Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Стукопин, О дубле янгиана супералгебры
Ли типа $A(m, n)$, *Функц. анализ и его прил.*, 2006,
том 40, выпуск 2, 86–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa12>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru
подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-
шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 12:23:56

О дубле янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$

© 2006. В. А. Стукопин

1. В последнее время, наряду с янгианами простых и редутивных алгебр Ли (см. [1–6]), стали изучаться янгианы супералгебр Ли классического типа [10, 11, 8, 9]. В работе [8] был определен янгиан супералгебры Ли типа $A(m, n)$ как квантованная бисупералгебра Ли полиномиальных токов со структурой коалгебры, определяемой g -матрицей Янга. Было получено описание янгиана в терминах образующих и соотношений, являющихся аналогом «новой системы образующих» из [3], сформулированы теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта и теорема о существовании универсальной R -матрицы. Данная работа — продолжение работы [8], и конечным ее результатом является явная формула для универсальной R -матрицы янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$. Если посмотреть на классические аналоги упомянутых выше понятий, то классическим аналогом янгиана будет супералгебра Ли токов $A(m, n)[u]$, а классическим аналогом универсальной R -матрицы — классическая g -матрица. Поэтому естественно считать, что и в квантовом случае $R(\lambda) = (\text{id} \otimes T_\lambda)R$, где R — универсальная R -матрица дубля янгиана. Мы, следуя этой схеме, вводим квантовый дубль $DY(A(m, n))$ янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$, описывая его в терминах образующих и соотношений. Здесь мы следуем работе [13], в которой введен дубль янгиана простой алгебры Ли. Далее мы вычисляем формулы спаривания в квантовом дубле $DY(A(m, n))$ и на их основе получаем формулу для универсальной R -матрицы дубля янгиана, используя которую, как отмечено выше, получаем формулу для универсальной R -матрицы янгиана.

Хотелось бы отметить различие между понятиями универсальных R -матриц янгиана и его квантового дубля. Исторически сначала появилось понятие янгиана и было доказано существование универсальной R -матрицы янгиана (см. [1, 2, 4]). Но задача явного вычисления универсальной R -матрицы янгиана долгое время не поддавалась решению. В середине 90-х годов стало понятно (см. [13]), что более правильной постановкой вопроса является задача вычисления универсальной R -матрицы квантового дубля янгиана (см. [4]), которая является, в отличие от универсальной R -матрицы янгиана, естественно определенным

объектом, и было дано явное описание квантового дубля янгиана простых алгебр Ли. И с тех пор к задаче вычисления универсальной R-матрицы янгиана никто не возвращался. В данной работе мы показываем, что универсальная R-матрица янгиана получается действием некоторого оператора сдвига на универсальную R-матрицу квантового дубля, и явно ее вычисляем, предварительно вычислив универсальную R-матрицу квантового дубля. Следует отметить также, что схема вычисления универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана во многом аналогична схеме вычисления универсальной R-матрицы квантованной универсальной обертывающей аффинной алгебры Ли (см., например, [14]).

2. Мы будем использовать основные обозначения из [8]. Пусть $G = A(m, n)$ и $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m+n+1}$ — матрица Картана супералгебры Ли G . Ее ненулевые элементы имеют следующий вид (см. [15]):

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= 2, & a_{i,i+1} &= a_{i+1,i} = -1, & i &< m+1, \\ a_{i-1,i} &= a_{i,i-1} = 1, & a_{i,i} &= -2, & m+1 < i, & i \in I = \{1, \dots, m+n+1\}. \end{aligned}$$

Через $p(x)$ обозначим четность элемента x , т.е. $p(x) = 0$, если $x \in G_0$ (элемент x четный) и $p(x) = 1$, если $x \in G_1$ (элемент x нечетный) [12]. Мы будем использовать определение квантового дубля [1], которое на случай супералгебр Хопфа переносится практически без изменений.

Пусть $C(G)$ (см. [4, 13]) — супералгебра, порожденная образующими $h_{i,k}$, $x_{i,k}^\pm$, $i \in I$, $k \in \mathbb{Z}$, которые удовлетворяют соотношениям из определения 2 работы [8]. Отметим, что этими же соотношениями определяется и янгиан $Y(G)$, только второй индекс пробегает не целые, а целые неотрицательные значения. Если определить степень элементов из $C(G)$ формулой $\deg(h_{i,k}) = \deg(x_{i,k}^\pm) = k$, то на $C(G)$ возникает фильтрация

$$\dots \subset C_{-n} \subset \dots \subset C_{-1} \subset C_0 \subset \dots \subset C_m \subset \dots \subset C(G), \quad (1)$$

где $C_k = \{x \in C(G) : \deg(x) \leq k\}$.

Пусть $\bar{C}(G)$ — формальное пополнение супералгебры $C(G)$ относительно этой фильтрации. Образующие $x_{i,k}^\pm$, $h_{i,k}$, $i \in I$, $k \in \mathbb{Z}_+$, порождают подсупералгебру Хопфа $Y^+(G)$ в $\bar{C}(G)$, изоморфную $Y(G)$. Пусть $Y^-(G)$ — замкнутая подсупералгебра в $\bar{C}(G)$, порожденная образующими $x_{i,k}^\pm$, $h_{i,k}$, $i \in I$, $k < 0$.

Пусть $Y^0(G)$ — двойственная к $Y(G)$ супералгебра Хопфа с противоположным умножением.

ТЕОРЕМА 1. *Супералгебра Хопфа $Y^0(G)$ изоморфна $Y^-(G)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. а) Следует отметить, что коумножение в $Y^-(G)$ однозначно определяется коумножением в $Y(G)$, коммутационными соотношениями в $\bar{C}(G)$ и тем фактом, что коумножение Δ — гомоморфизм супералгебр.

б) Пусть $e_i^+(u) = \sum_{k \geq 0} x_{i,k}^+ u^{-k-1}$, $f_i^+(u) = \sum_{k \geq 0} x_{i,k}^- u^{-k-1}$, $h_i^+(u) = 1 + \sum_{k \geq 0} h_{i,k} u^{-k-1}$, $e_i^-(u) = \sum_{k < 0} x_{i,k}^+ u^{-k-1}$, $f_i^-(u) = \sum_{k < 0} x_{i,k}^- u^{-k-1}$, $h_i^-(u) = 1 - \sum_{k < 0} h_{i,k} u^{-k-1}$ — производящие функции образующих. В терминах этих производящих функций коумножение в $Y^-(G)$ описывается теми же формулами, которые описывают коумножение в $Y(G)$ с заменой производящих функций с индексом $+$ на производящие функции с индексом $-$. В терминах же образующих эти формулы существенно различны.

Введем удобный для дальнейших целей базис ПБВ (Пуанкаре–Биркгофа–Витта) в $DY(G)$. Это так называемый выпуклый базис (см. [13, 14]).

Пусть Δ_{rt} и Δ_+ — множество корней и множество положительных корней супералгебры Ли $A(m, n)$ соответственно. Рассмотрим также множество $\hat{\Delta}^{\text{re}}$ вещественных корней соответствующей аффинной (нескрученной) супералгебры Ли $A(m, n)^{(1)}$ (см. [15]). Для образующих $x_{i,k}^{\pm}$ дубля $DY(G)$ будем использовать следующие обозначения:

$$x_{\alpha_i+k\delta} := x_{i,k}^+, \quad x_{-\alpha_i+k\delta} := x_{i,k}^-, \quad i \in I, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_i \in \Delta_+.$$

В этом случае $\pm\alpha_i + k\delta \in \hat{\Delta}^{\text{re}}$. Пусть $\Xi \subset \hat{\Delta}^{\text{re}}$. Линейный порядок $\preceq$ на Ξ называется выпуклым (нормальным), если для любых корней $\alpha, \beta, \gamma \in \Xi$, таких, что $\gamma = \alpha + \beta$, имеет место одно из следующих двух отношений:

$$\alpha \preceq \gamma \preceq \beta \quad \text{или} \quad \beta \preceq \gamma \preceq \alpha.$$

Положим $\Xi_{\pm} := \{\pm\gamma + k\delta : \gamma \in \hat{\Delta}_+^{\text{re}}\}$. Введем на Ξ_+ , Ξ_- выпуклые порядки $\preceq_+$, $\preceq_-$, удовлетворяющие условиям

$$\gamma + k\delta \preceq_+ \gamma + l\delta \quad \text{и} \quad -\gamma + l\delta \preceq_- -\gamma + k\delta, \quad \text{если } k < l, \quad \text{для любых } \gamma \in \Delta_+.$$

Определим теперь корневые векторы $x_{\pm\beta}$, $\beta \in \Xi_+ \cup \Xi_-$, по индукции следующим образом. Пусть векторы x_{β_1} , x_{β_2} уже построены. Если корень β_3 таков, что $\beta_1 \preceq \beta_3 \preceq \beta_2$ и в интервале (β_1, β_2) нет корней, для которых уже построены корневые векторы, то определим корневые векторы $x_{\pm\beta_3}$ формулами $x_{\beta_3} = [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}]$, $x_{-\beta_3} = [x_{-\beta_2}, x_{-\beta_1}]$.

Вычислим формулы спаривания для образующих дубля янгиана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) Для $k \geq l \geq 0$

$$\begin{aligned} \langle x_{i,k}^+, x_{j,-l-1}^- \rangle &= -\delta_{i,j} \delta_{k,l}, & \langle x_{i,k}^-, x_{j,-l-1}^+ \rangle &= -\delta_{i,j} \delta_{k,l}, \\ \langle h_{i,k}, h_{j,-l-1} \rangle &= -\left(\frac{a_{ij}}{2}\right)^{|k-l|} \frac{a_{ij}k!}{l!(k-l)!}. \end{aligned}$$

Остальные скалярные произведения между образующими равны 0.

2) В терминах производящих функций эти же формулы переписываются в следующей форме:

$$\langle e_i^+(u), f_j^-(v) \rangle = \langle f_i^+(u), e_j^-(v) \rangle = \frac{\delta_{i,j}}{u-v}, \quad \langle h_i^+(u), h_j^-(v) \rangle = \frac{u-v + \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)}{u-v - \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)}.$$

3. Универсальной R-матрицей для квазитреугольной супералгебры Хопфа A называется обратимый элемент R , лежащий в некотором расширении тензорного произведения $A \otimes A$ и удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{aligned} \Delta^{\text{op}}(x) &= R\Delta(x)R^{-1} \quad \text{для любого } x \in A, \\ (\Delta \otimes \text{id})R &= R^{13}R^{23}, \quad (\text{id} \otimes \Delta)R = R^{13}R^{12}, \end{aligned}$$

где $\Delta^{\text{op}} = \sigma \circ \Delta$, $\sigma(x \otimes y) = (-1)^{p(x)p(y)} y \otimes x$.

Если A является квантовым дублем супералгебры Хопфа A^+ , т. е. $A \cong A^+ \otimes A^-$, $A^- := A^0$ — двойственная к A супералгебра Хопфа с противоположным коумножением, то A — квазитреугольная супералгебра Хопфа и универсальная

R-матрица для A допускает следующее каноническое представление:

$$R = \sum e_i \otimes e^i,$$

где $\{e_i\}$, $\{e^i\}$ — двойственные базисы в A^+ , A^- соответственно.

Пусть $Y_+^\pm$, $Y_0^\pm$, $Y_-^\pm$ — подсупералгебры в $DY(G)$, порожденные компонентами производящих функций $e_i^\pm(u)$, $h_i^\pm(u)$, $f_i^\pm(u)$, $i \in I$, соответственно. Введем «логарифмические» образующие $\phi_i^\pm(u)$, $i = 1, \dots, r$, формулами

$$\phi_i^+(u) := \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{i,k} u^{-k-1} = \ln h_i^+(u), \quad \phi_i^-(u) := \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{i,-k-1} u^k = \ln h_i^-(u). \quad (2)$$

Введем также вектор-функции $\phi^\pm(u)$ с компонентами $\phi_i^\pm(u)$, $1 \leq i \leq r$. Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^r$ — симметризованная матрица Картана супералгебры Ли G , т.е. $a_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$. Пусть, кроме того, $A(q) = (a_{ij}(q))_{i,j=1}^r$ есть q -аналог матрицы Картана, где $a_{ij}(q) = [a_{ij}]_q = [(\alpha_i, \alpha_j)]_q = (q^{a_{ij}} - q^{-a_{ij}})/(q - q^{-1})$. Пусть $D(q)$ — матрица, обратная к матрице $A(q)$. Представим матрицу $D(q)$ в виде $D(q) = \frac{1}{[l(G)]_q} C(q)$, где $C(q)$ — матрица с коэффициентами, являющимися полиномами от q , q^{-1} с целыми коэффициентами, т.е. $c_{ij} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, а $l(G) = m - n$ (для $G = A(m, n)$).

Пусть $T: f(v) \rightarrow f(v-1)$ — оператор сдвига, а константы $a(\beta)$ определяются из условия $[x_\beta, x_{-\beta}] = h_\alpha/a(\beta)$, $\beta = \alpha \pm n\delta$, $\alpha \in \Delta_+$.

ТЕОРЕМА 2. *Универсальная R-матрица дубля $DY(G)$ может быть представлена в факторизованной форме $R = R_+ R_0 R_-$, где*

$$\begin{aligned} R_+ &= \prod_{\beta \in \Xi_+}^{\rightarrow} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) x_\beta \otimes x_{-\beta}), & R_+ &\in Y_+^+ \otimes Y_-^-, \\ R_- &= \prod_{\beta \in \Xi_-}^{\leftarrow} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) x_\beta \otimes x_{-\beta}), & R_- &\in Y_-^+ \otimes Y_+^-, \\ R_0 &= \prod_{n \geq 0} \exp \left(\sum_{i,j=1}^r \sum_{k \geq 0} ((\phi_i^+(u))'_k \otimes c_{ji}(T^{-1/2})(\phi_j^-(v + (n+1/2)l(G)))_{-k-1}) \right), \\ & & R_0 &\in Y_0^+ \otimes Y_0^-. \end{aligned}$$

4. Теперь мы можем вычислить универсальную R-матрицу янгиана (см. [1]), применив к универсальной R-матрице дубля янгиана аналог оператора сдвига. Определим этот оператор $T_\lambda: Y(G) \rightarrow Y(G)$ формулами $T_\lambda(x) = x$ для $x \in G$ и $T_\lambda(b_{i,1}) = b_{i,1} + \lambda b_{i,0}$ для $b_{i,k} \in \{x_{i,k}^+, x_{i,k}^-, h_{i,k}\}$, $k = 0, 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Действие гомоморфизмов T_λ единственным образом продолжается до гомоморфизма $DY(G) \rightarrow Y(G)[[\lambda, \lambda^{-1}]]$ и определяется на образующих $b_{i,n}$, $b_{i,n} \in \{x_{i,n}^+, x_{i,n}^-, h_{i,n}\}$, $n \in \mathbb{Z}$, дубля янгиана $DY(G)$ формулами*

$$\begin{aligned} T_\lambda b_{i,n} &= \sum_{k=0}^n C_n^k b_{i,k} \lambda^{n-k}, & n &\in \mathbb{Z}_+, \\ T_\lambda b_{i,-n} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} b_{i,k} \lambda^{-n-k}, & n &\in \mathbb{N}, \\ T_\lambda(h_i^-(u)) &= h_i^+(u + \lambda). \end{aligned}$$

Пусть $R(\lambda)$ — универсальная R-матрица янгиана в смысле п. 12 работы [1].

ТЕОРЕМА 3. *Формула для универсальной R-матрицы янгиана имеет следующий вид:*

$$R(\lambda) = R_+(\lambda)R_0(\lambda)R_-(\lambda),$$

где

$$R_+(\lambda) = \prod_{\beta \in \Xi_+}^{\rightarrow} \exp \left(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} (x_\beta \otimes x_{-\beta+(n+k)\delta}) \lambda^{-n-k-1} \right),$$

$$R_-(\lambda) = \prod_{\beta \in \Xi_-}^{\leftarrow} \exp \left(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} (x_\beta \otimes x_{-\beta+(n+k)\delta}) \lambda^{-n-k-1} \right),$$

$$R_0(\lambda) = \prod_{n \geq 0} \exp \left(\sum_{i,j \in I} \sum_{k \geq 0} ((\phi_i^+(u))'_k \otimes c_{ji}(T^{-1/2})(\phi_j^+(v + (n+1/2)l(G) + \lambda))_k) \right),$$

где $\text{ord}(\beta) = n$, $\beta = \beta' + n\delta$, $\beta' \in \Delta_+(A(m, n))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Drinfeld V.* In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berkeley, 1986), Vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 789–820.
2. *Дринфельд В. Г.* Докл. АН СССР, **283**, №5, 1060–1064 (1985).
3. *Дринфельд В. Г.* Докл. АН СССР, **36**, 212–216 (1988).
4. *Дринфельд В. Г.* Препринт ФТИНТ, 1986, с. 30–86.
5. *Chari V., Pressley A.* A Guide to Quantum Groups. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
6. *Chari V., Pressley A.* Enseign. Math., **36**, 267–302 (1990).
7. *Chari V., Pressley A.* J. Reine Angew. Math., **417**, 87–128 (1991).
8. *Стукопин В. А.* Функц. анализ и его прил., **28**, вып. 3, 217–219 (1994).
9. *Stukopin V.* In: Asymptotic Combinatorics with Application to Mathematical Physics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002, pp. 255–265.
10. *Nazarov M.* Lett. Math. Phys., **21**, 123–131 (1991).
11. *Nazarov M.* Commun. Math. Phys., **208**, 195–223 (1999).
12. *Kac V.* Commun. Math. Phys., **53**, 31–64 (1977).
13. *Khoroshkin S. M., Tolstoy V. N.* Lett. Math. Phys., **36**, 373–402 (1996).
14. *Levendorskii S., Soibelman Ya., Stukopin V.* Lett. Math. Phys., **27**, 1–11 (1993).
15. *Frappat L., Sorba P.* Dictionary on Lie Superalgebras, hep-th/9607161, 1996.