Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Д. Гельман, Бесконечномерная версия теоремы
Борсука–Улама, *Функц. анализ и его прил.*, 2004,
том 38, выпуск 4, 1–5

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa121>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:38:20

Бесконечномерная версия теоремы Борсука–Улама*

© 2004. Б. Д. ГЕЛЬМАН

Хорошо известна конечномерная классическая теорема Борсука–Улама (см., например, [1]). В работе [2] была доказана теорема, обобщающая эту теорему на случай бесконечномерных банаховых пространств.

ТЕОРЕМА 0. Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $a: E_1 \rightarrow E_2$ — непрерывный линейный сюръективный оператор, $S_r(0) \subset E_1$ — сфера радиуса r с центром в нуле и $f: S_r(0) \rightarrow E_2$ — вполне непрерывное нечетное отображение.

Если $\dim(\text{Ker } a) \geq 1$, то уравнение

$$a(x) = f(x) \quad (1)$$

имеет непустое множество $N(a, f)$ решений и $\dim(N(a, f)) \geq \dim(\text{Ker } a) - 1$.

Здесь $\dim(N(a, f))$ означает топологическую размерность $\dim$ множества $N(a, f)$.

Во многих задачах теории дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных естественно возникают аналогичные уравнения, в которых оператор $a: D(a) \subset E_1 \rightarrow E_2$ является замкнутым сюръективным оператором (см., например, [3, 4]). В настоящей статье доказывается теорема, распространяющая результаты теоремы 0 на случай линейных замкнутых сюръективных операторов a (не обязательно всюду определенных), возмущенных a -вполне непрерывными операторами. Приведем некоторые определения.

Пусть $a: D(a) \subset E_1 \rightarrow E_2$ — линейный замкнутый сюръективный оператор и $f: X \subset E_1 \rightarrow E_2$ — некоторое отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что отображение f вполне непрерывно по модулю отображения a (или a -вполне непрерывно), если оно непрерывно и для любого ограниченного множества $A \subset E_2$ и любого ограниченного множества $B \subset X$ множество $\overline{f(B \cap a^{-1}(A))}$ является компактным. Пустое множество по определению считается компактным.

Выведем необходимое и достаточное условие a -полной непрерывности отображения f .

Пусть банахово пространство E — это множество $D(a)$, снабженное нормой графика. Очевидно, что отображение вложения $j: E \rightarrow E_1$ является липшицевым. Пусть $X \subset D(a)$. Положим $\tilde{X} = j^{-1}(X)$ и рассмотрим отображение $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow E_2$, $\tilde{f}(x) = f(j(x))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Непрерывное отображение f является a -вполне непрерывным тогда и только тогда, когда отображение $\tilde{f}$ является вполне непрерывным.

*Это исследование поддержано РФФИ, грант №02-01-00189.

Доказательство предложения 1 несложно, и мы не будем его здесь приводить. Пусть отображение $f: D(f) \subset S_r(0) \rightarrow E_2$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $D(f) = D(a) \cap S_r(0)$;
- 2) $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in D(f)$;
- 3) отображение f является a -вполне непрерывным.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть отображение f удовлетворяет условиям 1)–3). Если (конечная или бесконечная) размерность ядра оператора a удовлетворяет неравенству $\dim(\text{Ker } a) \geq 1$, то уравнение (1) на сфере $S_r(0)$ имеет непустое множество решений $N(a, f)$ и $\dim(N(a, f)) \geq \dim(\text{Ker } a) - 1$.

Заметим, что из теоремы 1 вытекает теорема 0, однако обратное не очевидно. Действительно, если a — замкнутый сюръективный оператор и отображение $f: D(a) \rightarrow E_2$ является нечетным и a -вполне непрерывным, то в силу теоремы 0 уравнение $a(j(x)) = f(j(x))$ будет иметь решение на сфере S_r пространства E . Следовательно, решения уравнения (1) будут существовать на множестве $S' = j(S_r)$, которое, однако, не является сферой в пространстве E_1 .

1. Доказательство теоремы Борсука–Улама. Пусть $a: D(a) \subset E_1 \rightarrow E_2$ — линейный замкнутый сюръективный оператор, и пусть $L = \text{Ker}(a)$ — его ядро. Рассмотрим факторпространство $E = E_1 / \text{Ker}(a)$, и пусть p — проекция пространства E_1 на E . Рассмотрим отображение $a_1: D(a_1) \subset E \rightarrow E_2$, где $D(a_1) = p(D(a))$ и $a_1[x] = a(x)$. Хорошо известно (см., например, [4]), что отображение a_1 является обратимым и

$$\|a_1^{-1}\| = \sup_{y \in E_2} \frac{\|a_1^{-1}(y)\|}{\|y\|} = \sup_{y \in E_2} \frac{\inf\{\|x\| : x \in E_1, a(x) = y\}}{\|y\|}.$$

Положим $\|a_1^{-1}\| = \beta(a)$.

Справедливы следующие леммы.

ЛЕММА 1. Отображение a^{-1} является липшицевым многозначным отображением с константой Липшица $\beta(a)$, т. е.

$$h(a^{-1}(x_1), a^{-1}(x_2)) \leq \beta(a) \|x_1 - x_2\|,$$

где h — метрика Хаусдорфа в пространстве E_1 .

ЛЕММА 2. Для любого числа k , $\beta(a) < k$, существует нечетное непрерывное отображение $q: E_2 \rightarrow E_1$, такое, что выполнены следующие условия:

- 1) $a(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;
- 2) $\|q(y)\| \leq k\|y\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем сначала непустоту множества $N(a, f)$.

Рассмотрим отображение $g: D(a) \subset E_1 \rightarrow E_2$, определенное условием

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\|x\|}{r} f\left(\frac{rx}{\|x\|}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Заметим, что это отображение также является a -вполне непрерывным. Действительно, пусть A — ограниченное подмножество в E_2 и $B \subset (B_R(0) \cap D(a))$. Тогда

$$g(B \cap a^{-1}(A)) \subset C = \{tu : t \in [0, R/r], u \in f(S_r(0) \cap a^{-1}(A))\}.$$

Так как множество C является относительно компактным, то $\overline{g(B \cap a^{-1}(A))}$ является компактным множеством.

Пусть отображение q удовлетворяет условиям леммы 2. Пусть $b \in \text{Ker}(a)$ и $b \neq 0$. Пусть $E = E_2 \times \mathbb{R}^1$. Рассмотрим отображение $\alpha: E \rightarrow E_2$, $\alpha(y, t) = g(q(y) + tb)$. Очевидно, что это отображение является нечетным. Проверим, что оно вполне непрерывно.

Пусть $A = A_1 \times [a, c]$ — ограниченное множество в E ; тогда множество $A_2 = \{q(y) + tb : (y, t) \in A\}$ также ограничено и $A_2 \subset a^{-1}(A_1)$. В силу a -полной непрерывности отображения g получаем, что множество $g(A_2) = \alpha(A)$ является относительно компактным.

Пусть S — единичная сфера в E . Рассмотрим уравнение

$$\alpha(y, t) = y$$

на S . Нетрудно доказать (см., например, теорему 0), что это уравнение имеет решение, т. е. существует точка $(y_0, t_0) \in S$, такая, что $g(q(y_0) + t_0 b) = y_0$. Заметим, что $z_0 = q(y_0) + t_0 b \neq 0$.

Тогда

$$g(z_0) = \frac{\|z_0\|}{r} f\left(\frac{rz_0}{\|z_0\|}\right) = y_0,$$

откуда следует, что

$$f\left(\frac{rz_0}{\|z_0\|}\right) = \frac{r}{\|z_0\|} y_0.$$

С другой стороны,

$$a(z_0) = a(q(y_0) + t_0 b) = a(q(y_0)) + t_0 a(b) = y_0.$$

Значит, $a(rz_0/\|z_0\|) = (r/\|z_0\|)y_0$. Пусть $x_0 = rz_0/\|z_0\| \in S_r(0) \subset E_1$. Тогда $f(x_0) = a(x_0)$, т. е. точка x_0 является решением уравнения (1). Это и доказывает первую часть теоремы.

Доказательство второй части теоремы, связанной с оценкой размерности множества $N(a, f)$, проводится аналогично тому, как это делалось в теореме 0.

2. Некоторые следствия из теоремы 1. *Об устойчивости ядра сюръективного оператора относительно вполне непрерывных возмущений.* Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства и $a: D(a) \subset E_1 \rightarrow E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор. Пусть $m: D(m) \subset E_1 \rightarrow E_2$ — замкнутый линейный оператор, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $D(a) \subset D(m)$;
- 2) для любого ограниченного множества $A \subset E_2$ и любого ограниченного множества $B \subset E_1$ множество $m(B \cap a^{-1}(A))$ относительно компактно в E_2 .

СЛЕДСТВИЕ 1. *При сделанных предположениях, если $\dim(\text{Ker } a) \geq 1$, то оператор $a + m$ имеет ненулевое ядро и $\dim(\text{Ker}(a + m)) \geq \dim(\text{Ker } a)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как сужение отображения m на единичную сферу $S \subset E_1$ является нечетным a -вполне непрерывным отображением, то утверждение вытекает из теоремы 1.

Об антиподах в бесконечномерных банаховых пространствах. Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства и $a: D(a) \subset E_1 \rightarrow E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор. Пусть $S_r(0)$ — сфера в E_1 радиуса r с центром в нуле. Пусть

$g: S_r(0) \rightarrow E_2$ есть a -вполне непрерывное отображение. Рассмотрим отображение $\varphi: S_r(0) \cap D(a) \rightarrow E_2$, $\varphi(x) = a(x) + g(x)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\dim(\text{Ker } a) \geq 1$, то существует точка $x_0 \in S_r(0)$, такая, что $\varphi(x_0) = \varphi(-x_0)$ и топологическая размерность множества таких точек больше или равна $\dim(\text{Ker } a) - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $f: S_r(0) \rightarrow E_2$, $f(x) = \frac{1}{2}(g(-x) - g(x))$. Очевидно, что оно является нечетным и множество $N(a, f)$ решений уравнения (1) — искомое множество. Теперь утверждение этого следствия вытекает из теоремы 1.

О решениях дифференциальных уравнений. Пусть $f: \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, нечетное по второму аргументу. Пусть $[a, b]$ — произвольный отрезок на прямой $\mathbb{R}^1$ и M — произвольное положительное число. Обозначим через $C_{[a,b]}$ пространство непрерывных векторзначных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, со значениями в $\mathbb{R}^n$. Пусть заданы линейные непрерывные функционалы $l_i: C_{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i = 1, \dots, k$, причем $0 \leq k < n$.

Рассмотрим линейный оператор $l: C_{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}^k$, определенный соотношением $l(x(\cdot)) = (l_1(x(\cdot)), \dots, l_k(x(\cdot)))$.

Будем считать пространство $\mathbb{R}^n$ вложенным в пространство $C_{[a,b]}$, т. е. точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ сопоставим постоянное отображение $x^0(t) = x_0$.

Будем предполагать, что отображение l удовлетворяет следующему условию:

$$l|_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \subset C_{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ является сюръективным оператором.} \quad (2)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x' = f(t, x). \quad (3)$$

Нас будет интересовать задача существования решений уравнения (3), определенных на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющих следующим условиям:

$$l_i(x(\cdot)) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (4)$$

$$\max_{t \in [a,b]} \|x(t)\| = M. \quad (5)$$

Обозначим через $\Sigma_{M,l}([a, b])$ множество решений задачи (3)–(5).

Пусть $D \subset C_{[a,b]}$ — множество непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ отображений. Пусть $d: D \rightarrow C_{[a,b]}$ — оператор дифференцирования. Тогда определен линейный оператор $\hat{d} = d \times l: D \subset C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]} \times \mathbb{R}^k$, $\hat{d}(x)(t) = (x'(t), l(x))$.

ЛЕММА 3. Если выполнено условие (2), то линейный оператор $\hat{d}$ является замкнутым сюръективным оператором и $\dim(\text{Ker}(\hat{d})) = n - k$.

СЛЕДСТВИЕ 3. При сделанных предположениях $\Sigma_{M,l}([a, b]) \neq \emptyset$ и

$$\dim(\Sigma_{M,l}([a, b])) \geq n - k - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{f}: C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]}$, $\hat{f}(x)(t) = f(t, x(t))$, — оператор суперпозиции, порожденный отображением f . Очевидно, что отображение $\hat{f}$ является нечетным и d -вполне непрерывным (см. предложение 1). Рассмотрим отображение $f_1: C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]} \times \mathbb{R}^k$, $f_1(x) = (\hat{f}(x), 0)$. Нетрудно проверить, что

это отображение также является нечетным и $\hat{d}$ -вполне непрерывным. Рассмотрим на сфере $S_M(0) \subset C_{[a,b]}$ уравнение $\hat{d}(x) = f_1(x)$.

Справедливость следствия 3 вытекает из теоремы 1, так как множество $\Sigma_{M,l}([a,b])$ совпадает с множеством $N(\hat{d}, f_1)$ на сфере $S_M(0)$ в пространстве $C_{[a,b]}$. Утверждение доказано.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть L — подпространство в $\mathbb{R}^n$, $\dim(L) = k$, $k > 0$. Нас будет интересовать задача существования решений уравнения (3), определенных на отрезке $[a,b]$, удовлетворяющих условию (5) и таких, что

$$x(a) \in L. \quad (6)$$

Обозначим через $\Sigma_M(L, [a,b])$ множество решений задачи (3), (5), (6).

СЛЕДСТВИЕ 4. При сделанных предположениях задача (3), (5), (6) имеет непустое множество решений и $\dim(\Sigma_M(L, [a,b])) \geq k - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L^* — ортогональное дополнение к подпространству L , а векторы $e_1, \dots, e_{n-k}$ составляют ортогональный базис в L^* . Определим линейные функционалы $l_i: C_{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}^1$, $l_i(x) = (x(a); e_i)$, где $i = 1, \dots, n-k$. Тем самым определен линейный оператор $l: C_{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, заданный формулой $l(x) = (l_1(x), \dots, l_{n-k}(x))$. Очевидно, что этот оператор удовлетворяет условию (2), так как l — изоморфизм пространств L^* и $\mathbb{R}^{n-k}$. Тогда в силу следствия 3 задача (3)–(5) для этих функционалов l_i имеет решение и $\dim(\Sigma_{M,l}([a,b])) \geq k - 1$. Теперь утверждение вытекает из того, что $\Sigma_M(L, [a,b]) = \Sigma_{M,l}([a,b])$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dugundji J., Granas A. Fixed point theory. PWN, Warszawa, 1982.
2. Гельман Б. Д. Теорема Борсука–Улама в бесконечномерных банаховых пространствах. Матем. сб., **193**, вып. 1, 83–92 (2002).
3. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. Наука, М., 1974.
4. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. Наука, М, 1971.

Воронежский государственный университет
e-mail: gelman@func.vsu.ru

Поступило в редакцию
13 февраля 2003 г.