вида (1.15). Операторы $\mathcal{T}_\Lambda$ представляют собой некоторое обобщение операторов Фридрихса (см. [8, 13]), и известно, что при наших условиях относительно входящих в (1.15) функций каждый оператор $\mathcal{T}_\Lambda$ имеет отрезок непрерывного (лебеговского) спектра $[\min_k \omega_\Lambda(k), \max_k \omega_\Lambda(k)]$ и еще, быть может, конечное число изолированных собственных значений, лежащих как вне непрерывного спектра, так и, быть может, на непрерывном спектре. Последний случай возникает редко и требует отдельного рассмотрения. Таким образом, задача этой статьи и последующих — изучить при малых значениях параметра β поведение собственных значений семейства операторов $\mathcal{T}_\Lambda$, лежащих вне непрерывного спектра этих операторов.

Собственные значения $\varepsilon_i(\Lambda)$ оператора $\mathcal{T}_\Lambda$, лежащие вне непрерывного спектра, непрерывно меняясь при изменении Λ , «живут» в целой области $G_i \subset \mathbb{T}^\nu$ значений Λ (т. е. $\varepsilon_i(\Lambda)$ существует, только когда Λ принадлежит некоторой области G_i). В случае, когда $G_i \neq \mathbb{T}^\nu$, на границе ∂G_i области G_i собственное значение $\varepsilon_i(\Lambda)$ «сливается» с краем непрерывного спектра и поглощается им.

Можно показать (см. например [9, 11]), что условие (1.2) влечет за собой условие

$$\gamma_0 \neq \omega_0, \quad (1.19)$$

из которого, в частности, следует, что при малых β при каждом Λ значение $\gamma(\Lambda)$ лежит вне непрерывного спектра оператора $\mathcal{T}_\Lambda$.

§2. Уединенное собственное значение оператора $\mathcal{T}_\Lambda$

В этом параграфе мы начинаем исследование собственных значений операторов $\mathcal{T}_\Lambda$. Мы сформулируем здесь общий результат относительно так называемого «уединенного» собственного значения оператора $\mathcal{T}_\Lambda$, верный для любой размерности ν .

ТЕОРЕМА 2.1. *При выполнении всех указанных выше условий у оператора $\mathcal{T}_\Lambda$ при всех Λ существует единственное собственное значение $\varepsilon_b(\Lambda)$, имеющее вид*

$$\varepsilon_b(\Lambda) = \gamma_0 + O(\beta^2)$$

(т. е. $|\varepsilon_b(\Lambda) - \gamma_0| < C\beta^2$ при некоторой константе $C > 0$, не зависящей от β и Λ).

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу условий (1.13), (1.14), (1.19) собственное значение $\varepsilon_b(\Lambda)$ находится на конечном расстоянии от непрерывного спектра оператора $\mathcal{T}_\Lambda$, т. е.

$$\min_{\Lambda, \text{ext}=\min, \max} |\varepsilon_b(\Lambda) - \tau_\Lambda^{\text{ext}}| > \tau > 0,$$

где $\tau > 0$ не зависит от β , Λ , а $\tau_\Lambda^{\text{ext}}$, $\text{ext} = \max, \min$, означает максимальное или минимальное значение функции ω_Λ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначим через $R_\Lambda \subset \mathcal{H}_\Lambda^{(2)}$ одномерное собственное подпространство оператора $\mathcal{T}_\Lambda$ с собственным значением $\varepsilon_b(\Lambda)$, и пусть

$$\widehat{\mathcal{H}}_1 = \int_{\mathbb{T}^\nu} R_\Lambda d\Lambda$$

— подпространство пространства $\widehat{\mathcal{H}}_2$, которое можно отождествить с пространством $L_2(\mathbb{T}^\nu, d\Lambda)$. Очевидно, что это подпространство инвариантно относительно $\mathcal{T}$ и группы U_t , которые действуют по формулам

$$(\mathcal{T}f)(\Lambda) = \varepsilon_b(\Lambda)f(\Lambda), \quad (U_t f)(\Lambda) = e^{i(t, \Lambda)} f(\Lambda), \quad f \in \widehat{\mathcal{H}}_1. \quad (2.1)$$

Таким образом, $\widehat{\mathcal{H}}_1$ имеет структуру одночастичного подпространства, т. е. является пространством состояний некоторой новой «квазичастицы» поля с энергией $-\ln |\varepsilon_b(\Lambda)|$.

Отметим, что существование пространства $\widehat{\mathcal{H}}_1$ для спиновых систем с пространством спинов S , $\#S > 2$, было установлено в работах [9, 11] (частный случай рассмотрен в [10]).

Остальные собственные значения оператора $\mathcal{T}_\Lambda$, лежащие вне его непрерывного спектра, как мы увидим, могут находиться лишь поблизости от одного из его краев $\tau_\Lambda^{\min}$ или $\tau_\Lambda^{\max}$, т. е. на расстоянии порядка β^α , $\alpha > 0$, от одного из них. Все эти собственные значения оператора $\mathcal{T}_\Lambda$ условимся называть «прилегающими уровнями».

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Собственный вектор $F = (c, f)$, $c \in \mathbb{C}^1$, $f \in \widetilde{L}_2^A(\mathbb{T}^\nu)$, оператора $\mathcal{T}_\Lambda$ с собственным значением z , согласно (1.15), удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} (\gamma(\Lambda) - z)c + \int_{\mathbb{T}^\nu} f(\mu)b_\Lambda(\mu) d\mu = 0, \\ (\omega_\Lambda(k) - z)f(k) - \int_{\mathbb{T}^\nu} \omega_\Lambda(\mu)f(\mu) d\mu + \int_{\mathbb{T}^\nu} K_\Lambda(k, \mu)f(\mu) d\mu + \bar{b}_\Lambda(k)c = 0. \end{cases}$$

Отсюда, выражая c из первого уравнения и подставляя полученное выражение во второе, получим, что

$$(\omega_\Lambda(k) - z)f(k) - \int_{\mathbb{T}^\nu} \omega_\Lambda(\mu)f(\mu) d\mu + \int_{\mathbb{T}^\nu} M_\Lambda(k, \mu; z)f(\mu) d\mu = 0,$$

где $M_\Lambda(k, \mu; z) = K_\Lambda(k_1, k_2) - b_\Lambda(k_1)\bar{b}_\Lambda(k_2)/(\gamma(\Lambda) - z)$.

ЛЕММА 2.1. Рассмотрим интегральное уравнение относительно функции $f \in \bar{L}_2(\mathbb{T}^\nu) = (\text{const})^\perp \subset L_2(\mathbb{T}^\nu)$

$$(\omega(k) - z)f(k) - \int_{\mathbb{T}^\nu} \omega(p)f(p) dp + \int_{\mathbb{T}^\nu} L(k, p; z)f(p) dp = 0, \quad (2.2)$$

где $L(k, p; z)$ — функция, гладкая по $(k, p) \in (\mathbb{T}^\nu)^2$ и мероморфная по $z \in \mathbb{C}$, полюсы которой при любых k и p лежат вне множества значений функции $\omega(k)$. При этом ядро $L(k, p; z)$ симметрично и

$$\int L(k, p; z) dp = 0. \quad (2.3)$$

Тогда ненулевое решение $f \in \bar{L}_2(\mathbb{T}^\nu)$ уравнения (2.2) существует для тех и только тех z , которые являются корнями уравнения $\Delta(z) = 0$, где $\Delta(z)$ — модифицированный детерминант Фредгольма,

$$\Delta(z) = \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dk}{\omega(k) - z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{T}^\nu} \dots \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{T_n(k_1, \dots, k_n; z) dk_1 \dots dk_n}{(\omega(k_1) - z) \dots (\omega(k_n) - z)}, \quad (2.4)$$

$$T_n(k_1, \dots, k_n; z) = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} L(k_1, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_1, k_n; z) \\ L(k_2, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_2, k_n; z) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ L(k_n, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_n, k_n; z) \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где матрица в i -м слагаемом — это матрица $(L(k_j, k_{j'}; z), j, j' = 1, \dots, n)$, в которой i -й столбец заменен на столбец, состоящий из единиц.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим самосопряженный ограниченный оператор $\bar{\mathcal{T}}$ в пространстве $L_2(\mathbb{T}^\nu, dk)$, определенный формулой

$$\begin{aligned} (\bar{\mathcal{T}}f)(k) &= \omega(k)f(k) - \int_{\mathbb{T}^\nu} \omega(p)f(p) dp - \omega(k) \int_{\mathbb{T}^\nu} f(p) dp \\ &\quad + \int_{\mathbb{T}^\nu} \omega(k) dk \int_{\mathbb{T}^\nu} f(p) dp + \int_{\mathbb{T}^\nu} L(k, p; z)f(p) dp. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Очевидно, что функция $f = \text{const}$ является собственной функцией этого оператора с собственным значением $z = 0$, а в ортогональном дополнении $\bar{L}_2(\mathbb{T}^\nu, dk) = (\text{const})^\perp$ собственные функции этого оператора с собственными значениями, лежащими вне отрезка $[\min \omega_\Lambda, \max \omega_\Lambda]$, удовлетворяют уравнению (2.2) и, следовательно, являются нулями детерминанта Фредгольма $F(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} R_n(z)$, где

$$R_n(z) = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{T}^\nu} \dots \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{\mathcal{L}_n(k_1, \dots, k_n; z) dk_1 \dots dk_n}{(\omega(k_1) - z) \dots (\omega(k_n) - z)},$$

$\mathcal{L}_n(k_1, \dots, k_n) = \det(L(k_i, k_j; z) - \omega(k_j), i, j = 1, \dots, n)$.

Поскольку j -й столбец матрицы $(L(k_i, k_j; z) - \omega(k_j), i, j = 1, \dots, n)$ представляется в виде суммы столбцов $(L(k_i, k_j; z), i = 1, \dots, n)$ и $(\omega(k_j), \dots, \omega(k_j))$, то

по свойству линейности определителя получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n(k_1, \dots, k_n) = \det \begin{pmatrix} L(k_1, k_1; z) & \dots & L(k_1, k_n; z) \\ L(k_2, k_1; z) & \dots & L(k_2, k_n; z) \\ \vdots & & \vdots \\ L(k_n, k_1; z) & \dots & L(k_n, k_n; z) \end{pmatrix} \\ - \sum_{i=1}^n \omega(k_i) \det \begin{pmatrix} L(k_1, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_1, k_n; z) \\ L(k_2, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_2, k_n; z) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ L(k_n, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_n, k_n; z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Определители матриц, в которых встречается больше одного столбца вида $(\omega(k_j), \dots, \omega(k_j))$, равны нулю.)

Для удобства положим

$$\hat{A}_n = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{T}^\nu} \dots \int_{\mathbb{T}^\nu} \det \begin{pmatrix} L(k_1, k_1; z) & \dots & L(k_1, k_n; z) \\ L(k_2, k_1; z) & \dots & L(k_2, k_n; z) \\ \vdots & & \vdots \\ L(k_n, k_1; z) & \dots & L(k_n, k_n; z) \end{pmatrix} \frac{dk_1 \dots dk_n}{\prod_{i=1}^n (\omega(k_i) - z)}, \quad n \geq 1.$$

$\hat{A}_0 = 1$. Покажем, что

$$R_n(z) = \hat{A}_n - \hat{A}_{n-1} - \frac{z}{n!} \int_{\mathbb{T}^\nu} \dots \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{T_n(k_1, \dots, k_n; z) dk_1 \dots dk_n}{(\omega(k_1) - z) \dots (\omega(k_n) - z)}. \quad (2.7)$$

Воспользовавшись равенством

$$\frac{\omega(k_i)}{\omega(k_i) - z} = 1 + \frac{z}{\omega(k_i) - z}, \quad (2.8)$$

мы получим, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{T}^\nu} \dots \int_{\mathbb{T}^\nu} \det \begin{pmatrix} L(k_1, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_1, k_n; z) \\ L(k_2, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_2, k_n; z) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ L(k_n, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_n, k_n; z) \end{pmatrix} \frac{\omega(k_i) dk_1 \dots dk_n}{\prod_{i=1}^n (\omega(k_i) - z)} \\ &= \frac{\hat{A}_{n-1}}{n} + \frac{z}{n!} \int_{\mathbb{T}^\nu} \dots \int_{\mathbb{T}^\nu} \det \begin{pmatrix} L(k_1, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_1, k_n; z) \\ L(k_2, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_2, k_n; z) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ L(k_n, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_n, k_n; z) \end{pmatrix} \frac{dk_1 \dots dk_n}{\prod_{i=1}^n (\omega(k_i) - z)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

При подстановке первого слагаемого из правой части формулы (2.8) в (2.9) возникает $\hat{A}_{n-1}/n$. В самом деле, разложим определитель

$$\det \begin{pmatrix} L(k_1, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_1, k_n; z) \\ L(k_2, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_2, k_n; z) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ L(k_n, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_n, k_n; z) \end{pmatrix}$$

по i -му столбцу (состоящему из единиц). Заметим, что при интегрировании мы получим ненулевой вклад только от минора, дополнительного к элементу, стоящему в позиции (i, i) (i -я строка, i -й столбец). В самом деле, знаменатель подынтегрального выражения в

$$\int_{\mathbb{T}^\nu} \dots \int_{\mathbb{T}^\nu} \det \begin{pmatrix} L(k_1, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_1, k_n; z) \\ L(k_2, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_2, k_n; z) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ L(k_n, k_1; z) & \dots & 1 & \dots & L(k_n, k_n; z) \end{pmatrix} \frac{dk_1 \dots dk_n}{\prod_{m=1, m \neq i}^n (\omega(k_m) - z)}$$

не зависит от k_i , а минор, дополнительный к элементу, стоящему в позиции (i, i) , также не зависит от k_i и равняется $\det(L(k_i, k_j; z), i, j = 1, \dots, n-1)$. Остальные миноры представляются в виде суммы произведений $n-1$ мономов вида $\prod_{q \neq i} L(k_p, k_q; z)$, причем в каждом из этих произведений есть и притом только один множитель, у которого $p = i$ и при этом $q \neq i$. Следовательно, по свойству (2.3), вклад при интегрировании от этих слагаемых будет нулевым.

Таким образом, равенство (2.9), а следовательно, и равенство (2.7) доказаны, и, значит,

$$1 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} R_n = \hat{A}_N(z) - z \left[\sum_{n=2}^N \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{T}^\nu} \dots \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{T_n(k_1, \dots, k_n)}{\prod_{i=1}^n (\omega(k_i) - z)} \prod_{i=1}^n dk_i + \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dk}{\omega(k) - z} \right].$$

По известной лемме Адамара последовательность $\hat{A}_N(z)$ стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$ равномерно на любом компакте в $\Pi = \mathbb{C}^1 \setminus [\min \omega(k), \max \omega(k)]$. Следовательно, детерминант Фредгольма равен $F(z) = -z\Delta(z)$.

Нулю функции $F(z)$ в точке $z = 0$ соответствует собственная функция $f(k) \equiv \text{const}$ оператора $\mathcal{T}$. Таким образом, нули функции $\Delta(z)$, $z \in \Pi$, суть собственные значения оператора $\mathcal{T}$ в подпространстве $\bar{L}_2(T^\nu, dk)$. Лемма 2.1 доказана.

Применительно к нашему случаю функция T_n^Λ , задаваемая формулой (2.5), представляется в виде

$$T_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n) = P_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n) - \frac{1}{\gamma(\Lambda) - z} Q_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n), \quad n \geq 2, \quad (2.10)$$

где

$$P_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n) = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} K_\Lambda(k_1, k_1) & \dots & 1 & \dots & K_\Lambda(k_1, k_n) \\ K_\Lambda(k_2, k_1) & \dots & 1 & \dots & K_\Lambda(k_2, k_n) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_\Lambda(k_n, k_1) & \dots & 1 & \dots & K_\Lambda(k_n, k_n) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$Q_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n) = \sum_{i \neq j}^n \bar{b}_\Lambda(k_j) \det \begin{pmatrix} K_\Lambda(k_1, k_1) & \dots & b_\Lambda(k_1) & \dots & 1 & \dots & K_\Lambda(k_1, k_n) \\ K_\Lambda(k_2, k_1) & \dots & b_\Lambda(k_2) & \dots & 1 & \dots & K_\Lambda(k_2, k_n) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_\Lambda(k_n, k_1) & \dots & b_\Lambda(k_n) & \dots & 1 & \dots & K_\Lambda(k_n, k_n) \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Введем величины

$$I_n^{1,\Lambda}(z) = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{T}^\nu} \cdots \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{P_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n)}{\prod_{i=1}^n (\omega_\Lambda(k_i) - z)} \prod_{i=1}^n dk_i, \quad n \geq 2,$$

$$I_n^{2,\Lambda}(z) = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{T}^\nu} \cdots \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{Q_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n)}{\prod_{i=1}^n (\omega_\Lambda(k_i) - z)} \prod_{i=1}^n dk_i, \quad n \geq 2.$$

Из представлений (1.16), формулы Стирлинга и леммы Адамара нетрудно получить следующие оценки:

$$|I_n^{1,\Lambda}(z)| < A \frac{(C\beta^2)^{n-1}}{n^{(n-1)/2} d^{n-1}} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dk}{|\omega_\Lambda(k) - z|},$$

$$|I_n^{2,\Lambda}(z)| < A \frac{(C\beta^2)^{n-2}}{n^{(n-2)/2} d^{n-2}} \int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{|b_\Lambda(k_1) - b_\Lambda(k_2)|^2 dk_1 dk_2}{|\omega_\Lambda(k_1) - z| |\omega_\Lambda(k_2) - z|}, \quad (2.13)$$

где C и A — некоторые константы, а $d = \text{dist}(z, \Pi'_\Lambda)$ — расстояние от точки $z \in \mathbb{C}^1$ до $\Pi'_\Lambda = (\tau_\Lambda^{\min}, \tau_\Lambda^{\max})$ — множества значений функции ω_Λ .

Далее, в силу (2.10) ряды

$$R_1^\Lambda(z) = \sum_{n=2}^{\infty} I_n^{1,\Lambda}(z),$$

$$R_2^\Lambda(z) = \sum_{n=2}^{\infty} I_n^{2,\Lambda}(z) = \int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{|b_\Lambda(k_1) - b_\Lambda(k_2)|^2 dk_1 dk_2}{(\omega_\Lambda(k_1) - z)(\omega_\Lambda(k_2) - z)} + \bar{R}_2^\Lambda(z)$$

оцениваются степенными рядами по переменной $C\beta^2/d$, представляющими целые функции второго порядка от этой переменной. Из известных формул теории целых функций (см. [14]) следуют оценки

$$|R_1^\Lambda(z)| < \bar{\bar{A}}_1 \frac{C\beta^2}{d^2} e^{M_1(C\beta^2/d)^2} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dk}{|\omega_\Lambda(k) - z|},$$

$$|R_2^\Lambda(z)| < \bar{\bar{A}}_2 \frac{C\beta^2}{d^2} e^{M_2(C\beta^2/d)^2} \int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{|b_\Lambda(k_1) - b_\Lambda(k_2)|^2 dk_1 dk_2}{|\omega_\Lambda(k_1) - z| |\omega_\Lambda(k_2) - z|}, \quad (2.14)$$

где $\bar{\bar{A}}_1, \bar{\bar{A}}_2, M_1, M_2$ — константы.

Для большей определенности будем считать, что $\gamma_0 < \omega_0$, т. е. значения функции $\gamma(\Lambda)$ лежат левее множества Π'_Λ . Случай $\gamma_0 > \omega_0$ разбирается аналогично.

Далее мы будем последовательно рассматривать следующие интервалы вещественной оси:

- I. $-\infty < z \leq \gamma(\Lambda) - D_1\beta^2$,
- II. $\gamma(\Lambda) - D_1\beta^2 < z < \gamma(\Lambda)$,
- III. $\gamma(\Lambda) < z < \tau_\Lambda^{\min} - D_2\beta^2$,
- IV. $\tau_\Lambda^{\max} + D_2\beta^2 < z < \infty$,

где константы D_1 и D_2 выбираются так, что

$$\bar{\bar{A}}_i \frac{C}{D_i} e^{M_i C/D_i} < \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2.$$

При этом верны следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dk}{\omega_\Lambda(k) - z} + R_1^\Lambda(z) &> \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dk}{\omega_\Lambda(k) - z} > 0 \quad \text{при } z < \tau_\Lambda^{\min} - D_2\beta^2, \\ \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dk}{\omega_\Lambda(k) - z} + R_1^\Lambda(z) &< \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dk}{\omega_\Lambda(k) - z} < 0 \quad \text{при } z > \tau_\Lambda^{\max} + D_2\beta^2. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{|b_\Lambda(k_1) - b_\Lambda(k_2)|^2 dk_1 dk_2}{(\omega_\Lambda(k_1) - z)(\omega_\Lambda(k_2) - z)} < R_2^\Lambda(z) \\ &< \frac{3}{2} \int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{|b_\Lambda(k_1) - b_\Lambda(k_2)|^2 dk_1 dk_2}{(\omega_\Lambda(k_1) - z)(\omega_\Lambda(k_2) - z)} < \frac{3}{2} \frac{C}{D_2} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dk}{|\omega_\Lambda(k) - z|} \quad \text{при } d > D_2\beta^2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $C > 0$ — некоторая константа, не зависящая от z и Λ .

Из этих неравенств следует, что

$$\Delta_\Lambda(z) = \frac{dk}{\omega_\Lambda(k) - z} + R_1^\Lambda(z) - \frac{1}{\gamma(\Lambda) - z} R_2^\Lambda(z) > 0$$

на интервале III и при достаточно больших D_2 выполнено неравенство $\Delta_\Lambda(z) < 0$ на интервале IV.

Наконец, на интервале I

$$R_2^\Lambda(z) < \frac{\overline{C}\beta^2}{\tau_\Lambda^{\min} - \gamma(\Lambda)} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dk}{\omega_\Lambda(k) - z},$$

где $\overline{C}$ — константа и, следовательно, на этом интервале

$$\left| \frac{1}{\gamma(\Lambda) - z} R_2^\Lambda(z) \right| < \frac{\overline{C}}{D_1} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dk}{\omega_\Lambda(k) - z} < \frac{1}{3} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dk}{\omega_\Lambda(k) - z},$$

если подходящим образом выбрать D_1 . Отсюда и из предыдущих неравенств мы получаем, что на интервале I выполнено неравенство $\Delta_\Lambda(z) > 0$.

Таким образом, нам остается изучить $\Delta_\Lambda(z)$ на интервале II. Поскольку на правом конце этого интервала $\Delta_\Lambda(z)$ принимает значение $-\infty$ (в силу положительности $R_2^\Lambda(z)$), а на левом положительна, существует по крайней мере один нуль этой функции. Для того чтобы показать, что этот нуль единственный, мы докажем монотонность этой функции на интервале II. Имеем

$$\Delta'_\Lambda(z) = \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dk}{(\omega_\Lambda(k) - z)^2} + (R_1^\Lambda)'(z) - \frac{1}{(\gamma(\Lambda) - z)^2} R_2^\Lambda(z) - \frac{1}{\gamma(\Lambda) - z} (R_2^\Lambda)'(z).$$

Поскольку

$$(I_n^{1,\Lambda}(z))' = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{T}^\nu} \cdots \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{P_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n) dk_1 \dots dk_n}{(\omega_\Lambda(k_i) - z)^2 \prod_{j \neq i} (\omega_\Lambda(k_j) - z)}$$

и верна аналогичная формула для $(I_n^{2,\Lambda}(z))'$, мы, повторяя предыдущие рассуждения, получим, что на интервале II

$$\left| \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dk}{(\omega_\Lambda(k) - z)^2} + R_1^{\Lambda'}(z) \right| < \text{const}_1, \quad |R_2^{\Lambda'}(z)| < \text{const}_2 \beta^2,$$

где $\text{const}_1, \text{const}_2$ не зависят от z, Λ, β .

Далее, поскольку на интервале Π (в силу условий (1.17))

$$\int_{\mathbb{T}^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{|b_\Lambda(k_1) - b_\Lambda(k_2)|^2 dk_1 dk_2}{(\omega_\Lambda(k_1) - z)(\omega_\Lambda(k_2) - z)} > \text{const} \int_{\mathbb{T}^\nu} |b_\Lambda(k)|^2 dk > \text{const}_3 \beta^2,$$

мы получаем, что на этом интервале

$$\Delta'_\Lambda(z) < \text{const}_1 - \frac{\text{const}_2 \beta^2}{(\gamma(\Lambda) - z)^2} < \text{const}_1 - \frac{\text{const}_2}{D_1^2 \beta^2} < 0$$

при достаточно малых β . Здесь $\text{const}_1, \text{const}_2$ не зависят от β и Λ .

Таким образом, мы доказали существование единственного нуля $\varepsilon_b = \varepsilon_b(\Lambda)$ функции $\Delta_\Lambda(z)$ вне $D_2\beta^2$ -окрестности непрерывного спектра. Этот нуль находится от $\gamma(\Lambda)$ на расстоянии, не превосходящем $D_1\beta^2$. Поскольку $\gamma(\Lambda) - \gamma_0 = O(\beta^2)$, утверждение теоремы 2.1 доказано.

§3. Отсутствие прилегающих уровней вдали от особых значений Λ

Далее следует изучить собственные значения $\mathcal{T}_\Lambda$, лежащие в $D_2\beta^2$ -окрестности непрерывного спектра — так называемые прилегающие уровни. Они возникают лишь вблизи особых значений Λ : это те значения, в которых функция $\omega_\Lambda(k)$ имеет либо вырожденный экстремум (глобальный), либо кратные экстремумы. Здесь мы покажем, что при Λ , лежащих вдали от особых значений, у оператора $\mathcal{T}_\Lambda$ нет прилегающих уровней.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $V_\delta \subset \mathbb{T}^\nu$ есть δ -окрестность множества особых значений Λ , $\delta > 0$. Тогда существует такое $\beta_0 = \beta_0(\delta)$, что при $|\beta| < \beta_0$ и любом $\Lambda \notin V_\delta$ у оператора $\mathcal{T}_\Lambda$ нет прилегающих уровней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ради простоты изложения мы проведем здесь доказательство лишь для случая $\nu = 1$. Оно обобщается на случай более высоких размерностей ν .

В случае, когда $\Lambda \notin V_\delta$, имеется единственная точка $k_\Lambda^{\max}$, в которой функция $\omega_\Lambda(k)$ достигает максимума и этот экстремум невырожден, и аналогичная точка $k_\Lambda^{\min}$, где она достигает минимума. У этих точек существуют ε -окрестности $U_\varepsilon^{\max}$ и $U_\varepsilon^{\min}$ соответственно, внутри которых производная $\omega'_\Lambda(k)$ не меняет свой знак, а вне окрестностей $U_\varepsilon^{\text{ext}}$, $\text{ext} = \min, \max$, выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \omega_\Lambda(k) - \omega_\Lambda(k_\Lambda^{\min}) &> \beta\rho, & k \notin U_\varepsilon^{\min}, \\ \omega_\Lambda(k_\Lambda^{\max}) - \omega_\Lambda(k) &> \beta\rho, & k \notin U_\varepsilon^{\max}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\rho > 0$ — некоторая константа, зависящая от β и Λ . В дальнейшем, не умаляя общности, будем считать, что $\varepsilon < 1/3$.

ЛЕММА 3.1. Для $\Lambda \notin V_\delta$ и $z < \tau_\Lambda^{\min}$ верно следующее представление:

$$\int_{\mathbb{T}^1} \frac{dk}{\omega_\Lambda(k) - z} = \frac{A_{\min}^\Lambda}{\sqrt{\tau_\Lambda^{\min} - z}} + \psi_\Lambda^{\min}(z), \quad (3.2)$$

где $A_{\min}^\Lambda = \sqrt{2\pi} |\omega'_\Lambda(k_\Lambda^{\min})|^{-1/2}$, $\tau_\Lambda^{\min} = \omega_\Lambda(k_\Lambda^{\min})$, а $\psi_\Lambda^{\min}(z)$ — ограниченная функция от z , $-\infty < z < \tau_\Lambda^{\min}$, допускающая оценку $|\psi_\Lambda^{\min}(z)| \leq C/\beta$, где константа C не зависит от β и Λ . При $z > \tau_\Lambda^{\max}$ имеет место аналогичное представление.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем

$$\int_{\mathbb{T}^1} \frac{dk}{\omega_\Lambda(k) - z} = \int_{U_\varepsilon^{\min}} \frac{dk}{\omega_\Lambda(k) - z} + \int_{\mathbb{T}^1 \setminus U_\varepsilon^{\min}} \frac{dk}{\omega_\Lambda(k) - z}. \quad (3.3)$$

В силу оценки (3.1) второй интеграл не превосходит $2\pi/(\beta\rho)$. Для оценки первого интеграла совершим гладкую замену переменных $k \rightarrow x(k)$ в окрестности $U_\varepsilon^{\min}$,

$$k = k_\Lambda^{\min} + x + ax^2 + O(x^3), \quad -\varepsilon'_1 < x < \varepsilon'_2,$$

где a — некоторая константа, а $\varepsilon'_i = \varepsilon'_i(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, приводящую функцию $\omega_\Lambda(k)$ к виду

$$\omega_\Lambda(k) = \tau_\Lambda^{\min} + \frac{1}{2} \omega''_\Lambda(k_\Lambda^{\min}) x^2.$$

Первый интеграл в (3.3) представится в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon'_1}^{\varepsilon'_2} \frac{C(x) dx}{\frac{1}{2} \omega''_\Lambda(k_\Lambda^{\min}) x^2 + \tau_\Lambda^{\min} - z} &= \int_{-\varepsilon'_1}^{\varepsilon'_2} \frac{dx}{\frac{1}{2} \omega''_\Lambda(k_\Lambda^{\min}) x^2 + \tau_\Lambda^{\min} - z} \\ &+ 2a \int_{-\varepsilon'_1}^{\varepsilon'_2} \frac{x dx}{\frac{1}{2} \omega''_\Lambda(k_\Lambda^{\min}) x^2 + \tau_\Lambda^{\min} - z} + \int_{-\varepsilon'_1}^{\varepsilon'_2} \frac{x^2 \tilde{C}(x) dx}{\frac{1}{2} \omega''_\Lambda(k_\Lambda^{\min}) x^2 + \tau_\Lambda^{\min} - z}; \end{aligned} \quad (3.4)$$

здесь $C(x) = dk/dx = 1 + 2ax + x^2 \tilde{C}(x)$, где $\tilde{C}(x)$ — ограниченная функция. Второй и третий интегралы в (3.4) снова допускают оценку $\bar{c}/\beta$ ($\bar{c}$ не зависит от β и Λ), а первый представляется в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon'_1}^{\varepsilon'_2} \frac{dx}{\frac{1}{2} \omega''_\Lambda(k_\Lambda^{\min}) x^2 + \tau_\Lambda^{\min} - z} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\frac{1}{2} \omega''_\Lambda(k_\Lambda^{\min}) x^2 + \tau_\Lambda^{\min} - z} - \int_{\mathbb{R}^1 \setminus [-\varepsilon'_1, \varepsilon'_2]} \frac{dx}{\frac{1}{2} \omega''_\Lambda(k_\Lambda^{\min}) x^2 + \tau_\Lambda^{\min} - z}. \end{aligned}$$

Второй интеграл снова может быть оценен величиной $\bar{c}/\beta$, а первый равен первому слагаемому в (3.2). Лемма доказана.

Перейдем теперь к оценке ряда

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} I_n^\Lambda(z) = R_1^\Lambda(z) - \frac{1}{\gamma(\Lambda) - z} R_2^\Lambda(z) \quad (3.5)$$

при $z < \tau_\Lambda^{\min}$. Здесь

$$I_n^\Lambda(z) = \int_{\mathbb{T}^1} \cdots \int_{\mathbb{T}^1} \frac{T_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n)}{\prod_{i=1}^n (\omega_\Lambda(k_i) - z)} \prod_{i=1}^n dk_i, \quad n \geq 2, \quad (3.6)$$

а T_k^Λ определена формулой (2.10).

Мы воспользуемся следующей оценкой:

ЛЕММА 3.2. Для z , лежащих в $D_2\beta^2$ -окрестности одного из краев $\tau_\Lambda^{\min}$ или $\tau_\Lambda^{\max}$ непрерывного спектра, и любого из подмножеств индексов $\gamma \subset \{1, \dots, n\}$, $\#\gamma \geq 2$, верна оценка

$$|T_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n, z)| < A(C\beta^2)^{n-1} n^{n/2} \prod_{(i,j) \subseteq \gamma} (k_i - k_j)^2, \quad (3.7)$$

где A и C — константы, не зависящие от γ , β , Λ , k_i , $i = 1, \dots, n$, и z , а произведение берется по всем неупорядоченным парам (i, j) элементов из γ .

Доказательство этой леммы приводится в приложении.

ЛЕММА 3.3. При $z < \tau_{\Lambda}^{\min}$ верна оценка

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} I_n^{\Lambda}(z) \right| \leq B \frac{A_{\min}^{\Lambda} \beta}{\sqrt{\tau_{\Lambda}^{\min} - z}} + R, \quad (3.8)$$

где R , B — константы, не зависящие от β , z и Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для каждого $\gamma \subset \{1, \dots, n\}$

$$\mathcal{H}_{\gamma} = \{(k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{T}^1)^n : k_i \in U_{\varepsilon}^{\min}, i \in \gamma, k_j \notin U_{\varepsilon}^{\min}, j \notin \gamma\},$$

где $U_{\varepsilon}^{\min}$ есть ε -окрестность точки $k_{\Lambda}^{\min}$.

Тогда при $\#\gamma \geq 2$

$$\left| \int_{\mathcal{H}_{\gamma}} \frac{T_n^{\Lambda}(k_1, \dots, k_n)}{\prod_{i=1}^n (\omega_{\Lambda}(k_i) - z)} \prod_{i=1}^n dk_i \right| < \frac{A(C\beta^2)^{n-1} n^{n/2}}{(\beta\rho)^{n-|\gamma|}} \int_{\mathcal{H}_{\gamma}} \frac{\prod_{(i,j) \subseteq \gamma} (k_i - k_j)^2}{\prod_{i \in \gamma} (\omega_{\Lambda}(k_i) - z)} \prod_{i \in \gamma} dk_i. \quad (3.9)$$

Далее, положив $u_i = k_i - k_{\Lambda}^{\min}$, $i \in \gamma$, получим, что

$$\prod_{(i,j) \subset \gamma} (k_i - k_j)^2 \leq \prod_{(i,j) \subset \gamma} 2(u_i^2 + u_j^2) = \sum_{s=\{s_i, i \in \gamma\}} A_s \prod (2u_i^2)^{s_i}, \quad (3.10)$$

где суммирование происходит по всем мультииндексам s с некоторыми комбинаторными положительными коэффициентами A_s , сумма которых равна $2^{p(p-1)/2}$, $p = |\gamma|$. Заметим, что в каждом мультииндексе $s = \{s_i, i \in \gamma\}$ существует не более одного значения $s_i = 0$; поэтому сумму (3.10) можно записать в виде

$$\sum_{j \in \gamma} \prod_{i \neq j, i \in \gamma} (2u_i^2) \sum_{s: s_j=0} A_s \prod_{m \neq j, m \in \gamma} (2u_m^2)^{s_m-1} + \prod_{i \in \gamma} (2u_i^2) \sum_{s: s_i > 0} A_s \prod_{m \in \gamma} (2u_m^2)^{s_m-1}.$$

Далее, поскольку $|u_i| < \varepsilon$ и $\sum s_i = p(p-1)/2$, мы получаем, что

$$\sum_{s: s_j=0} A_s \prod (2u_m^2)^{s_m-1} < 2^{p-1} (4\varepsilon^2)^{(p-1)(p-2)/2} < 2^{p-1}$$

и

$$\sum_{s, s_i > 0} A_s \prod (2u_m^2)^{s_m} < (4\varepsilon^2)^{p(p-1)/2} < 1$$

при $4\varepsilon^2 < 1$. Таким образом, интеграл в (3.9) допускает оценку

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{H}_{\gamma}} \frac{\prod (k_i - k_j)^2}{\prod (\omega_{\Lambda}(k_i) - z)} \prod dk_i \\ & < 2^{p-1} \sum_{j \in \gamma} \int_{U_{\varepsilon}^{\min}} \frac{dk_j}{\omega_{\Lambda}(k_j) - z} \prod_{i \neq j, i \in \gamma} \int_{U_{\varepsilon}^{\min}} \frac{2u_i^2 dk_i}{\omega_{\Lambda}(k_i) - z} + \prod_{i \in \gamma} \int_{U_{\varepsilon}^{\min}} \frac{2u_i^2 dk_i}{\omega_{\Lambda}(k_i) - z} \\ & \leq \left(\frac{\overline{C}\varepsilon}{\beta} \right)^{p-1} p \int_{U_{\varepsilon}^{\min}} \frac{dk}{\omega_{\Lambda}(k) - z} + \left(\frac{2\overline{C}\varepsilon}{\beta} \right)^p, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $\overline{C}$ — некоторая константа, не зависящая от β , Λ , z .

Окончательная оценка для интеграла (3.9) имеет вид

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathcal{H}_\gamma} \frac{T_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n)}{\prod_{i=1}^n (\omega_\Lambda(k_i) - z)} \prod_{i=1}^n dk_i \right| \\ & < A(C\beta^2)^{n-1} n^{n/2} \left[\left(\frac{D}{\beta} \right)^{n-1} |\gamma| \int_{U_\varepsilon^{\min}} \frac{dk}{\omega_\Lambda(k) - z} + \left(\frac{D}{\beta} \right)^n \right] \\ & = A(\widehat{C}\beta)^{n-1} n^{n/2} \left[|\gamma| \int_{U_\varepsilon} \frac{dk}{\omega_\Lambda(k) - z} + \frac{D}{\beta} \right], \end{aligned}$$

где $\widehat{C}$ и D — константы.

Таким образом, суммируя по всем γ , получаем, что

$$\left| \int_{(\mathbb{T}^1)^n} \frac{T_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n; z)}{\prod_{i=1}^n (\omega_\Lambda(k_i) - z)} \prod_{i=1}^n dk_i \right| < \widehat{A}(\widehat{C}\beta)^{n-1} n^{n/2+1} \left[\int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dk}{\omega_\Lambda(k) - z} + \frac{\overline{D}}{\beta} \right], \quad (3.12)$$

где снова $\overline{A}$, $\widehat{C}$, $\overline{D}$ — константы, не зависящие от β , Λ , n и z .

Отсюда, наконец, следует, что ряд (3.5) не превосходит $BA_{\min}^\Lambda \beta / \sqrt{\tau_\Lambda^{\min} - z} + R$, где B и R — константы, не зависящие от β , z и Λ . В выводе последнего неравенства мы использовали рассуждения из доказательства леммы 3.1. Лемма 3.3 доказана.

В силу предыдущих оценок при $\tau_\Lambda^{\min} - D_2\beta^2 < z < \tau_\Lambda^{\min}$ функция $\Delta_\Lambda(z)$ представляется при достаточно малом β в виде

$$\Delta_\Lambda(z) = \frac{\varphi_\Lambda(z)}{\sqrt{\tau_\Lambda^{\min} - z}} + \widehat{\psi}_\Lambda(z), \quad (3.13)$$

где $|\varphi_\Lambda(z) - A_{\min}^\Lambda| < B\beta$ и $|\widehat{\psi}_\Lambda(z)| < \widehat{c}/\beta$.

Поскольку $A_{\min}^\Lambda \sim 1/\sqrt{\beta}$, а $\sqrt{\tau_\Lambda^{\min} - z} < \sqrt{D_2}\beta$, мы видим, что первый член в представлении (3.13) при малых β превосходит по абсолютной величине второй, и, следовательно, $\Delta_\Lambda(z) \neq 0$ в указанном диапазоне z . Таким образом, доказано, что при $\Lambda \notin V_\delta$ у оператора $\mathcal{T}_\Lambda$ нет прилегающих уровней.

Теорема 3.1 доказана.

§4. Приложение. Доказательство леммы 3.2

Рассмотрим детерминант

$$\det(L(k_i, q_j)) = \det \begin{pmatrix} L(k_1, q_1) & \dots & L(k_1, q_n) \\ L(k_2, q_1) & \dots & L(k_2, q_n) \\ \vdots & & \vdots \\ L(k_n, q_1) & \dots & L(k_n, q_n) \end{pmatrix},$$

где $L(k, q)$ — функция двух переменных $(k, q) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$, аналитическая по каждому переменному в достаточно большой комплексной окрестности W_A вида (1.4), где $A > 1$. В этом случае из формулы Коши легко следует, что

$$|L^{(s_1)(s_2)}(k, q)| < Ds_1! s_2!, \quad (4.1)$$

где $D = \max_{k \in W_A, q \in W_A} |L(k, q)|$, а $L^{(s_1)(s_2)}$ означает производную порядка s_1 по первому и s_2 по второму аргументам.

Без ограничения общности мы можем считать, что подмножество γ состоит из первых p элементов множества $\{1, \dots, n\}$. Верна следующая легко проверяемая формула:

$$\det(L(k_i, q_j)) = \int_{k_1}^{k_2} d\xi_2 \int_{k_1}^{k_3} d\xi_3 \dots \int_{k_1}^{k_p} d\xi_p \begin{vmatrix} L(k_1, q_1) & \dots & L(k_1, q_n) \\ L^{(1)(0)}(\xi_2, q_1) & \dots & L^{(1)(0)}(\xi_2, q_n) \\ \vdots & & \vdots \\ L^{(1)(0)}(\xi_p, q_1) & \dots & L^{(1)(0)}(\xi_p, q_n) \\ L(k_{p+1}, q_1) & \dots & L(k_{p+1}, q_n) \\ \vdots & & \vdots \\ L(k_n, q_1) & \dots & L(k_n, q_n) \end{vmatrix}.$$

Применяя этот прием последовательно к переменным $\xi_2, \dots, \xi_p$ и используя затем аналогичное представление для переменных $q_1, \dots, q_n$, получаем окончательно

$$\begin{aligned} & \det(L(k_i, q_j)) \\ &= \int_{k_1}^{k_2} d\xi_2^{(1)} \dots \int_{k_1}^{k_p} d\xi_p^{(1)} \int_{\xi_2^{(1)}}^{\xi_3^{(1)}} d\xi_3^{(2)} \dots \int_{\xi_2^{(1)}}^{\xi_p^{(1)}} d\xi_p^{(2)} \dots \int_{\xi_{p-2}^{(p-3)}}^{\xi_p^{(p-3)}} d\xi_p^{(p-2)} \int_{\xi_{p-2}^{(p-3)}}^{\xi_p^{(p-2)}} d\xi_p^{(p-1)} \\ & \quad \times \int_{q_1}^{q_2} d\eta_2^{(1)} \dots \int_{q_1}^{q_p} d\eta_p^{(1)} \int_{\eta_2^{(1)}}^{\eta_3^{(1)}} d\eta_3^{(2)} \dots \int_{\eta_2^{(1)}}^{\eta_p^{(1)}} d\eta_p^{(2)} \dots \int_{\eta_{p-2}^{(p-3)}}^{\eta_p^{(p-3)}} d\eta_p^{(p-2)} \int_{\eta_{p-2}^{(p-3)}}^{\eta_p^{(p-2)}} d\eta_p^{(p-1)} \\ & \quad \times \begin{vmatrix} L^{(0)(0)}(k_1, q_1) & L^{(0),(1)}(k_1, \eta_2^{(1)}) & \dots & L^{(0),(\widehat{p})}(k_1, \eta_p^{(\widehat{p})}) & L(k_1, q_{p+1}) & \dots & L(k_1, q_n) \\ L^{(1)(0)}(\xi_2^{(1)}, q_1) & L^{(1)(1)}(\xi_2^{(1)}, \eta_2^{(1)}) & \dots & L^{(1)(\widehat{p})}(\xi_2^{(1)}, \eta_p^{(\widehat{p})}) & L^{(1)(0)}(\xi_2^{(1)}, q_{p+1}) & \dots & L^{(1)(0)}(\xi_2^{(1)}, q_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L^{\widehat{p},0}(\xi_p^{(\widehat{p})}, q_1) & L^{\widehat{p},1}(\xi_p^{(\widehat{p})}, \eta_2^{(1)}) & \dots & L^{\widehat{p},\widehat{p}}(\xi_p^{(\widehat{p})}, \eta_p^{(\widehat{p})}) & L^{(\widehat{p}),0}(\xi_p^{(\widehat{p})}, q_{p+1}) & \dots & L^{(\widehat{p}),0}(\xi_p^{(\widehat{p})}, q_n) \\ L^{(0)(0)}(k_{p+1}, q_1) & L^{(0)(1)}(k_{p+1}, \eta_2^{(1)}) & \dots & L^{(p)(\widehat{p})}(k_{p+1}, \eta_p^{(\widehat{p})}) & L^{(0)(0)}(k_{p+1}, q_{p+1}) & \dots & L^{(0)(0)}(k_{p+1}, q_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L^{(0)(0)}(k_n, q_1) & L^{(0),(1)}(k_n, \eta_2^{(1)}) & \dots & L^{(0),(\widehat{p})}(k_n, \eta_p^{(\widehat{p})}) & L^{(0)(0)}(k_n, q_{p+1}) & \dots & L^{(0)(0)}(k_n, q_n) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь $\widehat{p} = p - 1$. Воспользовавшись оценкой (4.1) и неравенством Адамара, получим, что определитель в (4.2) допускает оценку

$$\left(\prod_{m=1}^{p-1} m! \right)^2 D^n n^{n/2}. \quad (4.3)$$

Легко показать индукцией по числу p , что

$$\int_{k_1}^{k_2} d\xi_2^{(1)} \dots \int_{\xi_2^{(1)}}^{\xi_3^{(1)}} d\xi_3^{(2)} \dots \int_{\xi_{p-1}^{(p-1)}}^{\xi_p^{(p-1)}} d\xi_p^{(p-1)} = \frac{1}{\prod_{m=1}^{p-1} m!} \prod_{p \geq i > j \geq 1} (k_i - k_j). \quad (4.4)$$

Отсюда и из оценки (4.3) следует, что при любом $\gamma \subset \{1, \dots, n\}$

$$|\det(L(k_i, k_j))| < D^n n^{n/2} \prod_{(i,j) \in \gamma} (k_i - k_j)^2.$$

Заметим, что ядро $T_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n)$ представляется в виде

$$T_n^\Lambda(k_1, \dots, k_n) = \det(M_\Lambda(k_i, k_j) + 1) - \det(M_\Lambda(k_i, k_j)) \quad (4.5)$$

и к каждому из этих детерминантов в силу аналитичности функции $M_\Lambda(k_1, k_2)$ в области $W_A \times W_A$ применима доказанная оценка. Таким образом, лемма 3.2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 3.2 (а также ее доказательство) обобщаются на случай любого числа попарно непересекающихся подмножеств $\gamma_1, \dots, \gamma_l$, $\gamma_i \subset \{1, \dots, n\}$, $i = 1, \dots, l$. Например, для случая двух подмножеств γ_1, γ_2 , $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$,

$$|\det(L(k_i, k_j))| \leq D^n n^{n/2} \prod_{(i,j) \subset \gamma_1} (k_i - k_j)^2 \prod_{(i',j') \subset \gamma_2} (k_{i'} - k_{j'})^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Malyshev V. A., Minlos R. A.* Invariant subspaces of clustering operators. I. J. Stat. Phys. **21**, No. 3, 231–242 (1979); II, Commun. Math. Phys. **82**, 211–226 (1981).
2. *Малышев В. А., Минлос Р. А.* Линейные операторы в бесконечно-частичных системах. Наука, М., 1992.
3. *Onzager L., Kaufman B.* Crystal statistics. Phys. Rev., **76**, 232 (1949)
4. *Минлос Р. А., Синай Я. Г.* Изучение спектра стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа. Теор. мат. физ., **2**, 230–243 (1970).
5. *Маматов Ш. С., Минлос Р. А.* Связанные состояния двухчастичного кластерного оператора. Теор. мат. физ., **79**, №2, 163–179 (1989).
6. *Маматов Ш. С.* О связанных состояниях трансфер-матрицы гиббсовского решетчатого поля. Дисс. к.ф.-м.н., 1986.
7. *Малышев В. А., Минлос Р. А.* Гиббсовские случайные поля. Наука, М., 1985.
8. *Abdullaev Zh. I., Lakaev S. N.* On spectral properties of the matrix-valued Friedrichs model. Adv. Soviet Math., Vol. 5 (Minlos R. A., ed.), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1991, pp. 1–37.
9. *Minlos R. A., Zhizhina E.* Leading branches of the transfer-matrix spectrum for lattice spin systems. J. Statist. Phys., **108**, 885–904 (2002).
10. *Abdullaev J., Minlos R. A.* An extension of the Ising Model. Adv. Soviet Math., Vol. 20, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1994, pp. 1–20.
11. *Schor R. S., O'Carroll M.* Transfer matrix spectrum and bound states for the lattice classical ferromagnetic spin systems at high temperature. J. Statist. Phys., **99**, No. 5–6, 1265–1279 (2000).
12. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1980.
13. *Яфаев Д. Р.* Теория рассеяния. Изд-во СПбГУ, 1996.
14. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 1956.
15. *Лакштанов Е. Л.* Старшие ветви спектра трансфер-матрицы для общих спиновых моделей с взаимодействием на один шаг. Работа принята к печати в Вестнике МГУ, сер. матем. (№6, 2004).

Московский государственный университет,
email: alexenko@mccme.ru

Поступило в редакцию
8 апреля 2004 г.

Институт проблем передачи информации РАН,
email: minl@iitp.ru