Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, Спектр резонансов и формула следа в задаче потенциального рассеяния, *Функци. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 3, 79–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa119>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:29:13

УДК 517.9

Спектр резонансов и формула следа в задаче потенциального рассеяния*

© 2004. С. А. СТЕПИН

*Виктору Борисовичу Лидскому
с благодарностью и глубоким уважением*

В настоящей статье асимптотическое распределение резонансов (квазиуровней) оператора Шрёдингера исследуется в рамках спектрального подхода Лакса и Филлипса к изучению решений волнового уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + V(x)\right)u(x, t) = 0 \quad (1)$$

с вещественным потенциалом $V(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в пространстве нечетной размерности. Как известно, связь между возмущенной и невозмущенной ($V(x) \equiv 0$) эволюционными группами $U_V(t)$ и $U_0(t)$, отвечающими задаче Коши для уравнения (1), задается волновыми операторами и оператором рассеяния; последний в спектральном представлении невозмущенной задачи записывается с помощью матрицы рассеяния.

Согласно общей теории [1], решение $u(x, t)$ уравнения (1) имеет при больших t асимптотическое представление вида

$$u(x, t) \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) e^{i\lambda t} w_\lambda(x),$$

где $\Lambda \subset \mathbb{C}$ — множество полюсов аналитического продолжения матрицы рассеяния, а $w_\lambda(x)$, $\lambda \in \Lambda$, — так называемые резонансные состояния, являющиеся решениями уравнения Шрёдингера

$$(-\Delta + V - \lambda^2)w = 0. \quad (2)$$

Если $\operatorname{Im} \lambda < 0$, то $w_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и, стало быть, λ^2 — собственное значение оператора $-\Delta + V$. В случае, когда потенциал $V(x)$ — вещественная финитная функция, все собственные значения — отрицательные и потому $\Lambda \cap \mathbb{C}_- \subset i\mathbb{R}_-$. Если же $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, то резонансное состояние $w_\lambda \notin L^2(\mathbb{R}^n)$ выделяется условием (см. [2])

$$w_\lambda(x) = \frac{e^{-i\lambda r}}{r^{(n-1)/2}} f(x, \lambda),$$

где $f(x, \lambda)$ в окрестности бесконечности представляется рядом по обратным степеням $r = |x|$ с коэффициентами, зависящими от $\theta = x/r$ и λ .

*Работа выполнена в рамках проекта, поддержанного грантом Минпромнауки России МД-251.2003.01.

В таком контексте возникает вопрос о локализации и асимптотическом распределении резонансных частот $\lambda \in \Lambda$. В общем случае (т.е. для потенциалов $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ общего положения) известны (см. [3]) лишь оценки сверху для соответствующей считающей функции; их вывод основан на трактовке резонансных частот как особенностей аналитического продолжения резольвенты соответствующего оператора Шрёдингера (см. об этом в §1). Более трудной является задача получения нижней оценки асимптотического распределения резонансов. Для этой цели эффективным средством оказывается рассмотрение множества $i\Lambda$ как спектра генератора полугруппы Лакса–Филлипса. Явное описание этого генератора (см. §2) в так называемом трансляционном представлении получено в теореме 1, которая дополняет и развивает отмеченную в [1] аналогию с уравнением переноса.

Далее, в §§3 и 4 настоящей работы показано, как можно использовать формулу регуляризованного следа (см., например, [3])

$$\mathrm{Tr}(U_V(t) - U_0(t)) = \sum_{\lambda \in \Lambda} e^{i\lambda t}, \quad t > 0,$$

для исследования структуры множества Λ . Эта формула получается с помощью теоремы Лидского [4] о совпадении матричного и спектрального следов и позволяет судить о возможной степени разреженности членов последовательности $\{\lambda_n\}$ по поведению суммы ряда Дирихле $\sum e^{i\lambda_n t}$ при $t \downarrow 0$ (теорема 2). Именно теоремы 1 и 2 (вместе со следствием о локализации резонансов) составляют основные результаты статьи.

Для простоты изложения будет рассматриваться случай, когда оператор Шрёдингера $-\Delta + V$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ не имеет собственных значений. Это предположение не является ограничительным с точки зрения вопроса об асимптотическом распределении точек $\lambda \in \Lambda$, поскольку их количество в нижней полуплоскости конечно, если $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Различным аспектам обсуждаемой здесь проблематики и смежным вопросам посвящены статьи и монографии [5–8]. Результаты недавних исследований в этой области отражены в [9] и [10]. Как стало известно автору из отзыва рецензента, анализ асимптотических свойств резонансов на основе связи с генератором полугруппы Лакса–Филлипса проводился в 60-е годы в группе Б. С. Павлова.

Обзор литературы по рассматриваемому предмету будет дан в статье автора, которая готовится к публикации.

§1. Особенности аналитического продолжения резольвенты оператора $-\Delta + V$

При сделанных выше предположениях для произвольных $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ и $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ существует единственное решение уравнения (2) со следующей асимптотикой по пространственной переменной:

$$e^{i\lambda x \cdot \omega} + \frac{e^{-i\lambda r}}{r^{(n-1)/2}} \left(a(\theta, \omega, \lambda) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right),$$

где $x \cdot \omega$ — скалярное произведение, $r = |x|$ и $\theta = x/r \in \mathbb{S}^{n-1}$. Коэффициент $a(\theta, \omega, \lambda)$ представляет собой предельную амплитуду рассеяния плоской волны, двигающейся в направлении ω и отраженной рассеивателем (потенциалом V)

в направлении θ . Известно, что амплитуда рассеяния $a(\theta, \omega, \lambda)$ гладко зависит от θ и ω , аналитична по λ в нижней полуплоскости и продолжается в верхнюю полуплоскость как мероморфная функция.

Матрицей рассеяния принято называть семейство интегральных операторов $S_V(\lambda)$ в пространстве $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ с ядрами

$$\delta(\theta - \omega) + \left(\frac{i\lambda}{2\pi}\right)^{(n-1)/2} a(-\theta, \omega, \lambda).$$

Описание множества резонансов как множества полюсов оператор-функции $S_V(\lambda)$ основано на исследовании аналитических свойств амплитуды рассеяния $a(\theta, \omega, \lambda)$ (см. [11]).

Другое описание множества Λ базируется на использовании резольвентного тождества

$$R_V(\lambda) = (-\Delta + V - \lambda^2)^{-1} = R_0(\lambda)(I + VR_0(\lambda))^{-1}.$$

Здесь $R_0(\lambda)$ — интегральный оператор, ядро которого есть функция Грина для уравнения Гельмгольца. Если шар $\Omega = \{|x| \leq d\}$ содержит носитель потенциала V , то отображения $VR_0(\lambda): L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ образуют аналитическое в $\mathbb{C}$ семейство компактных операторов и, согласно аналитической теореме Фредгольма, $(I + VR_0(\lambda))^{-1}$ продолжается в верхнюю полуплоскость как мероморфная оператор-функция, имеющая вычеты конечного ранга. В соответствии с этим принято говорить об аналитическом (мероморфном) продолжении резольвенты $R_V(\lambda)$, причем справедливо следующее (см. [2] и [3])

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Множество Λ состоит из тех значений параметра $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $I + VR_0(\lambda)$ необратим в $L^2(\Omega)$.*

Резонансу $\lambda \in \Lambda$ отвечает нетривиальное решение $w_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ уравнения (2), имеющее на бесконечности определенную асимптотику. При этом

$$w_\lambda(x) = \frac{e^{-i\lambda r}}{r^{(n-1)/2}} \left(h(\theta) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right), \quad r = |x| \rightarrow \infty,$$

и резонансное состояние $w_\lambda(x)$ связано с непрерывной функцией $h(\theta)$ формулой

$$w_\lambda(x) = \left(\frac{-i\lambda}{2\pi}\right)^{(n-1)/2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(\omega)(e^{i\lambda x \cdot \omega} + \phi(x, \omega, \lambda)) d\omega,$$

где $\phi(x, \omega, \lambda) = -R_V(-\lambda)V e^{i\lambda x \cdot \omega}$ — решение уравнения

$$(-\Delta + V(x) - \lambda^2)(e^{i\lambda x \cdot \omega} + \phi(x, \omega, \lambda)) = 0.$$

Приведенное выше описание множества Λ используется (см. [10]) при получении оценки сверху для считающей функции количества резонансов. Вывод указанной оценки основан на применении формулы Йенсена к определителю $\text{Det}(I - (VR_0(\lambda))^{(n+1)/2})$, являющемуся целой функцией, множество нулей которой содержит Λ .

ЗАМЕЧАНИЕ. С точки зрения функциональной модели Сёкефальви-Надя и Фояша матрица рассеяния $S_V(\lambda)$ представляет собой характеристическую функцию генератора полугруппы Лакса-Филлипса, а описанный выше подход к оценке (сверху) количества резонансов, по-существу, совпадает с известным

в этой теории приемом построения скалярного кратного характеристической функции (см., например, [8]) в виде подходящего детерминанта Фредгольма.

§2. Рассеяние в представлении Лакса–Филлипса

Как было отмечено во введении, с задачей Коши для волнового уравнения (1) стандартным образом связано семейство операторов $U_V(t)$, задающих эволюцию начальных данных и образующих однопараметрическую группу. Обозначим через $\mathcal{H}$ конечно-энергетическое пространство, являющееся пополнением множества гладких начальных данных $\{u_0(x), u_1(x)\}$ с компактными носителями по норме

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2) dx \right\}^{1/2}.$$

Оператор $\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - V & 0 \end{pmatrix}$, определенный в $\mathcal{H}$ в слабом смысле (см. [1]), служит генератором ограниченной группы $U_V(t)$ в $\mathcal{H}$; через $U_0(t)$ обозначается унитарная группа в $\mathcal{H}$, отвечающая случаю $V \equiv 0$.

Матрица рассеяния $S_V(\lambda)$, введенная выше (см. §1), возникает здесь при рассмотрении волновых операторов $\Sigma_{\pm} = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} U_V(-t)U_0(t)$ и соответствующего оператора рассеяния $\Sigma_+^{-1}\Sigma_-$, связывающего в терминах невозмущенной задачи асимптотики решений уравнения (1) при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$. А именно, оператор рассеяния действует как умножение на оператор-функцию $S_V(\lambda): L^2(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ в спектральном представлении группы $U_0(t)$.

С последним связано (посредством преобразования Фурье) так называемое трансляционное представление. Переход в него реализует изометрический изоморфизм $\mathcal{R}$ пространств $\mathcal{H}$ и $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1})$, переводящий $U_0(t)$ в группу сдвигов

$$W_0(t) = \mathcal{R}U_0(t)\mathcal{R}^{-1}: \varphi(s, \omega) \mapsto \varphi(s - t, \omega).$$

Переход в трансляционное представление для гладких u_0 и u_1 осуществляется по формуле (см. [1])

$$\mathcal{R} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (2\pi)^{(1-n)/2} (\partial_s^{(n+1)/2} (Ru_0)(s, \omega) - \partial_s^{(n-1)/2} (Ru_1)(s, \omega)),$$

где $\partial_s = \partial/\partial s$ и R — преобразование Радона,

$$Ru(s, \omega) = \int_{x \cdot \omega = s} u(x) d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \delta(s - x \cdot \omega) dx.$$

Следуя схеме Лакса и Филлипса, введем подпространства

$$\mathcal{D}_{\pm} = \{f \in \mathcal{H} : U_V(\pm t)f(x) = 0, |x| < t + d, t > 0\}$$

и обозначим через $\mathcal{P}_+$ ($\mathcal{P}_-$) ортопроекторы в $\mathcal{H}$ на $\mathcal{D}_+^{\perp}$ (соответственно на $\mathcal{D}_-^{\perp}$). Семейство операторов $\mathcal{P}_+ U_V(t) \mathcal{P}_-$ при $t \geq 0$ образует полугруппу, отображающую подпространство $(\mathcal{D}_+ \oplus \mathcal{D}_-)^{\perp}$ в себя. Отметим, что $\mathcal{R}D_+ = L^2((d, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1})$ и $\mathcal{R}D_- = L^2((-\infty, -d) \times \mathbb{S}^{n-1})$ и, стало быть, $\mathcal{R}((\mathcal{D}_+ \oplus \mathcal{D}_-)^{\perp}) = L^2((-d, d) \times \mathbb{S}^{n-1})$. Ограничение на это инвариантное подпространство операторов указанной полугруппы, записанных в трансляционном представлении, обозначим через $Z_V(t)$. Согласно [3], справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Генератор L_V полугруппы Лакса–Филлипса $Z_V(t)$ имеет дискретный спектр $\sigma(L_V) = i\Lambda$, причем кратности собственных значений оператора L_V совпадают с кратностями соответствующих полюсов оператор-функции $(I + VR_0(\lambda))^{-1}$.

Явное описание генератора полугруппы $Z_V(t)$ дает

ТЕОРЕМА 1. Действующий в пространстве $\mathcal{K} = L^2((-d, d) \times \mathbb{S}^{n-1})$ оператор L_V на своей области определения $D(L_V) = \{\varphi \in \mathcal{K} : \partial_s \varphi \in \mathcal{K}, \varphi(-d, \omega) = 0\}$ имеет вид $L_V = -\partial_s + A$, где A — ограниченный оператор на плотном в $\mathcal{K}$ множестве, определенный формулой

$$A\varphi(s, \omega) = \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{2(2\pi)^{n-1}} \partial_s^{(n-1)/2} \int_{x \cdot \omega = s} V(x) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\partial_s^{(n-3)/2} \varphi)(x \cdot \theta, \theta) d\theta d\mu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение $W_V(t) := \mathcal{R}U_V(t)\mathcal{R}^{-1}$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$Z_V(t) = \mathcal{P}_{\mathcal{K}} W_V(t)|_{\mathcal{K}}, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$ — ортопроектор на $\mathcal{K}$ в $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1})$. Наряду с $Z_V(t)$ рассмотрим полугруппу

$$Z_0(t) = \mathcal{P}_{\mathcal{K}} W_0(t)|_{\mathcal{K}}, \quad t \geq 0,$$

и ее генератор L_0 , резольвента которого в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$ действует на элемент $\varphi \in \mathcal{K}$ по формуле

$$(L_0 - \lambda I)^{-1} \varphi(s, \omega) = - \int_0^\infty e^{-\lambda t} Z_0(t) \varphi(s, \omega) dt = - \int_{-d}^s e^{\lambda(\tau-s)} \varphi(\tau, \omega) d\tau.$$

Отсюда непосредственно следует, что генератор полугруппы $Z_0(t)$ есть оператор $L_0 = -\partial_s$, определенный на функциях, обращающихся в нуль в точке $s = -d$.

Для векторов $\varphi \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1})$, таких, что $\partial_s \varphi \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1})$, существует предел

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{(W_V(t) - W_0(t))\varphi}{t} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V & 0 \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1} \varphi,$$

причем оператор $B = \mathcal{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V & 0 \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1}$ ограничен в $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1})$ и, стало быть, генератор полугруппы $Z_V(t)$ имеет вид

$$L_V = -\partial_s + A, \quad \text{где } A = \mathcal{P}_{\mathcal{K}} B|_{\mathcal{K}}.$$

Воспользуемся формулой обращения преобразования Радона

$$u(x) = \frac{1}{2} (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} ((i\partial_s)^{n-1} Ru)(x \cdot \omega, \omega) d\omega$$

для вычисления действия оператора B на плотном в $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1})$ множестве $\mathcal{R}(C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)) \subset C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1})$. Положим $\varphi = \mathcal{R} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$, где $u_0, u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. В силу свойства «четности» преобразования Радона, $Ru(s, \omega) = Ru(-s, -\omega)$, имеем

$$(\partial_s^{(n+1)/2} Ru_0)(s, \omega) = (2\pi)^{(n-1)/2} (\varphi(s, \omega) + (-1)^{(n+1)/2} \varphi(-s, -\omega)),$$

и, согласно формуле обращения,

$$u_0(x) = (-2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\partial_s^{(n-3)/2} \varphi)(x \cdot \theta, \theta) d\theta. \quad (4)$$

Таким образом,

$$B\varphi(s, \omega) = -\frac{1}{2} (2\pi)^{-(n-1)/2} \partial_s^{(n-1)/2} R(Vu_0)(s, \omega),$$

где $u_0(x)$ задается формулой (4). Как видно непосредственно из определения преобразования Радона, $Ru(s, \omega) = 0$ при $|s| > d$, если носитель функции $u(x)$ принадлежит шару $\Omega = \{|x| \leq d\}$. Поскольку $\text{supp } V \subset \Omega$, то $\text{Ran } B \subset \mathcal{K}$ и, стало быть, A есть сужение оператора B на подпространство $\mathcal{K} = L^2((-d, d) \times \mathbb{S}^{n-1})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Явный вид оператора L_V указывает на его сходство с генератором эволюционной полугруппы, возникающей в задаче о переносе частиц, описываемом линейаризованным уравнением Больцмана (см. [12]). Аналогия между интегральными уравнениями для экспоненциальных мод в случае волнового уравнения и в случае уравнения переноса отмечалась в [1].

§3. Конструкция параметрикса по Адамару и формула следа

Известно (см., например, [13]), что для произвольной функции $\rho(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ оператор $\int_{\mathbb{R}} (U_V(t) - U_0(t))\rho(t) dt: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ядерный. Функционал

$$\text{Tr} \int_{\mathbb{R}} (U_V(t) - U_0(t))\rho(t) dt$$

задает обобщенную функцию $\Psi_V(t) = \text{Tr}(U_V(t) - U_0(t))$, носитель сингулярной части которой сосредоточен в нуле. При этом справедлива следующая (см. [3])

ЛЕММА 1. *Имеет место разложение*

$$\Psi_V(t) = \sum_{j=1}^{(n-1)/2} c_j(V) \partial_t^{n-1-2j} \delta(t) + \Phi_V(t), \quad (5)$$

где $\Phi_V(t)$ — регулярная обобщенная функция, представимая своим рядом Тейлора

$$\Phi_V(t) = |t|^{-n} \sum_{(n+1)/2}^{\infty} c_j(V) t^{2j}; \quad (6)$$

коэффициенты $c_j(V)$ получаются в результате интегрирования определенных многочленов от потенциала $V(x)$ и его производных, которые вычисляются рекуррентно.

Представление (5)–(6) выводится из формулы

$$\text{Tr}_{\mathcal{K}}(U_V(t) - U_0(t)) = 2 \text{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^n)}(\cos(t\sqrt{-\Delta + V}) - \cos(t\sqrt{-\Delta}));$$

обобщенное ядро $K_V(t, x, y)$ оператора $\cos(t\sqrt{-\Delta + V})$ есть решение задачи

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta + V(x))K_V(t, x, y) &= 0, \\ K_V(0, x, y) &= \delta(x - y), \quad \partial_t K_V(0, x, y) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\int_{\mathbb{R}} (K_V(t, x, y) - K_0(t, x, y)) \rho(t) dt$ — непрерывное ядро, то

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(U_V(t) - U_0(t)) = 2 \int_{\mathbb{R}^n} (K_V(t, x, x) - K_0(t, x, x)) dx.$$

Конструкция параметрикса по Адамару (см., например, [14]) применительно к волновому оператору $\partial_t^2 - \Delta + V$ позволяет (ср. [15]) выписать разложение

$$K_V(t, x, x) = \sum_{j=0}^{(n-1)/2} \kappa_j(x) \partial_t^{n-1-2j} \delta(t) + \sum_{(n+1)/2}^{\infty} \kappa_j(x) |t|^{2j-n},$$

коэффициенты $\kappa_j(x)$ которого с точностью до постоянных множителей (зависящих от j) совпадают с $v_j(0, x)$, где

$$v_j(\xi, \eta) = \int_0^1 ((\Delta_{\xi} v_{j-1})(t\xi, \eta) - V(t\xi + \eta) v_{j-1}(t\xi, \eta)) dt, \quad v_0(\xi, \eta) \equiv 1.$$

Отсюда видно, что $\kappa_j(x)$ оказываются многочленами от потенциала $V(x)$ и его производных. В случае $n = 3$ имеем

$$\kappa_0(x) = -\frac{1}{2\pi}, \quad \kappa_1(x) = -\frac{1}{4\pi} V(x), \quad \kappa_2(x) = \frac{1}{16\pi} \left(-\frac{1}{6} \Delta V(x) + \frac{1}{2} V^2(x) \right),$$

и, таким образом, при $t \downarrow 0$

$$\Psi_V(t) = -\frac{\delta(t)}{2\pi} \int V dx + \frac{t}{16\pi} \int V^2 dx + O(t^3). \quad (7)$$

Получить для регуляризованного следа $\mathrm{Tr}(U_V(t) - U_0(t))$ «спектральное» представление в терминах резонансов (т.е. разложение по экспонентам с резонансными частотами) позволяет

ЛЕММА 2. Для $\rho(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ справедливо равенство

$$\mathrm{Tr} \int_{\mathbb{R}_+} (U_V(t) - U_0(t)) \rho(t) dt = \mathrm{Tr} \int_{\mathbb{R}_+} (Z_V(t) - Z_0(t)) \rho(t) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО подобного утверждения в случае рассеяния на препятствии дано в [13]. Применительно к случаю потенциального рассеяния заметим, прежде всего, что группа $U_V(t)$ унитарна относительно скалярного произведения, порожденного формой

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2 + V(x)|u_0|^2) dx.$$

Вследствие этого и ввиду включений $U_V(t)\mathcal{D}_- \subset \mathcal{D}_-$ при $t < 0$ и $\mathrm{supp} V \subset \{|x| \leq d\}$ для произвольных $f \in \mathcal{D}_-$ и $h \in \mathcal{H}$ имеем

$$(f, U_V(t)h)_{\mathcal{H}} = (U_V(-t)f, h)_{\mathcal{H}}, \quad t > 0.$$

Как известно, $U_V(t) = U_0(t)$ на подпространствах $\mathcal{D}_+$ и $\mathcal{D}_-$ для положительных и отрицательных t соответственно. Таким образом, $\mathcal{D}_+ \subset \mathrm{Ker}(U_V(t) - U_0(t))$, $t > 0$, и для произвольных $f \in \mathcal{D}_-$ и $h \in \mathcal{H}$

$$(f, (U_V(t) - U_0(t))h)_{\mathcal{H}} = ((U_V(-t) - U_0(-t))f, h)_{\mathcal{H}} = 0, \quad t > 0,$$

т. е. $\text{Ran}(U_V(t) - U_0(t)) \subset \mathcal{D}_\perp^\perp$. Поэтому при $t > 0$

$$U_V(t) - U_0(t) = \mathcal{P}_-(U_V(t) - U_0(t))\mathcal{P}_+,$$

где $\mathcal{P}_\pm$ — ортопроекторы в $\mathcal{H}$ на $\mathcal{D}_\pm^\perp$ (см. §2). Далее, учитывая равенство $\mathcal{P}_K = \mathcal{R}\mathcal{P}_+\mathcal{P}_-\mathcal{R}^{-1}$, согласно (3), получаем

$$\begin{aligned} \text{Tr} \int_0^\infty (U_V(t) - U_0(t))\rho(t) dt &= \text{Tr} \int_0^\infty \mathcal{P}_-(U_V(t) - U_0(t))\mathcal{P}_+\rho(t) dt \\ &= \text{Tr} \int_0^\infty \mathcal{P}_+(U_V(t) - U_0(t))\mathcal{P}_-\rho(t) dt = \text{Tr} \int_0^\infty (Z_V(t) - Z_0(t))\rho(t) dt. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Если $\text{supp } \rho(t) \subset (2d, \infty)$, то $Z_0(t)\rho(t) = 0$ и

$$\text{Tr} \int_{\mathbb{R}_+} (U_V(t) - U_0(t))\rho(t) dt = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \int_{\mathbb{R}_+} e^{i\lambda_k t} \rho(t) dt.$$

В работе [16] для произвольного фиксированного $\tau > 0$ в пространстве $\mathcal{H} = L^2((-d, d) \times \mathbb{S}^{n-1})$ построен ортонормированный базис $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$, такой, что $\int_{\mathbb{R}_+} (Z_0(t)\psi_j, \psi_j)\rho(t) dt = 0$ для всех функций $\rho \in C_0^\infty((\tau, \infty))$. В этой ситуации теорема Лидского о совпадении матричного и спектрального следов влечет за собой равенство

$$\sum_{j=1}^\infty \int_{\mathbb{R}_+} (Z_V(t)\psi_j, \psi_j)\rho(t) dt = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \int_{\mathbb{R}_+} e^{i\lambda_k t} \rho(t) dt,$$

и ввиду леммы 2 справедливо следующее (см., например, [3])

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Регулярная часть обобщенной функции $\Psi_V(t) = \text{Tr}(U_V(t) - U_0(t))$ представима рядом Дирихле

$$\Phi_V(t) = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} e^{i\lambda_k t}, \quad t > 0, \quad (8)$$

где λ_k упорядочены по неубыванию абсолютных величин.

§4. Распределение и локализация резонансов

Сопоставление формул (6) и (8) дает возможность делать заключения о структуре множества Λ . Так, например, из этого сопоставления следует (см. [3] и [17]), что если $c_j(V) \neq 0$ для некоторого $j \geq (n+1)/2$, то множество Λ бесконечно и, вследствие утверждения 1, неограничено. Ниже будет показано, как можно на этом пути получить новую существенную информацию о расположении резонансов. Для простоты изложения рассматривается случай $n = 3$.

ТЕОРЕМА 2. Если $V(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ и $V(x) \not\equiv 0$, то

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} |\lambda_k|^{-1/4} = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\Lambda \subset \{\text{Im } \lambda > 0\}$ и $|\lambda_k| \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, то для произвольного $N \in \mathbb{N}$ существует число $M \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\text{Re} \left(\frac{e^{i\lambda_k t}}{i\lambda_k} \right) < 0, \quad k = N+1, \dots, N^2, \quad t \in \left[0, \frac{1}{|\lambda_M|} \right]. \quad (9)$$

Фиксируем последовательность пробных функций $\rho_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\rho_N(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \notin \left(\frac{1}{2|\lambda_M|}, \frac{2}{3|\lambda_N|}\right), \\ 1 & \text{при } t \in \left[\frac{1}{|\lambda_M|}, \frac{1,99}{3|\lambda_N|}\right], \end{cases}$$

$\rho'_N(t) > 0$ при $t \in \left(\frac{1}{2|\lambda_M|}, \frac{1}{|\lambda_M|}\right)$ и $\rho'_N(t) < 0$ при $t \in \left(\frac{1,99}{3|\lambda_N|}, \frac{2}{3|\lambda_N|}\right)$; число $M = M(N)$ выбрано так, что $\frac{1}{|\lambda_M|} < \frac{0,01}{3|\lambda_N|}$ и выполнено (9). Ввиду представления (8) обобщенная функция $\Psi_V(t) = \text{Tr}(U_V(t) - U_0(t))$ действует на пробную функцию ρ_N по формуле

$$\langle \Psi_V, \rho_N \rangle = \sum_{k \leq N} \langle e^{i\lambda_k t}, \rho_N \rangle + \sum_{k > N} \langle e^{i\lambda_k t}, \rho_N \rangle. \quad (10)$$

Согласно (7), имеем

$$\langle \Psi_V, \rho_N \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{t}{16\pi} \int V^2 dx + r(t) \right) \rho_N(t) dt,$$

где $r(t) = o(t)$ при $t \downarrow 0$, откуда непосредственно видно, что

$$\langle \Psi_V, \rho_N \rangle = O(|\lambda_N|^{-2}), \quad N \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Оценим снизу вещественные части каждой из сумм в правой части равенства (10). Имеем

$$\sum_{k \leq N} \langle e^{i\lambda_k t}, \rho_N \rangle = N \int_{\mathbb{R}} \rho_N(t) dt + i \sum_{k \leq N} \lambda_k \int_{\mathbb{R}} t \rho_N(t) dt + \sum_{k \leq N} \langle \alpha_k, \rho_N \rangle,$$

где $\alpha_k(t) = e^{i\lambda_k t} - (1 + i\lambda_k t)$ и

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \rho_N(t) dt &\geq \frac{1,98}{3|\lambda_N|}, & \int_{\mathbb{R}} t \rho_N(t) dt &\leq \frac{2}{9|\lambda_N|^2}, \\ |\langle \alpha_k, \rho_N \rangle| &\leq \frac{9}{14} |\lambda_k|^2 \int_{\mathbb{R}} t^2 \rho_N(t) dt &\leq \frac{4}{63} \frac{|\lambda_k|^2}{|\lambda_N|^3}. \end{aligned}$$

Таким образом, получается неравенство

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(\sum_{k \leq N} \langle e^{i\lambda_k t}, \rho_N \rangle \right) &\geq N \int_{\mathbb{R}} \rho_N(t) dt - \int_{\mathbb{R}} t \rho_N(t) dt \sum_{k \leq N} |\lambda_k| - \sum_{k \leq N} |\langle \alpha_k, \rho_N \rangle| \\ &\geq 0,36 \frac{N}{|\lambda_N|}. \end{aligned} \quad (12)$$

Вторую сумму в правой части (10) разобьем на два слагаемых:

$$\sum_{k > N} \langle e^{i\lambda_k t}, \rho_N \rangle = \sum_{N+1}^{N^2} \langle e^{i\lambda_k t}, \rho_N \rangle + \sum_{k > N^2} \langle e^{i\lambda_k t}, \rho_N \rangle.$$

Поскольку $\rho'_N(t) > 0$ при $t \in (\frac{1}{2|\lambda_M|}, \frac{1}{|\lambda_M|})$, то в силу выбора M справедливы неравенства

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i\lambda_k} \int_{1/2|\lambda_M|}^{1/|\lambda_M|} e^{i\lambda_k t} \rho'_N(t) dt \right\} < 0, \quad k = N+1, \dots, N^2.$$

Замечая, что $|\int_{1,99/3|\lambda_N|}^{2/3|\lambda_N|} e^{i\lambda_k t} \rho'_N(t) dt| \leq 1$, получаем

$$\operatorname{Re} \sum_{N+1}^{N^2} \langle e^{i\lambda_k t}, \rho_N \rangle = -\operatorname{Re} \sum_{N+1}^{N^2} \frac{1}{i\lambda_k} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_k t} \rho'_N(t) dt \geq -\sum_{N+1}^{N^2} \frac{1}{|\lambda_k|}.$$

Далее, как нетрудно видеть, имеет место оценка

$$\left| \sum_{k>N^2} \langle e^{i\lambda_k t}, \rho_N \rangle \right| = \left| \sum_{k>N^2} \frac{1}{i\lambda_k} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda_k t} \rho'_N(t) dt \right| \leq 2 \sum_{k>N^2} \frac{1}{|\lambda_k|},$$

и, стало быть,

$$\operatorname{Re} \sum_{k>N} \langle e^{i\lambda_k t}, \rho_N \rangle \geq -\left(\sum_{k>N} \frac{1}{|\lambda_k|} + \sum_{k>N^2} \frac{1}{|\lambda_k|} \right). \quad (13)$$

Допустим теперь, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{-1/4}$ сходится и, как следствие этого, $|\lambda_N|^{-1/4} = o(1/N)$, $N \rightarrow \infty$. В этом случае неравенство

$$\sum_{k>N} \frac{1}{|\lambda_k|} + \sum_{k>N^2} \frac{1}{|\lambda_k|} \leq 0,35 \frac{N}{|\lambda_N|} \quad (14)$$

выполнено для некоторой бесконечной последовательности $\{N_s\}$ значений N . В противном случае для достаточно больших N имеем

$$\frac{1}{|\lambda_N|} < \frac{1}{N^4}, \quad \sum_{k>N} \frac{1}{|\lambda_k|} + \sum_{k>N^2} \frac{1}{|\lambda_k|} > \frac{7}{20} \frac{N}{|\lambda_N|}.$$

При этом справедлива оценка

$$\sum_{k>N} \frac{1}{|\lambda_k|} + \sum_{k>N^2} \frac{1}{|\lambda_k|} < \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^4} + \int_{N^2}^{\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{N^3} + \frac{1}{N^6} \right)$$

и, следовательно, $|\lambda_N|^{-1} < \frac{20}{21} \left(1 + \frac{1}{N^3}\right) \frac{1}{N^4}$. Индуктивно повторяя проведенное рассуждение, получаем неравенство

$$|\lambda_N|^{-1} < \left(\frac{20}{21} \right)^m \left(1 + \frac{1}{N^3} \right)^m \frac{1}{N^4}$$

с произвольным $m \in \mathbb{N}$. Это противоречит бесконечности множества $\Lambda = \{\lambda_k\}$ и, тем самым, доказывает существование искомой последовательности $\{N_s\}$.

Объединяя (12), (13) и (14), приходим к заключению, что в предположении сходимости ряда $\sum |\lambda_k|^{-1/4}$ имеет место неравенство

$$\operatorname{Re} \langle \Psi_V, \rho_N \rangle \geq \frac{1}{100} \frac{N}{|\lambda_N|}, \quad N \in \{N_s\}.$$

Ввиду неограниченности множества Λ это, очевидно, несовместимо с оценкой (11), и, таким образом, ряд $\sum |\lambda_k|^{-1/4}$ расходится.

В ходе доказательства теоремы 2 было установлено, что $|\lambda_N|^{-1/4}$ не является величиной порядка $o(1/N)$ при $N \rightarrow \infty$. Сопоставление этого факта с оценкой сверху для считающей функции количества резонансов позволяет обнаружить, что вне некоторой параболической окрестности мнимой оси находится бесконечно много резонансов.

СЛЕДСТВИЕ. Точки множества Λ , за исключением их конечного числа, не могут принадлежать области $\{|\operatorname{Re} \lambda| < (\operatorname{Im} \lambda)^\gamma\}$, $\gamma < 1/12$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорему 2 можно рассматривать как утверждение тауберова типа, позволяющее судить о расположении точек последовательности $\{\lambda_k\}$ по поведению суммы $\sum e^{i\lambda_k t}$ при $t \rightarrow 0$. Это может представлять интерес с точки зрения теории рядов Дирихле.

Автор благодарен рецензентам за конструктивные замечания к первоначальному варианту статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. Мир, М., 1972.
2. Вайнберг Б. Р. О собственных функциях оператора, отвечающих полюсам аналитического продолжения резольвенты через непрерывный спектр. Матем. сб., **87**, №2, 293–308 (1972).
3. Melrose R. Geometric scattering theory. Cambridge University Press, 1995.
4. Лидский В. Б. Несамосопряженные операторы, имеющие след. ДАН СССР, **125**, №3, 485–488 (1959).
5. Арсеньев А. А. Сингулярные потенциалы и резонансы. Изд-во МГУ, М., 1974.
6. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. Наука, М., 1971.
7. Буслаев В. С. Формулы следов для оператора Шрёдингера в трехмерном пространстве. ДАН СССР, **143**, №5, 1067–1070 (1962).
8. Павлов Б. С. Спектральный анализ диссипативного оператора Шрёдингера в терминах функциональной модели. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 65, ВИНТИ, М., 1991, с. 95–163.
9. Sjöstrand J. A trace formula and review of some estimates for resonances. In: Microlocal analysis and spectral theory, Math. Phys. Sci., Vol. 490, Kluwer Acad. Publ., 1997, pp. 377–437.
10. Zworski M. Quantum resonances and partial differential equations, Proc. ICM 2002, Vol. 3, pp. 243–252.
11. де Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние. Мир, М., 1966.
12. Степин С. А. Волновые операторы для линеаризованного уравнения Больцмана в односкоростной теории переноса. Матем. сб., **192**, №1, 139–160 (2001).
13. Bardos C., Guillot J. C., Ralston J. La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borne. Application a la theorie de la diffusion. Comm. Partial Differential Equations, **7**, No. 8, 905–958 (1982).
14. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3, Мир, М., 1987.
15. Бабич В. М. Метод Адамара и асимптотика спектральной функции дифференциального оператора второго порядка. Матем. заметки, **28**, вып. 5, 689–694 (1980).
16. Melrose R. Scattering theory and the trace of the wave group. J. Funct. Anal., **45**, 29–40 (1982).
17. Sá Barreto A., Zworski M. Existence of resonances in potential scattering. Comm. Pure Appl. Math., **49**, 1271–1280 (1996).