Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Суслина, Об усреднении периодической системы Максвелла, *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 3, 90–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 12:56:35

Об усреднении периодической системы Максвелла*

© 2004. Т. А. Суслина

*Посвящается Виктору Борисовичу Лидскому
в связи с его юбилеем*

1. Рассматривается задача об усреднении стационарной периодической системы Максвелла в пределе малого периода. Этой задаче посвящена обширная литература. В частности, она обсуждается в книгах [1–3]. Однако известные на этот счет результаты дают лишь слабую сходимость решений.

В предлагаемой заметке используется абстрактный подход, развитый в [4, 5]. Вместе с тем оператор Максвелла допускает включение в рассмотренный в [4, 5] класс дифференциальных операторов лишь в случае, когда одна из двух периодических проницаемостей ε , μ постоянна. Здесь мы рассматриваем общий случай, что требует существенного изменения техники. Сравнение со случаем $\mu = \text{const}$ см. в разд. 5.

Каждое из полей мы представляем в виде суммы двух слагаемых. При этом для некоторых слагаемых удастся получить равномерную аппроксимацию в $L_2(\mathbb{R}^3)$ -норме с явно контролируемой оценкой. Для других слагаемых по-прежнему получается лишь слабая сходимость полей к соответствующим полям в гомогенизированной среде.

2. Постановка задачи. Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^3$, а Ω — элементарная ячейка этой решетки. Пусть диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\mathbf{x})$ и магнитная проницаемость $\mu(\mathbf{x})$ суть Γ -периодические измеримые вещественные (3×3) -матрицы-функции в $\mathbb{R}^3$, причем

$$c_0 \mathbf{1} \leq \varepsilon(\mathbf{x}) \leq c_1 \mathbf{1}, \quad c_0 \mathbf{1} \leq \mu(\mathbf{x}) \leq c_1 \mathbf{1}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad 0 < c_0 \leq c_1 < \infty. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{1}$ — единичная матрица. Положим $\mathfrak{G} = L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$. Через $\mathfrak{G}(\varepsilon^{-1}) = L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3; \varepsilon^{-1})$ обозначим «весовое» пространство с нормой $(\varepsilon^{-1} \mathbf{f}, \mathbf{f})_{\mathfrak{G}}^{1/2}$. Аналогичный смысл имеет $\mathfrak{G}(\mu^{-1}) = L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3; \mu^{-1})$. Положим $J = \{\mathbf{f} \in \mathfrak{G} : \text{div } \mathbf{f} = 0\}$. Равенство $\text{div } \mathbf{f} = 0$ понимается в смысле распределений. Множество J является замкнутым подпространством как в $\mathfrak{G}$, так и в пространствах $\mathfrak{G}(\varepsilon^{-1})$ и $\mathfrak{G}(\mu^{-1})$.

Ниже $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — напряженности электрического и магнитного полей, $\mathbf{w} = \varepsilon \mathbf{u}$ — вектор электрической индукции, $\mathbf{z} = \mu \mathbf{v}$ — вектор магнитной индукции. Оператор Максвелла $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\varepsilon, \mu)$ мы записываем в терминах индукций, считая поля соленоидальными. Тогда оператор $\mathcal{M}$ действует в пространстве $\mathfrak{H} = J \oplus J$ ($\subset \mathfrak{G} \oplus \mathfrak{G}$), не зависящем от ε , μ , и задается формулой

$$\mathcal{M}(\varepsilon, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & i \text{rot } \mu^{-1} \\ -i \text{rot } \varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

на области определения

$$\text{Dom } \mathcal{M}(\varepsilon, \mu) = \{(\mathbf{w}, \mathbf{z}) : \mathbf{w} \in J, \mathbf{z} \in J, \text{rot } \varepsilon^{-1} \mathbf{w} \in \mathfrak{G}, \text{rot } \mu^{-1} \mathbf{z} \in \mathfrak{G}\}. \quad (3)$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00798).

Оператор $\mathcal{M}(\varepsilon, \mu)$ замкнут, но не самосопряжен в $\mathfrak{H}$ (относительно стандартного скалярного произведения в $\mathfrak{G} \oplus \mathfrak{G}$). Однако оператор $\mathcal{M}(\varepsilon, \mu)$ самосопряжен в пространстве $\mathfrak{H}$, рассматриваемом как подпространство в $\mathfrak{G}(\varepsilon^{-1}) \oplus \mathfrak{G}(\mu^{-1})$.

Пусть $\sigma > 0$ — параметр. Если ϕ — измеримая Γ -периодическая функция в $\mathbb{R}^3$, используем обозначение $\phi^\sigma(\mathbf{x}) := \phi(\sigma^{-1}\mathbf{x})$. Определим семейство операторов $\mathcal{M}_\sigma := \mathcal{M}(\varepsilon^\sigma, \mu^\sigma)$, действующих в $\mathfrak{H}$. При этом $\text{Dom } \mathcal{M}_\sigma$ (см. (3)) зависит от σ .

Наша цель — изучение поведения резольвенты $(\mathcal{M}_\sigma - iI)^{-1}$ при $\sigma \rightarrow 0$. Рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{M}_\sigma - iI) \text{col}(\mathbf{w}_\sigma, \mathbf{z}_\sigma) = \text{col}(\mathbf{q}, \mathbf{r}), \quad \mathbf{q}, \mathbf{r} \in J. \quad (4)$$

Соответствующие напряженности заданы соотношениями $\mathbf{u}_\sigma = (\varepsilon^\sigma)^{-1}\mathbf{w}_\sigma$, $\mathbf{v}_\sigma = (\mu^\sigma)^{-1}\mathbf{z}_\sigma$. В подробной записи (4) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} i \text{rot}(\mu^\sigma)^{-1}\mathbf{z}_\sigma - i\mathbf{w}_\sigma &= \mathbf{q}, & \text{div } \mathbf{z}_\sigma &= 0, \\ -i \text{rot}(\varepsilon^\sigma)^{-1}\mathbf{w}_\sigma - i\mathbf{z}_\sigma &= \mathbf{r}, & \text{div } \mathbf{w}_\sigma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Полезно представить решения в виде сумм $\mathbf{w}_\sigma = \mathbf{w}_\sigma^{(q)} + \mathbf{w}_\sigma^{(r)}$, $\mathbf{z}_\sigma = \mathbf{z}_\sigma^{(q)} + \mathbf{z}_\sigma^{(r)}$, где векторы $\mathbf{w}_\sigma^{(q)}$, $\mathbf{z}_\sigma^{(q)}$ — решение системы (5) при $\mathbf{r} = 0$, а векторы $\mathbf{w}_\sigma^{(r)}$, $\mathbf{z}_\sigma^{(r)}$ — решение системы (5) при $\mathbf{q} = 0$. Аналогично представляются поля $\mathbf{u}_\sigma$, $\mathbf{v}_\sigma$.

3. Для определенности подробно рассмотрим случай $\mathbf{q} = 0$. Тогда система (5) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w}_\sigma^{(r)} &= \text{rot}(\mu^\sigma)^{-1}\mathbf{z}_\sigma^{(r)}, & \text{div } \mathbf{z}_\sigma^{(r)} &= 0, \\ \text{rot}(\varepsilon^\sigma)^{-1}\mathbf{w}_\sigma^{(r)} + \mathbf{z}_\sigma^{(r)} &= i\mathbf{r}, & \text{div } \mathbf{w}_\sigma^{(r)} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

а формулы для напряженностей приобретают вид

$$\mathbf{u}_\sigma^{(r)} = (\varepsilon^\sigma)^{-1}\mathbf{w}_\sigma^{(r)}, \quad \mathbf{v}_\sigma^{(r)} = (\mu^\sigma)^{-1}\mathbf{z}_\sigma^{(r)}. \quad (7)$$

Далее, пусть μ^0 — «эффе́ктивная» матрица (см., например, [1–3]), отвечающая эллиптическому оператору $-\text{div } \mu(\mathbf{x})\nabla$. Напомним определение (постоянной положительной) матрицы μ^0 . Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{C}^3$ и $\Phi_j \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$, $j = 1, 2, 3$, есть Γ -периодическое решение уравнения

$$\text{div } \mu(\mathbf{x})(\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0. \quad (8)$$

Через $\tilde{\mu}(\mathbf{x})$ обозначим матрицу, столбцы которой суть векторы $\mu(\mathbf{x})(\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$, $j = 1, 2, 3$. Тогда

$$\mu^0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \tilde{\mu}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Аналогично определяется «эффе́ктивная» матрица ε^0 , отвечающая оператору $-\text{div } \varepsilon(\mathbf{x})\nabla$.

Через $\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}(\varepsilon^0, \mu^0)$ обозначим оператор Максвелла (2) при $\varepsilon = \varepsilon^0$, $\mu = \mu^0$. Пусть $(\mathbf{w}_0^{(r)}, \mathbf{z}_0^{(r)})$ — решение «усредненной» системы

$$(\mathcal{M}^0 - iI) \text{col}(\mathbf{w}_0^{(r)}, \mathbf{z}_0^{(r)}) = \text{col}(0, \mathbf{r}),$$

или, подробнее,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w}_0^{(r)} &= \text{rot}(\mu^0)^{-1} \mathbf{z}_0^{(r)}, \quad \text{div } \mathbf{z}_0^{(r)} = 0, \\ \text{rot}(\varepsilon^0)^{-1} \mathbf{w}_0^{(r)} + \mathbf{z}_0^{(r)} &= i\mathbf{r}, \quad \text{div } \mathbf{w}_0^{(r)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Положим

$$\mathbf{u}_0^{(r)} = (\varepsilon^0)^{-1} \mathbf{w}_0^{(r)}, \quad \mathbf{v}_0^{(r)} = (\mu^0)^{-1} \mathbf{z}_0^{(r)}. \quad (10)$$

Отметим, что поля $\mathbf{u}_0^{(r)}$, $\mathbf{w}_0^{(r)}$, $\mathbf{v}_0^{(r)}$, $\mathbf{z}_0^{(r)}$ принадлежат классу $H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$.

Через $F(\mathbf{x})$ обозначим матрицу, столбцы которой суть векторы $\nabla \Phi_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, 3$. Используя (8), можно показать, что оператор умножения на $F(\mathbf{x})$ является непрерывным оператором из $H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ в $\mathfrak{G}$, а тогда оператор умножения на $F^*(\mathbf{x})$ — непрерывный оператор из $\mathfrak{G}$ в $H^{-1}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$. Наконец, через $\mathcal{P}_0$ обозначим ортопроектор в $\mathfrak{G}((\mu^0)^{-1})$ на подпространство J ; $\mathcal{P}_0$ распространяется до непрерывного оператора в $H^{-1}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$. При этом образ $\mathcal{P}_0 H^{-1}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ совпадает с $J^{-1} := \{\mathbf{f} \in H^{-1}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3) : \text{div } \mathbf{f} = 0\}$.

Положим

$$\tilde{\mathbf{r}}_\sigma = \mathcal{P}_0(F^\sigma)^* \mathbf{r} \in J^{-1}. \quad (11)$$

Отметим, что оператор $\mathcal{M}^0$ (как дифференциальный оператор первого порядка с постоянными коэффициентами) может быть распространен до непрерывного оператора из $\mathfrak{H}$ в $J^{-1} \oplus J^{-1}$. Пусть $(\tilde{\mathbf{w}}_\sigma^{(r)}, \tilde{\mathbf{z}}_\sigma^{(r)})$ — решение «поправочной» системы

$$(\mathcal{M}^0 - iI) \text{col}(\tilde{\mathbf{w}}_\sigma^{(r)}, \tilde{\mathbf{z}}_\sigma^{(r)}) = \text{col}(0, \tilde{\mathbf{r}}_\sigma). \quad (12)$$

В подробной записи (12) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}_\sigma^{(r)} &= \text{rot}(\mu^0)^{-1} \tilde{\mathbf{z}}_\sigma^{(r)}, \quad \text{div } \tilde{\mathbf{z}}_\sigma^{(r)} = 0, \\ \text{rot}(\varepsilon^0)^{-1} \tilde{\mathbf{w}}_\sigma^{(r)} + \tilde{\mathbf{z}}_\sigma^{(r)} &= i\tilde{\mathbf{r}}_\sigma, \quad \text{div } \tilde{\mathbf{w}}_\sigma^{(r)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Положим

$$\tilde{\mathbf{v}}_\sigma^{(r)} = (\mu^0)^{-1} \tilde{\mathbf{z}}_\sigma^{(r)}. \quad (14)$$

Отметим, что поля $\tilde{\mathbf{z}}_\sigma^{(r)}$ и $\tilde{\mathbf{v}}_\sigma^{(r)}$ принадлежат классу $H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$, а $\tilde{\mathbf{w}}_\sigma^{(r)} \in \mathfrak{G}$.

ТЕОРЕМА. Пусть Γ -периодические матрицы ε , μ удовлетворяют условиям (1). Пусть $(\mathbf{w}_\sigma^{(r)}, \mathbf{z}_\sigma^{(r)})$ — решение системы (6) при $\mathbf{r} \in J$, а $\mathbf{u}_\sigma^{(r)}$, $\mathbf{v}_\sigma^{(r)}$ определены формулами (7). Пусть $(\mathbf{w}_0^{(r)}, \mathbf{z}_0^{(r)})$ — решение системы (9), а $\mathbf{u}_0^{(r)}$, $\mathbf{v}_0^{(r)}$ определены формулами (10). Пусть $(\tilde{\mathbf{w}}_\sigma^{(r)}, \tilde{\mathbf{z}}_\sigma^{(r)})$ — решение системы (13), где $\tilde{\mathbf{r}}_\sigma$ определено в (11). Пусть $\tilde{\mathbf{v}}_\sigma^{(r)}$ определено в (14). Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Для магнитной напряженности $\mathbf{v}_\sigma^{(r)}$ имеет место аппроксимация по норме в $\mathfrak{G}$

$$\|\mathbf{v}_\sigma^{(r)} - (\mathbf{1} + F^\sigma)(\mathbf{v}_0^{(r)} + \tilde{\mathbf{v}}_\sigma^{(r)})\|_{\mathfrak{G}} \leq C\sigma \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \sigma \leq 1. \quad (15)$$

2. При $\sigma \rightarrow 0$ напряженности $\mathbf{v}_\sigma^{(r)}$ слабо сходятся в $\mathfrak{G}$ к $\mathbf{v}_0^{(r)}$, и роторы $\text{rot } \mathbf{v}_\sigma^{(r)}$ слабо сходятся в $\mathfrak{G}$ к $\text{rot } \mathbf{v}_0^{(r)}$.

3. Для магнитной индукции $\mathbf{z}_\sigma^{(r)}$ справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{z}_\sigma^{(r)} - (\mathbf{1} + G^\sigma)(\mathbf{z}_0^{(r)} + \tilde{\mathbf{z}}_\sigma^{(r)})\|_{\mathfrak{G}} \leq C\sigma \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \sigma \leq 1, \quad (16)$$

где матрица-функция $G^\sigma := \tilde{\mu}^\sigma(\mu^0)^{-1} - \mathbf{1}$ имеет нулевое среднее значение.

4. При $\sigma \rightarrow 0$ индукции $\mathbf{z}_\sigma^{(r)}$ слабо сходятся в $\mathfrak{G}$ к $\mathbf{z}_0^{(r)}$.

5. При $\sigma \rightarrow 0$ электрические напряженности $\mathbf{u}_\sigma^{(r)}$ слабо сходятся в $\mathfrak{G}$ к $\mathbf{u}_0^{(r)}$.
Для $\text{rot } \mathbf{u}_\sigma^{(r)} = \mathbf{i}\mathbf{r} - \mathbf{z}_\sigma^{(r)}$ справедлива аппроксимация по норме в $\mathfrak{G}$ (см. (16)).

6. При $\sigma \rightarrow 0$ электрические индукции $\mathbf{w}_\sigma^{(r)}$ слабо сходятся в $\mathfrak{G}$ к $\mathbf{w}_0^{(r)}$.

Отметим, что в аппроксимации (15) для $\mathbf{v}_\sigma^{(r)}$ (после раскрытия скобок) явно выделяется слагаемое $\mathbf{v}_0^{(r)}$, а остальные слагаемые слабо стремятся к нулю. Аналогично, в аппроксимации (16) явно выделяется слагаемое $\mathbf{z}_0^{(r)}$, а остальные слагаемые слабо сходятся к нулю.

4. Случай $\mathbf{r} = 0$ рассматривается аналогично. Для соответствующих полей $\mathbf{u}_\sigma^{(q)}$, $\mathbf{w}_\sigma^{(q)}$, $\mathbf{v}_\sigma^{(q)}$, $\mathbf{z}_\sigma^{(q)}$ справедлив аналог теоремы. При этом ε и μ , а также электрические и магнитные поля меняются ролями. Таким образом, для электрических напряженности и индукции $\mathbf{u}_\sigma^{(q)}$, $\mathbf{w}_\sigma^{(q)}$ получаются аппроксимации по норме, аналогичные (15), (16), а для магнитных напряженности и индукции $\mathbf{v}_\sigma^{(q)}$, $\mathbf{z}_\sigma^{(q)}$ получается лишь слабая сходимость.

5. Обсуждение результатов. Разумеется, теорема вместе с ее аналогом для случая $\mathbf{r} = 0$ содержит в себе известный результат о слабой сходимости (суммарных) электрических и магнитных полей к соответствующим полям в среде с усредненными проницаемостями ε^0 , μ^0 . Само «эллиптическое» правило усреднения ε и μ для уравнений Максвелла применительно к слабой сходимости известно давно. Однако оценки (15), (16) для полей $\mathbf{v}_\sigma^{(r)}$, $\mathbf{z}_\sigma^{(r)}$ существенно информативней, нежели вытекающие из них результаты о слабой сходимости. В общем положении порядок $O(\sigma)$ оценок (15), (16) не может быть улучшен. Аппроксимации выражаются в терминах решений «усредненной» системы Максвелла (9) с постоянными («эффективными») коэффициентами ε^0 , μ^0 и постоянной правой частью $(0, \mathbf{r})$, а также решений «поправочной» системы (12), в левой части которой тоже стоит «эффективный» оператор $\mathcal{M}^0$. Однако в аппроксимациях (и в правой части системы (12)) участвуют и быстро осциллирующие множители F^σ , $\tilde{\mu}^\sigma$, избавиться от которых без ухудшения качества сходимости нельзя. Сказанное в равной мере относится к полям $\mathbf{u}_\sigma^{(q)}$, $\mathbf{w}_\sigma^{(q)}$.

Рассмотрим теперь случай $\mu = 1$. Тогда $\mathbf{v}_\sigma^{(r)} = \mathbf{z}_\sigma^{(r)}$, $F^\sigma = 0$, $\tilde{\mathbf{r}}_\sigma = 0$. В этом случае решение системы (12) тривиально, а следовательно, $\tilde{\mathbf{v}}_\sigma^{(r)} = 0$. В итоге обе оценки (15), (16) переходят в

$$\|\mathbf{v}_\sigma^{(r)} - \mathbf{v}_0^{(r)}\|_{\mathfrak{G}} \leq C\sigma \|\mathbf{r}\|_{\mathfrak{G}}, \quad 0 < \sigma \leq 1.$$

Это совпадает с результатом теоремы 3.1(1°) из [5, гл. 7]. В то же время аппроксимации по норме для полей $\mathbf{u}_\sigma^{(q)}$, $\mathbf{w}_\sigma^{(q)}$, аналогичные оценкам (15), (16), усиливают результаты из [5] для случая $\mu = 1$. Методика, использованная в [5], давала для полей $\mathbf{u}_\sigma^{(q)}$, $\mathbf{w}_\sigma^{(q)}$ лишь слабую сходимость.

6. «Двойственная» задача. Наряду с системой (6) с $\mathbf{r} \in J$ можно изучать «двойственную» задачу с заменой $\mathbf{r}$ на $\mathbf{r}_\sigma = \text{rot}(\varepsilon^\sigma)^{-1}\mathbf{R}$, где $\mathbf{R} \in J$. Тогда для электрических напряженности и индукции $\mathbf{u}_\sigma^{(r)}$, $\mathbf{w}_\sigma^{(r)}$ можно получить равномерные аппроксимации по норме в $\mathfrak{G}$ с оценкой разности через $C\sigma \|\mathbf{R}\|_{\mathfrak{G}}$, а для

магнитных полей $\mathbf{v}_\sigma^{(r)}$, $\mathbf{z}_\sigma^{(r)}$ получается лишь слабая сходимость. Аналогично, в случае $\mathbf{r} = 0$ и замены $\mathbf{q}$ на $\mathbf{q}_\sigma = \text{rot}(\mu^\sigma)^{-1}\mathbf{Q}$, где $\mathbf{Q} \in J$, получаются равномерные аппроксимации для $\mathbf{v}_\sigma^{(q)}$, $\mathbf{z}_\sigma^{(q)}$, а для $\mathbf{u}_\sigma^{(q)}$, $\mathbf{w}_\sigma^{(q)}$ — лишь слабая сходимость. Мы не будем здесь останавливаться на деталях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. Наука, М., 1984. 2. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Stud. Math. Appl., Vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978. 3. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. Наука, М., 1993. 4. Birman M. Sh., Suslina T. A. In: Systems, Approximations, Singular Integral Operators and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107. 5. Бирман М. Ш., Суслина Т. А. Алгебра и анализ, **15**, вып. 5, 1–108 (2003).

Санкт-Петербургский государственный университет,
физический факультет
email: tanya@petrov.stoic.spb.su

Поступило в редакцию
24 февраля 2004 г.