Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. З. Соломяк, О дискретном спектре семейства дифференциальных операторов, *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 3, 70–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:22:38

О дискретном спектре семейства дифференциальных операторов

© 2004. М. З. Соломяк

*Посвящается Виктору Борисовичу Лидскому
в связи с его восьмидесятилетием*

§1. Введение

В настоящей работе мы изучаем дискретный спектр семейства $\mathbf{A}_\alpha$ дифференциальных операторов, определенных в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$ дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}U = -U''_{xx} + \frac{1}{2}(-U''_{yy} + y^2U) \quad (1.1)$$

и «условием сопряжения» на прямой $x = 0$

$$U'_x(+0, y) - U'_x(-0, y) = \alpha y U(0, y), \quad y \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

В формуле (1.2) через α обозначен вещественный параметр (константа связи). Таким образом, дифференциальное выражение, задающее действие оператора, не содержит параметра α . Он появляется только в условии (1.2), которое задает область определения оператора $\mathbf{A}_\alpha$. Подстановка $\alpha \mapsto -\alpha$ соответствует замене переменных $y \mapsto -y$, которая не влияет на спектр. Поэтому в дальнейшем мы обсуждаем лишь случай $\alpha > 0$.

Как мы увидим, спектр $\sigma(\mathbf{A}_\alpha)$ оператора $\mathbf{A}_\alpha$ имеет дискретную составляющую только при $\alpha < \sqrt{2}$, и мы изучим ее поведение при $\alpha \nearrow \sqrt{2}$.

Операторы, содержащие семейство $\mathbf{A}_\alpha$ в качестве частного случая, были введены Смилянским [8] как модель необратимой квантовой системы. Некоторые важные заключения о спектре семейства $\mathbf{A}_\alpha$ были сделаны в [8] «на физическом уровне строгости». Первые математические результаты на эту тему были получены в [9]. Они были существенно расширены в [7]. Работа [7] еще не опубликована, и ее результаты в данной статье не используются. Однако ниже мы упоминаем некоторые из этих результатов при обсуждении общих вопросов.

Для каждого $\alpha > 0$ оператор $\mathbf{A}_\alpha$ допускает единственную естественную самосопряженную реализацию (см. [9] при $\alpha \neq \sqrt{2}$ и [7] при $\alpha = \sqrt{2}$). Выделенная роль значения $\alpha = \sqrt{2}$ будет объяснена ниже. Мы будем называть значения $\alpha < \sqrt{2}$ *малыми*, а значения $\alpha > \sqrt{2}$ *большими*. Спектральные свойства оператора $\mathbf{A}_\alpha$ для малых и больших значений параметра α значительно различаются между собой.

Полезно рассмотреть квадратичную форму $\mathbf{a}_\alpha[U]$, которая формально соответствует оператору $\mathbf{A}_\alpha$. Она может быть записана в виде $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{a}_0 + \alpha \mathbf{b}$, где

$$\mathbf{a}_0[U] = \int_{\mathbb{R}^2} \left(|U'_x|^2 + \frac{1}{2} (|U'_y|^2 + y^2 |U|^2) \right) dx dy, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{b}[U] = \int_{\mathbb{R}} y |U(0, y)|^2 dy. \quad (1.4)$$

Мы рассматриваем $\mathbf{a}_0[U]$ как невозмущенную квадратичную форму, а $\alpha \mathbf{b}[U]$ — как возмущение. Важная особенность рассматриваемой задачи проистекает из того факта, что форма $\mathbf{b}[U]$ только относительно ограничена, но не компактна относительно квадратичной формы $\mathbf{a}_0[U]$. По этой причине стандартные результаты теории возмущений неприменимы, что делает изучение операторов $\mathbf{A}_\alpha$ интересной и нетривиальной задачей.

Оказывается, что $\mathbf{a}_0$ -грань квадратичной формы $\mathbf{b}[U]$ в точности равна $1/\sqrt{2}$. Это объясняет роль пограничного значения $\alpha = \sqrt{2}$. Техника квадратичных форм неприменима к большим значениям параметра α . В [7] (а отчасти уже и в [9]) доказано, что спектр оператора $\sigma(\mathbf{A}_\alpha)$ при $\alpha > \sqrt{2}$ является чисто непрерывным и совпадает со всей вещественной прямой. Спектр оператора $\mathbf{A}_{\sqrt{2}}$ также чисто непрерывен и совпадает с полупрямой $[0, \infty)$.

Оператор $\mathbf{A}_0$ легко исследовать с помощью разделения переменных. Он разлагается в ортогональную сумму операторов на пространстве $L^2(\mathbb{R})$, задаваемых формулой

$$\mathbf{H}_n = -d^2/dx^2 + (n + 1/2), \quad n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, \dots\}. \quad (1.5)$$

Отсюда следует, что спектр $\sigma(\mathbf{A}_0)$ является абсолютно непрерывным и совпадает с полупрямой $[1/2, \infty)$. Его кратность равна $2n$ на каждом интервале $(n - 1/2, n + 1/2)$, $n \in \mathbb{N}$.

Следующее утверждение, описывающее спектральные свойства оператора $\mathbf{A}_\alpha$ при малых α , представляет собой частный случай теоремы 6.2 из [9].

Предложение 1.1. Пусть $\alpha < \sqrt{2}$. Тогда $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{A}_\alpha) = \sigma(\mathbf{A}_0) = [1/2, \infty)$. Спектр оператора $\mathbf{A}_\alpha$ ниже порога $\lambda_0 = 1/2$ лежит в интервале $(0, 1/2)$, всегда непуст и состоит из конечного числа собственных значений.

Такая структура нижнего спектра типична для относительно компактных возмущений, чего нет в нашем случае. Здесь работает и приводит к тому же результату (но только для малых значений параметра α) другой механизм, который мы обсудим в заключительном §5.

Пусть задан самосопряженный оператор $\mathbf{T}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и вещественное число s . Введем обозначения

$$N_+(s; \mathbf{T}) = \dim E^{\mathbf{T}}(s, \infty)\mathfrak{H}, \quad N_-(s; \mathbf{T}) = \dim E^{\mathbf{T}}(-\infty, s)\mathfrak{H},$$

где $E^{\mathbf{T}}(\cdot)$ — спектральная мера оператора $\mathbf{T}$. Если, скажем, $N_-(s; \mathbf{T}) < \infty$, то спектр оператора $\mathbf{T}$ на интервале $(-\infty, s)$ сводится к конечному числу собственных значений (с учетом кратности) и $N_-(s; \mathbf{T})$ равно числу этих значений.

Цель этой работы — изучить поведение функции $N_-(1/2; \mathbf{A}_\alpha)$ при $\alpha \nearrow \sqrt{2}$. Мы увидим, что $N_-(1/2; \mathbf{A}_\alpha) \rightarrow \infty$, и вычислим ее асимптотику. Этот результат дополняет предложение 1.1 количественной характеристикой дискретной части спектра $\sigma(\mathbf{A}_\alpha)$. Вероятно, центральным результатом статьи следует считать

теорему 3.1. Она устанавливает равенство $N_-(1/2 - \varepsilon; \mathbf{A}_\alpha) = N_+(\sqrt{2}/\alpha; \mathbf{J}(\varepsilon))$, где $\varepsilon \in (0, 1/2)$ и $\mathbf{J}(\varepsilon)$ — некоторая матрица Якоби. Это аналог классического принципа Бирмана–Швингера для операторного семейства $\mathbf{A}_\alpha$.

§2. Квадратичная форма $\mathbf{a}_\alpha$

Квадратичная форма $\mathbf{a}_0$, задаваемая формулой (1.3), положительно определена и замкнута на своей естественной области определения

$$D := \text{Dom } \mathbf{a}_0 = \{U \in H^1(\mathbb{R}^2) : \mathbf{a}_0[U] < \infty\},$$

где, как обычно, H^1 — пространство Соболева. Самосопряженный оператор, порождаемый в $L^2(\mathbb{R}^2)$ квадратичной формой $\mathbf{a}_0[U]$, совпадает с $\mathbf{A}_0$, т. е. с оператором (1.1)–(1.2) при $\alpha = 0$.

Удобно выразить обе квадратичные формы $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{b}$ в терминах разложения функции U в ряд по (нормированным в $L^2(\mathbb{R})$) функциям Эрмита переменной y :

$$U(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} u_n(x) \chi_n(y). \quad (2.1)$$

Мы часто отождествляем функцию $U(x, y)$ с последовательностью $\{u_n(x)\}$ и пишем $U \sim \{u_n\}$. Это отождествление представляет собой унитарное отображение пространства $L^2(\mathbb{R}^2)$ на гильбертово пространство $\ell^2(\mathbb{N}_0, L^2(\mathbb{R}))$. Напомним рекуррентное соотношение для функций χ_n :

$$\sqrt{n+1} \chi_{n+1}(y) - \sqrt{2} y \chi_n(y) + \sqrt{n} \chi_{n-1}(y) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.2)$$

Подставляя в (1.3) представление (2.1) функции U , находим, что

$$\mathbf{a}_0[U] = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbf{h}_n[u_n] =: \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \int_{\mathbb{R}} \left(|u'_n|^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right) |u_n|^2 \right) dx. \quad (2.3)$$

Равенство (2.3) показывает, что разложение (2.1) диагонализует квадратичную форму $\mathbf{a}_0[U]$. Отсюда сразу вытекает разложение оператора $\mathbf{A}_0$ в ортогональную сумму операторов $\mathbf{H}_n$ (см. (1.5)), а значит, и описанная во введении структура спектра $\sigma(\mathbf{A}_0)$.

Таким же образом, принимая во внимание равенство (2.2), находим, что

$$\mathbf{b}[U] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{2n} \text{Re}(u_n(0) \overline{u_{n-1}(0)}). \quad (2.4)$$

ЛЕММА 2.1 (ср. [9, §6]). *Квадратичная форма $\mathbf{b}[U]$ корректно определена на D , и*

$$\sqrt{2} |\mathbf{b}[U]| \leq \mathbf{a}_0[U] \quad \forall U \in D. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наши рассуждения основаны на неравенстве

$$2\gamma |u(0)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} (|u'|^2 + \gamma^2 |u|^2) dx \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}), \gamma > 0, \quad (2.6)$$

элементарное доказательство которого мы опустим. Легко также показать, что равенство в (2.6) достигается на одномерном пространстве в $H^1(\mathbb{R})$, порожденном функцией

$$\tilde{u}_\gamma(x) := (2\gamma)^{-1/2} e^{-\gamma|x|}. \quad (2.7)$$

Здесь множитель $(2\gamma)^{-1/2}$ подобран так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}} (|\tilde{u}'_{\gamma}|^2 + \gamma^2 |\tilde{u}_{\gamma}|^2) dx = 1.$$

Из формулы (2.4) выводим, что

$$\sqrt{2}|\mathbf{b}[U]| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{n}(|u_n(0)|^2 + |u_{n-1}(0)|^2) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})|u_n(0)|^2.$$

Поскольку $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{2(2n+1)}$, мы заключаем из (2.6), что

$$\sqrt{2}|\mathbf{b}[U]| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbf{h}_n[u_n] = \mathbf{a}_0[U] \quad \forall U \sim \{u_n\} \in D, \quad (2.8)$$

откуда следует (2.5). $\square$

Из леммы 2.1 вытекает, что при $0 < \alpha < \sqrt{2}$ квадратичная форма $\mathbf{a}_{\alpha}[U]$ положительно определена:

$$\mathbf{a}_{\alpha}[U] \geq \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \mathbf{a}_0[U] \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \|U\|^2, \quad U \in D \quad (2.9)$$

(здесь и в дальнейшем $\|U\| := \|U\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$). Кроме того, она замкнута (см., например, [2, Lemma 1.1]). Для таких α оператор $\mathbf{A}_{\alpha}$ может быть определен как самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R}^2)$, ассоциированный с квадратичной формой $\mathbf{a}_{\alpha}[U]$.

§3. Функция $N_{-}(1/2 - \varepsilon; \mathbf{A}_{\alpha})$

Мы интересуемся нижним спектром оператора $\mathbf{A}_{\alpha}$, т.е. частью спектра, лежащей левее точки $1/2 = \inf \sigma(\mathbf{A}_0)$. Согласно (2.9), эта часть спектра $\sigma(\mathbf{A}_{\alpha})$ содержится в интервале $1 - \alpha/\sqrt{2} \leq 2\lambda < 1$. Общая теория возмущений не дает никакой дальнейшей информации, поскольку квадратичная форма $\mathbf{b}$ лишь относительно ограничена, но не компактна относительно формы $\mathbf{a}_0$. Однако мы сведем задачу к более простой для некоторого оператора Якоби в $\ell^2(\mathbb{N}_0)$. Эта редукция позволит нам решить исходную задачу.

Зафиксируем число ε в интервале $0 < \varepsilon < 1/2$ и рассмотрим матрицу Якоби $\mathbf{J}(\varepsilon)$ с нулевой диагональю и с элементами

$$j_{n,n-1}(\varepsilon) = j_{n-1,n}(\varepsilon) = \frac{n^{1/2}}{2(n+\varepsilon)^{1/4}(n-1+\varepsilon)^{1/4}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Все остальные элементы этой матрицы — нули. Тем же символом $\mathbf{J}(\varepsilon)$ обозначим и оператор в $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, порожденный этой матрицей. Оператор $\mathbf{J}(\varepsilon)$ ограничен и самосопряжен, а его спектр инвариантен относительно отражения $\lambda \mapsto -\lambda$. Хорошо известно, что $\sigma_{\text{ac}}(\mathbf{J}(\varepsilon)) = [-1, 1]$. Кроме того, оператор может иметь (и действительно имеет) простые собственные значения $\pm\lambda_n$, $\lambda_n > 1$, с единственно возможными точками накопления $\lambda = \pm 1$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для каждого $\alpha \in (0, \sqrt{2})$ положим $s(\alpha) = \sqrt{2}/\alpha$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ справедливо равенство*

$$N_{-}(1/2 - \varepsilon; \mathbf{A}_{\alpha}) = N_{+}(s(\alpha), \mathbf{J}(\varepsilon)) = N_{-}(-s(\alpha), \mathbf{J}(\varepsilon)). \quad (3.1)$$

Равенство (3.1) может рассматриваться как еще одно проявление общего принципа Бирмана–Швингера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с вариационным принципом имеем

$$N_-(1/2 - \varepsilon; \mathbf{A}_\alpha) = \max_{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(\varepsilon)} \dim \mathcal{F}, \quad (3.2)$$

где $\mathfrak{F}(\varepsilon)$ — множество всех таких подпространств $\mathcal{F} \subset D$, что

$$\mathbf{a}_\alpha[U] - (1/2 - \varepsilon) \|U\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 < 0 \quad \forall U \in \mathcal{F}, U \neq 0. \quad (3.3)$$

Положим

$$\|U\|_\varepsilon^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \int_{\mathbb{R}} (|u'_n|^2 + (n + \varepsilon)|u_n|^2) dx, \quad U \sim \{u_n\}.$$

Для любых $\varepsilon > 0$ и $U \in \mathfrak{H}$ квадратичная форма $\|U\|_\varepsilon^2$ оценивается через $\mathbf{a}_0[U]$ сверху и снизу и поэтому может быть взята в качестве формы, задающей метрику на D . Неравенство (3.3) можно переписать в виде

$$\|U\|_\varepsilon^2 + \alpha \sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{2n} \operatorname{Re}(u_n(0) \overline{u_{n-1}(0)}) < 0. \quad (3.4)$$

Рассмотрим подпространство $\tilde{D}(\varepsilon)$ в D , образованное элементами

$$\tilde{U} \sim \{C_n \tilde{u}_{\sqrt{n+\varepsilon}}\}, \quad \{C_n\} \in \ell^2(\mathbb{N}_0),$$

где элемент $\tilde{u}_\gamma$ для любого $\gamma > 0$ дается формулой (2.7). Заметим, что $\|\tilde{U}\|_\varepsilon = \|\{C_n\}\|_{\ell^2}$. Пусть Π_ε — проектор в D на $\tilde{D}(\varepsilon)$, ортогональный относительно метрики $\|\cdot\|_\varepsilon$. Если $U \sim \{u_n\} \in D$, то

$$\tilde{U}_\varepsilon := \Pi_\varepsilon U \sim \{C_n \tilde{u}_{\sqrt{n+\varepsilon}}\},$$

где

$$C_n = \int_{\mathbb{R}} (u'_n \tilde{u}'_{\sqrt{n+\varepsilon}} + (n + \varepsilon) u_n \tilde{u}_{\sqrt{n+\varepsilon}}) dx = 2^{1/2} (n + \varepsilon)^{1/4} u_n(0).$$

Мы видим, что

$$C_n \tilde{u}_{\sqrt{n+\varepsilon}}(0) = u_n(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.5)$$

Если в неравенстве (3.4) заменить U на $\tilde{U}_\varepsilon$, то первый член в левой части не увеличится, а второй не изменится, так что неравенство останется верным. Другими словами, если подпространство $\mathcal{F} \subset D$ принадлежит классу $\mathfrak{F}(\varepsilon)$, то и $\Pi_\varepsilon \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(\varepsilon)$.

С другой стороны, пусть $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ — такие два подпространства класса $\mathfrak{F}(\varepsilon)$, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ и $\mathcal{F} \subset \tilde{D}(\varepsilon)$. Предположим, что существует элемент $U \sim \{u_n\} \in \mathcal{F}'$, ортогональный к $\mathcal{F}$ в ε -метрике. Тогда в силу (3.5) выполнено соотношение $u_n(0) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$. Отсюда следует, что $\mathbf{b}[U] = 0$ в противоречии с (3.4). Таким образом, из нашего предположения вытекает, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Из этих замечаний видно, что наряду с (3.2) имеет место равенство

$$N_-(1/2 - \varepsilon; \mathbf{A}_\alpha) = \max_{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(\varepsilon), \mathcal{F} \subset \tilde{D}(\varepsilon)} \dim \mathcal{F}.$$

Для любого $\tilde{U} \sim \{C_n \tilde{u}_{\sqrt{n+\varepsilon}}\} \in \tilde{D}(\varepsilon)$ имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}\|_\varepsilon^2 + \alpha \mathbf{b}[\tilde{U}] &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} |C_n|^2 + 2s^{-1} \sum_{n \in \mathbb{N}} j_{n,n-1}(\varepsilon) \operatorname{Re}(C_n \overline{C_{n-1}}) \\ &= \|g\|_{\ell^2}^2 + s^{-1}(\mathbf{J}(\varepsilon)g, g)_{\ell^2}, \quad g = \{C_n\} \in \ell^2. \end{aligned}$$

Сумма в правой части есть не что иное, как квадратичная форма оператора $\mathbf{I} + s^{-1}\mathbf{J}(\varepsilon)$. Теперь равенство (3.1) следует из вариационного принципа и симметричности спектра $\sigma(\mathbf{J}(\varepsilon))$. $\square$

Теорема 3.1 неприменима к наиболее интересному случаю $\varepsilon = 0$, поскольку $j_{1,0}(0) = \infty$. Однако мы можем ограничить квадратичную форму $(\mathbf{J}(\varepsilon)g, g)_{\ell^2}$ на подпространство $\{g = \{C_n\} : C_0 = 0\}$ коразмерности 1. При этом число собственных значений изменится, самое большее, на единицу. В полученной задаче переход к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ уже возможен, и возникающая матрица Якоби с нулевой диагональю есть матрица $\mathbf{J}_0$ с внедиагональными элементами

$$2j_{n,n-1} = 2j_{n-1,n} = (1 - n^{-1})^{-1/4}, \quad n - 1 \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

Итак, мы пришли к следующему результату.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\alpha \in (0, \sqrt{2})$ and $s(\alpha) = \sqrt{2}/\alpha$. Тогда либо $N_-(1/2; \mathbf{A}_\alpha) = N_+(s; \mathbf{J}_0)$, либо $N_-(1/2; \mathbf{A}_\alpha) = N_+(s; \mathbf{J}_0) + 1$.

Благодаря теореме 3.2 задача об асимптотическом поведении функции $N_-(1/2; \mathbf{A}_\alpha)$ при $\alpha \nearrow \sqrt{2}$ сводится к вопросу об асимптотике собственных значений матрицы $\mathbf{J}_0$, лежащих правее точки $\lambda = 1$. Мы не смогли найти соответствующий результат в литературе и потому выводим его в следующем параграфе. Вот его формулировка.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\mathbf{J}$ — матрица Якоби с нулевой диагональю и с внедиагональными элементами

$$j_{n,n-1} = j_{n-1,n} = \frac{1}{2} + qn^{-1}(1 + o(1)), \quad (3.7)$$

где $q = \text{const}$, $q > 0$. Тогда оператор $\mathbf{J}$ имеет бесконечно много невырожденных собственных значений $\pm \lambda_k(\mathbf{J})$, таких, что

$$\lambda_k(\mathbf{J}) = 1 + \frac{2q^2}{k^2}(1 + o(1)), \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Эти собственные значения исчерпывают спектр оператора $\mathbf{J}$ вне отрезка $[-1, 1]$. Равенство (3.8) можно эквивалентным образом записать в виде

$$N_+(s; \mathbf{J}) \sim \frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{s-1}}, \quad s \searrow 1. \quad (3.9)$$

Из (3.6) следует, что элементы матрицы $\mathbf{J}_0$ удовлетворяют (3.7) при $q = 1/8$. Поэтому из теорем 3.2 и 3.3 (равенство (3.9)) сразу же следует асимптотическая формула

$$N_-(1/2; \mathbf{A}_\alpha) \sim \frac{1}{4\sqrt{2(s(\alpha) - 1)}}, \quad s(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}, \quad \alpha \searrow \sqrt{2}. \quad (3.10)$$

§4. Доказательство теоремы 3.3

Основным ингредиентом доказательства является результат ван Ассе [1] о классе ортогональных полиномов на вещественной оси, а именно, о так называемых полиномах Поллачека $P^\lambda(x; a, b)$ (см., например, [3]). Они зависят от трех вещественных параметров λ , a и b , но нам понадобится только их частный случай при $b = 0$, $a = -r < 0$ и $\lambda > r$. Нормируя полиномы $P^\lambda(x; -r, 0)$ так, чтобы старший коэффициент стал равен единице, получаем новые полиномы, которые обозначим $Q^\lambda(x; r)$. Они удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$Q_{n+1}^\lambda(x; r) = xQ_n^\lambda(x; r) - p_n(\lambda, r)Q_{n-1}^\lambda(x; r),$$

$$p_n(\lambda, r) = \frac{n(n + 2\lambda - 1)}{4(n - r + \lambda - 1)(n - r + \lambda)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Полиномы Q_n^λ соответствуют матрице Якоби $\mathbf{J}(\lambda, r)$ с нулевой диагональю и внедиагональными элементами

$$j_{n,n-1} = j_{n-1,n} = \sqrt{p_n(\lambda, r)}. \quad (4.1)$$

В [1, § III] доказано, что спектр оператора $\mathbf{J}(\lambda, r)$ вне отрезка $[-1, 1]$ состоит из невырожденных собственных значений $\pm\mu_k = \pm\mu_k(\lambda, r)$, где числа μ_k удовлетворяют уравнению

$$\lambda - \frac{r\mu}{\sqrt{\mu^2 - 1}} = -k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Отсюда получаем, что

$$\mu_k = \left(1 - \frac{r^2}{(k + \lambda)^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{r^2}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.2)$$

Другим ингредиентом является вариационный принцип для собственных значений матриц Якоби (см. [6, Лемма III.1]). Этот вариационный принцип — почти непосредственное следствие теоремы сравнения Штурма (см., например, [5, Theorem 1, p. 152]). Ниже мы даем формулировку для частного случая, который требуется в данной статье.

ЛЕММА 4.1. Пусть $\mathbf{J}$, $\mathbf{J}'$ — матрицы Якоби с нулевой диагональю и внедиагональными элементами $j_{n,n-1} = 1/2 + b_n$, $j'_{n,n-1} = 1/2 + b'_n$, такими, что $0 \leq b_n \leq b'_n$ для всех n и $b'_n \rightarrow 0$. Тогда $\sigma_{ess}(\mathbf{J}) = \sigma_{ess}(\mathbf{J}') = [-1, 1]$ и

$$N^+(s; \mathbf{J}) \leq N^+(s; \mathbf{J}')$$

для любого $s > 1$.

Теперь мы можем доказать теорему 3.3. Из леммы 4.1 следует, что асимптотическое поведение собственных значений не зависит от слагаемого $o(1)$ в (3.7). Элементы $j_{n,n-1}$ в (4.1) удовлетворяют соотношению $2j_{n,n-1} \sim 1 + r/n$. Очевидно, что равенство (3.8) является прямым следствием формулы (4.2).

§5. Заключительные замечания

5.1. Здесь мы объясним, почему при $\alpha < \sqrt{2}$ структура спектра $\sigma(\mathbf{A}_\alpha)$ оператора $\mathbf{A}_\alpha$ ниже порога $1/2$ такая же, как если бы возмущение было относительно компактным. Разумеется, одно из объяснений дается доказательством

теоремы 3.1, но мы приведем еще одно рассуждение, в чем-то более эвристического характера. Строгая версия этого рассуждения использовалась в [9] при доказательстве теоремы 6.2.

Квадратичная форма $\mathbf{b}[U]$ (см. (1.4) и (2.4)) есть сумма членов

$$\mathbf{b}_n[U] = \sqrt{2n} \operatorname{Re}(u_n(0) \overline{u_{n-1}(0)}),$$

каждый из которых имеет ранг два. Квадратичная форма $\mathbf{b}_n[U]$ взаимодействует только с членами $\mathbf{h}_{n-1}[u_{n-1}]$ и $\mathbf{h}_n[u_n]$ в представлении (2.3) квадратичной формы $\mathbf{a}_0[U]$. Член $\mathbf{h}_n[u_n]$ соответствует оператору $\mathbf{H}_n$ (см. (1.5)), спектр которого есть $[n + 1/2, \infty)$. Возмущение спектра, привнесенное членом $\alpha \mathbf{b}_n[U]$, не достигает точки $\lambda_0 = 1/2$ при условии, что $\alpha < \sqrt{2}$ и n достаточно велико. Это означает, что, по существу, мы имеем дело с возмущением конечного ранга до тех пор, пока мы ограничиваемся малыми значениями константы связи и интересуемся только нижней частью спектра $\sigma(\mathbf{A}_\alpha)$.

5.2. В работе [9] операторное семейство $\mathbf{A}_\alpha$ было рассмотрено в более общей постановке. А именно, операторы действуют в пространстве $L^2(\Gamma \times \mathbb{R})$, где Γ — метрический звездный граф, т.е. граф с m ребрами $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$, $1 \leq m < \infty$, выходящими из общей вершины o . Напомним, что каждое ребро метрического графа рассматривается как отрезок прямой (конечный или бесконечный). Вещественная ось $\mathbb{R}$ может рассматриваться как звездный граф с двумя ребрами (так что $m = 2$) бесконечной длины и вершиной $o = 0$.

Отождествим каждое ребро $\mathcal{B}_j$ с отрезком $[0, B_j]$, где $B_j \leq \infty$ — длина ребра $\mathcal{B}_j$. Через x обозначим координату вдоль каждого ребра (опуская индекс j); значение $x = 0$ соответствует точке o .

Действие оператора $\mathbf{A}_\alpha$ в этом более общем случае определяется тем же равенством (1.1), в котором y обозначает координату вдоль дополнительной прямой. Условие (1.2) заменяется условиями сопряжения

$$U^1(0, y) = \dots = U^m(0, y), \quad U_x^1(0, y) + \dots + U_x^m(0, y) = \alpha y U(0, y),$$

где U^j обозначает ограничение функции U на ребро $\mathcal{B}_j$. Кроме того, налагается условие Дирихле $U^j(B_j, y) = 0$ на каждом ребре конечной длины.

Теорема 6.2 в [9] (ср. предложение 1.1 в данной статье) доказана для этой общей версии оператора $\mathbf{A}_\alpha$. Единственное отличие от частного случая $\Gamma = \mathbb{R}$ состоит в том, что $\mathbf{a}_0$ -грань квадратичной формы $\mathbf{b}$ равна $\sqrt{2}/m$ (ср. (2.5)). Соответственно техника, разработанная в данной статье, позволяет доказать аналог асимптотической формулы (3.10). Единственное отличие заключается в том, что для любого звездного графа с m ребрами нужно взять $\alpha \nearrow m/\sqrt{2}$ и $s(\alpha) = m/(\alpha\sqrt{2})$.

В заключение я хотел бы выразить глубокую благодарность С. Н. Набоко за очень полезные обсуждения и рецензенту, указавшему на опisku в формуле (3.8) в первоначальной версии статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Van Assche W. Pollaczek polynomials and summability methods. J. Math. Anal. Appl., **147**, 498–505 (1990).
2. Birman M. Sh., Solomyak M. Z. Schrödinger operator. Estimates for number of bound states as function-theoretical problem. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 150, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1992, pp. 1–54.

3. *Chihara T. S.* An introduction to orthogonal polynomials. Gordon and Breach, 1978.
4. *Elaydi S. N.* An introduction to difference equations. Springer-Verlag, New York, 1999.
5. *Fort T.* Finite difference equations in the real domain. Oxford University Press, 1948.
6. *Geronimo J. S.* On the spectra of infinite-dimensional Jacobi matrices. J. Approx. Theory, **53**, 251–256 (1988).
7. *Naboko S., Solomyak M.* On the absolutely continuous spectrum of a family of operators appearing in the theory of irreversible quantum systems. Submitted to Proc. London Math. Soc.
8. *Smilansky U.* Irreversible quantum graphs. Waves Random Media, **14**, 143–153 (2004).
9. *Solomyak M.* On a differential operator appearing in the theory of irreversible quantum graphs. Waves Random Media, **14**, 173–185 (2004).

The Weizmann Institute of Science (Israel),
Department of Mathematics
email: michail.solomyak@weizmann.ac.il

Поступило в редакцию
30 января 2004 г.