Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гомилко, Об обратном операторе генератора ограниченной C_0 -полугруппы, *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 4, 6–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa122>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:40:53

УДК 517.9

Об обратном операторе генератора ограниченной C_0 -полугруппы

© 2004. А. М. Гомилко

*Посвящается В. Б. Лидскому
в связи с его восьмидесятилетием*

1. Всюду далее B — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и $E = E(B)$ — множество линейных плотно определенных замкнутых операторов, действующих в B . Через $D(A)$ мы обозначаем область определения оператора $A \in E$, а через $\sigma(A)$ — его спектр, I — единичный оператор и $R(A, \lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \notin \sigma(A)$, — резольвента оператора A . Далее, $E_- = E_-(B)$ — множество операторов из E со спектром, расположенным в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Если $x \in B$ и $y \in B^*$, где B^* — сопряженное к B банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_*$, то через (x, y) обозначаем действие функционала y на x .

Напомним необходимые для дальнейшего сведения из теории полугрупп операторов ([1, гл. 9] и [2, гл. 8]). Семейство $T(t)$, $t \geq 0$, линейных ограниченных операторов, действующих в B , образует C_0 -полугруппу операторов, если $T(0) = I$, $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2)$ ($t_1, t_2 \geq 0$) и $\|T(t)x - x\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ для любого $x \in B$. Всюду далее под полугруппой будем понимать C_0 -полугруппу операторов. Генератор (производящий оператор) $A \in E$ полугруппы $T(t)$ определяется формулой

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A).$$

При этом для соответствующей полугруппы будем пользоваться обозначением $T(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$. Полугруппа $T(t)$ называется равномерно ограниченной, если найдется такая постоянная $M \geq 1$, что $\|T(t)\| \leq M$, $t \geq 0$. Через $\mathcal{G} = \mathcal{G}(B)$ обозначим множество генераторов равномерно ограниченных полугрупп линейных операторов, действующих в B .

Пусть $\mathcal{H}(\theta)$ [1, гл. 9, §1] — множество генераторов, порождающих голоморфные (аналитические) полугруппы в секторе $\Sigma_\theta = \{z = re^{i\phi} : 0 < r < \infty, |\phi| < \theta\}$, $\theta \in (0, \pi/2]$, являющиеся равномерно ограниченными в произвольном секторе Σ_{θ_0} , $\theta_0 \in (0, \theta)$. Через $\mathcal{H}_0$ обозначим множество всех операторов вида $A = A_0 + \beta I$ с некоторыми $A_0 \in \mathcal{H}(\theta)$ и $\beta \geq 0$, $\theta \in (0, \pi/2]$. Множество $\mathcal{H}_0$ состоит из генераторов голоморфных в некотором секторе Σ_θ (в случае $\beta > 0$ квазиограниченных по терминологии [1, гл. 9, §1.4]) полугрупп.

Известно [3, 4], что если $A \in \mathcal{H}(\theta)$ и существует обратный оператор $A^{-1} \in E$ (т.е. $\ker A = \{0\}$ и область значений оператора A является плотной в B), то A^{-1} также принадлежит $\mathcal{H}(\theta)$ и, в частности, $A^{-1} \in \mathcal{G}$. Действительно [1, 2], включение $A \in \mathcal{H}(\theta)$ эквивалентно тому, что резольвента $R(A, \lambda)$ существует

при $\lambda \in \Sigma_{\pi/2+\theta}$ и допускает там оценку

$$\|R(A, \lambda)\| \leq \frac{c_\phi}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma_{\pi/2+\phi}, \text{ для любого } \phi \in (0, \theta). \quad (1)$$

Поэтому, если $A \in \mathcal{H}(\theta)$ и $A^{-1} \in E$, то при $\lambda \in \Sigma_{\pi/2+\theta}$ имеем

$$(A^{-1} - \lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1}[I + \lambda^{-1}R(A, \lambda^{-1})], \quad (2)$$

и тогда из (1), (2) немедленно вытекает оценка $\|R(A^{-1}, \lambda)\| \leq (1 + c_\phi)|\lambda|^{-1}$, $\lambda \in \Sigma_{\pi/2+\phi}$, для любого $\phi \in (0, \theta)$, т. е. $A^{-1} \in \mathcal{H}(\theta)$.

В данной статье утверждение

$$A \in \mathcal{H}(\theta), A^{-1} \in E \implies A^{-1} \in \mathcal{G}$$

распространяется на более широкий класс генераторов равномерно ограниченных полугрупп. Доказано, что если $A \in \mathcal{G}$ и для любых $x \in B$, $y \in B^*$ найдутся такие числа $\sigma_0 > 0$, $r_2 > 0$, $r_1 \geq r_2$ и конечная положительная мера $\mu(t)$ на $\mathbb{R}$ (зависящие от пары x, y), что справедливы оценки

$$\sigma \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} |(R^2(A, \lambda)x, y)| |d\lambda| < \infty, \quad \sigma \in (0, \sigma_0), \quad (3)$$

$$|(R^2(A, \lambda)x, y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{|it - \lambda|^2}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, |\lambda| \in (0, r_2) \cup (r_1, \infty), \quad (4)$$

и существует оператор $A^{-1} \in E$, то $A^{-1} \in \mathcal{G}$ (если $r_1 = r_2$ либо $B = H$ — сепарабельное гильбертово пространство, то условие (3) можно опустить). В качестве следствия получено, что если $B = H$ — сепарабельное гильбертово пространство и $A \in \mathcal{H}_0$, $A^{-1} \in \mathcal{H}_0$, то полугруппы e^{tA} и $e^{tA^{-1}}$ могут быть равномерно ограниченными при $t \geq 0$ лишь одновременно.

Далее используется следующее достаточное условие принадлежности оператора A из E_- множеству $\mathcal{G}$ [5]: если для любых $x \in B$, $y \in B^*$ выполняется оценка

$$\sup_{\sigma > 0} \sigma \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} |(R^2(A, \lambda)x, y)| |d\lambda| < \infty, \quad (5)$$

то $A \in \mathcal{G}$. В случае сепарабельного гильбертова пространства это условие является и необходимым для того, чтобы $A \in \mathcal{G}$. Это вытекает из неравенства

$$\sigma \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \|R(A, \lambda)x\|^2 |d\lambda| = 2\pi\sigma \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \|e^{tA}x\|^2 dt \leq \pi M^2 \|x\|^2, \quad \sigma > 0,$$

справедливого для оператора $A \in \mathcal{G}(H)$, аналогичного неравенства для резольвенты оператора $A^* \in \mathcal{G}(H)$ и неравенства Коши–Буняковского.

2. Отметим, что выполнение условий (3) и (4) при $|\lambda| > r_1$ влечет за собой выполнение условия (5) и, значит, $A \in \mathcal{G}$. Это вытекает из ограниченности резольвенты $R(A, \lambda)$ на компакте $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq \sigma_0, |\lambda| \leq r_1\}$ (в случае $\sigma_0 < r_1$) и простой оценки

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{|it - \lambda|^2} \right\} |d\lambda| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(s-t)^2 + \sigma^2} \right\} d\mu(t) = \frac{\pi}{\sigma} m < \infty,$$

где

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(t).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как резольвента $R(A, \lambda)$ оператора $A \in E_-$ ограничена по норме на любом компакте K , лежащем в открытой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$, то, не уменьшая общности, можно считать, что интегральная оценка (4) справедлива в области

$$\Omega(b; r_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0, |\lambda \pm ib| > r_0\}$$

для некоторых $b > 0$ и $r_0 \in (0, b)$ с возможной заменой меры $\mu(t)$ в (4) на меру $\mu(t) + c\|x\|\|y\|_*\delta_0$, где $c > 0$ — некоторая постоянная, а δ_0 — единичная дискретная мера, сосредоточенная в точке $t = 0$.

ЛЕММА 1. Пусть резольвента оператора $A \in E_-$ удовлетворяет условию (4) при $\lambda \in \Omega(b; r_0)$. Тогда для любых $x \in B$, $y \in B^*$ справедливы оценки

$$|(R(A, \lambda)x, y)| \leq \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{|it - \lambda|}, \quad \lambda \in \Omega(b; r_0). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4) следует, что $|(R^2(A, \lambda)x, y)| \leq m/(\operatorname{Re} \lambda)^2$, $\lambda \in \Omega(b; r_0)$. Отсюда и из равенства $d/d\lambda R(A, \lambda) = R^2(A, \lambda)$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$, нетрудно получить соотношение (см. [5])

$$(R(A, \lambda)x, y) = - \int_0^{\infty} (R^2(A, s + \lambda)x, y) ds. \quad (7)$$

В силу (7) и (4) имеем

$$|(R(A, \lambda)x, y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{ds}{|it - s - \lambda|^2} \right\} d\mu(t), \quad \lambda \in \Omega(b; r_0).$$

При этом $|it - s - \lambda|^2 \geq s^2 + |\lambda - it|^2$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $s > 0$, и тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{ds}{|it - s - \lambda|^2} \leq \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^2 + |\lambda - it|^2} = \frac{\pi}{2|\lambda - it|},$$

откуда и следует оценка (6). Лемма доказана.

Далее при использовании теоремы вложения Карлесона [6, гл. 2, п. 3] нам понадобится следующее простое утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть $Q(h)$ — произвольный квадрат в плоскости $\mathbb{C}$ со стороной, равной h , и $C(z_0; \rho)$ — окружность $\{z : |z - z_0| = \rho\}$. Тогда для длины $l(\gamma)$ кривой $\gamma = C(z_0; \rho) \cap Q(h)$ справедлива оценка $l(\gamma) \leq 2\pi h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $\rho > h$. Пусть центр окружности z_0 лежит вне $Q(h)$ либо на границе этого квадрата и z_1, z_2 — точки, принадлежащие γ , такие, что γ находится на дуге окружности $z_1 z_2$, и пусть $\alpha \in (0, \pi)$ — угол между отрезками $z_0 z_1$ и $z_0 z_2$. Тогда $\sin(\alpha/2) = |z_1 - z_2|/(2\rho)$, $|z_1 - z_2| \leq \sqrt{2}h$ и, значит,

$$l(\gamma) \leq \alpha \rho \leq \pi \rho \sin(\alpha/2) \leq \frac{\pi h}{\sqrt{2}} < 2\pi h. \quad (8)$$

Пусть z_0 лежит внутри $Q(h)$ и $Q(h) = \bigcup Q_j(h/2)$, $j = 1, 2, 3, 4$. Тогда, не уменьшая общности, можно считать, что $z_0 \in Q_1(h/2)$ и (в силу того, что $h < \rho$)

$C(z_0; \rho) \cap Q_1(h/2) = \emptyset$. Используя оценку (8) для $\gamma_j = C(z_0; \rho) \cap Q_j(h/2)$, $j \neq 1$, получаем $l(\gamma) \leq l(\gamma_2) + l(\gamma_3) + l(\gamma_4) \leq 3\pi h/(2\sqrt{2}) < 2\pi h$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Пусть резольвента оператора $A \in \mathcal{G}$ удовлетворяет условиям (3), (4) и существует оператор $A^{-1} \in E$. Тогда $A^{-1} \in \mathcal{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию, считаем, что оценка (4) выполняется при $\lambda \in \Omega(b; r_0)$. Для доказательства теоремы проверим, что резольвента оператора A^{-1} для любых $x \in B$, $y \in B^*$ удовлетворяет условию (5). На основании равенства (2), справедливого при $\operatorname{Re} \lambda > 0$, имеем

$$|(R^2(A^{-1}, \lambda)x, y)| \leq |\lambda|^{-2} \|x\| \|y\|_* + 2|\lambda|^{-3} |(R(A, \lambda^{-1})x, y)| + |\lambda|^{-4} |(R^2(A, \lambda^{-1})x, y)|,$$

и, значит,

$$\sigma \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} |(R^2(A^{-1}, \lambda)x, y)| |d\lambda| \leq \pi \|x\| \|y\|_* + \sigma J_\sigma, \quad \sigma > 0, \quad (9)$$

где

$$J_\sigma = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \{2|\lambda|^{-3} |(R(A, \lambda^{-1})x, y)| + |\lambda|^{-4} |(R^2(A, \lambda^{-1})x, y)|\} |d\lambda|.$$

Положим

$$\Omega_0(b; r_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\} \setminus \Omega(b; r_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0, |\lambda \pm ib| \leq r_0\}$$

и сделаем в интеграле J_σ замену переменной интегрирования $z = 1/\lambda$. Тогда прямая $\operatorname{Re} \lambda = \sigma$ перейдет в окружность $C_\sigma = \{z : |z - \varepsilon| = \varepsilon\}$, $\varepsilon = 1/(2\sigma)$, а интеграл (с учетом (4), замечания и леммы 1) примет вид

$$\begin{aligned} J_\sigma &= \int_{C_\sigma} \{2|z| |(R(A, z)x, y)| + |z|^2 |(R^2(A, z)x, y)|\} |dz| \\ &\leq J_{0,\sigma} + \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{C_\sigma} \left\{ \frac{2|z|}{|it - z|} + \frac{|z|^2}{|it - z|^2} \right\} |dz| \right\} d\mu(t), \end{aligned}$$

где

$$J_{0,\sigma} = \int_{\gamma_\sigma} \{2|z| |(R(A, z)x, y)| + |z|^2 |(R^2(A, z)x, y)|\} |dz|, \quad \gamma_\sigma = C_\sigma \cap \Omega_0(b; r_0).$$

При этом справедливо неравенство

$$\frac{2|z|}{|it - z|} + \frac{|z|^2}{|it - z|^2} \leq \left| 1 + \frac{|z|}{|it - z|} \right|^2 = \left| 1 + \left| 1 - \frac{it}{it - z} \right| \right|^2 \leq 8 + \frac{2t^2}{|it - z|^2}$$

и оценка интеграла

$$\int_{C_\sigma} \left\{ 8 + \frac{2t^2}{|it - z|^2} \right\} |dz| \leq 16\pi\varepsilon + 2\tau^2\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(\tau - \sin \phi)^2 + (1 + \cos \phi)^2} = \frac{10\pi}{\sigma},$$

где $\tau = t/\varepsilon = 2\sigma t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим интеграл $J_{0,\sigma}$, когда γ_σ не является пустым множеством, т. е. можно считать, что $\sigma \in (0, \sigma_1)$ для некоторого $\sigma_1 > 0$, зависящего от b и r_0 . При этом $|z| \leq b + r_0$, $z \in \gamma_\sigma$, и нетрудно заключить, что найдутся такие постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, для которых при всех $\sigma \in (0, \sigma_1)$ выполняются неравенства

$$l(\gamma_\sigma) \leq c_1, \quad \operatorname{Re} z \geq c_2\sigma \quad \text{для любого } z \in \gamma_\sigma. \quad (10)$$

Так как $A \in \mathcal{G}$, то $\|R(A, z)\| \leq M/(\operatorname{Re} z)$, $\operatorname{Re} z > 0$ [1, гл. 9, §1.4] и, значит, в силу (10)

$$\sigma \int_{\gamma_\sigma} |z| |(R(A, z)x, y)| |dz| \leq c_3, \quad \sigma \in (0, \sigma_1).$$

Далее, как отмечалось в начале разд. 2, при любых $x \in B$, $y \in B^*$ для функции $(R^2(A, \lambda)x, y)$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$, выполняется оценка (5). Это означает, что для любого $\lambda_0 > 0$ аналитическая при $\operatorname{Re} \lambda > 0$ функция $(R^2(A, \lambda + \lambda_0)x, y)$ принадлежит пространству Харди H^1 в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Тогда, полагая $\lambda_0 = c_2\sigma$, где c_2 — константа из (10), и используя теорему вложения Карлесона, получаем оценку

$$\sigma \int_{\gamma_\sigma} |z|^2 |(R^2(A, z)x, y)| |dz| \leq c_4 \sigma \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} |(R^2(A, \lambda)x, y)| |d\lambda| \leq c_5$$

с постоянной $c_5 > 0$, не зависящей от $\sigma \in (0, \sigma_1)$. Здесь использовался тот факт, что константа вложения Карлесона N , определяемая неравенством

$$l(\gamma_\sigma \cap \{\operatorname{Re} \lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + h), \operatorname{Im} \lambda \in (t, t + h)\}) \leq Nh, \quad h > 0, t \in \mathbb{R},$$

согласно лемме 2, допускает оценку $N \leq 2\pi$, не зависящую от $\sigma \in (0, \sigma_1)$.

Таким образом, на основании (9) и проведенных оценок интеграла J_σ , $\sigma \in (0, \sigma_1)$, заключаем, что для $(R^2(A^{-1}, \lambda)x, y)$ при любых $x \in B$, $y \in B^*$ выполняется условие (5), и, значит, $A^{-1} \in \mathcal{G}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть для резольвенты оператора $A \in \mathcal{G}$ выполняется оценка

$$\|R(A, \lambda)\| \leq c \sum_{k=1}^n \frac{1}{|ia_k - \lambda|}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

с некоторой постоянной $c > 0$ и действительными числами a_k , $k = 1, \dots, n$. Тогда если существует оператор $A^{-1} \in E$, то $A^{-1} \in \mathcal{G}$.

Утверждение следствия вытекает из теоремы, где условие (4) выполняется при $\operatorname{Re} \lambda > 0$ с мерой

$$\mu = c^2 n \|x\| \|y\|_* \sum_{k=1}^n \delta_{a_k},$$

сосредоточенной в точках $t = a_k$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $B = H$ — сепарабельное гильбертово пространство и резольвента оператора $A \in \mathcal{G}(H)$ удовлетворяет условию (4). Тогда если $\ker A = \{0\}$, то $A^{-1} \in \mathcal{G}(H)$.

В случае гильбертова пространства из условий $A \in \mathcal{G}(H)$, $\ker A = \{0\}$ следует, что $A^{-1} \in E(H)$ [7]. Таким образом, утверждение $A^{-1} \in \mathcal{G}(H)$ вытекает из теоремы с учетом того, что для оператора $A \in \mathcal{G}(H)$ условие (3) выполняется автоматически.

Условию (4) удовлетворяет произвольный оператор $A \in E(B)$ с оценками резольвенты

$$\|R(A, \lambda)\| \leq \frac{c}{|\lambda|}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, |\lambda| \in (0, r_2) \cup (r_1, \infty), \quad r_1 \geq r_2 > 0. \quad (11)$$

В частности, если A является ограниченным и ограниченно обратимым в B оператором, то для резольвенты $R(A, \lambda)$ справедливо условие (11) для (например) $r_2 = (2\|A^{-1}\|)^{-1}$, $r_1 = 2\|A\|$, причем при $|\lambda| \leq (2\|A^{-1}\|)^{-1}$ резольвента $R(A, \lambda)$ является ограниченной оператор-функцией.

Отметим, что оценка (11) при $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $|\lambda| \in (r_1, \infty)$ эквивалентна тому, что $A \in \mathcal{H}_0$, а с другой стороны, если $A^{-1} \in E$, то оценка (11) при $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $|\lambda| \in (0, r_2)$ эквивалентна условию $A^{-1} \in \mathcal{H}_0$ (см. [1, гл. 9, § 1.7]). Таким образом, на основании следствия 2 получаем такое утверждение:

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $B = H$ — сепарабельное гильбертово пространство и $A \in \mathcal{H}_0$, $A^{-1} \in \mathcal{H}_0$. Тогда справедливо утверждение

$$A \in \mathcal{G} \iff A^{-1} \in \mathcal{G}.$$

В частности, если A является ограниченным и ограниченно обратимым в H оператором, то из включения $A \in \mathcal{G}$ вытекает включение $A^{-1} \in \mathcal{G}$ и наоборот.

Отметим, что, в отличие от случая $A \in \mathcal{H}(\theta)$, из выполнения условий $A \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}_0$, $A^{-1} \in \mathcal{G}$ в общем случае не вытекает включение $A^{-1} \in \mathcal{H}_0$. Действительно, в пространстве $H = L_2[0, 1]$ оператор интегрирования $(Jf)(s) = -\int_0^s f(\tau) d\tau$ принадлежит $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}_0$, в то же время обратный оператор $J^{-1} \in \mathcal{G}$, $(J^{-1}f)(s) = -f'(s)$, с областью определения $\mathcal{D}(J^{-1}) = \{f \in W_2^1[0, 1] : f(0) = 0\}$ порождает в $L_2[0, 1]$ полугруппу сдвигов $(e^{tJ^{-1}}f)(s) = f(s - t)$, $s \in (t, 1)$, $t \in (0, 1)$, $(e^{tJ^{-1}}f)(s) = 0$, $s \in (0, 1) \cap (0, t)$, которая не является даже дифференцируемой (при $t \in (0, 1)$) полугруппой операторов.

3. В заключение отметим, что рассмотрение задачи, которой посвящена эта работа, обусловлено как внутренней логикой развития теории полугрупп операторов (функциональное исчисление для генераторов полугрупп операторов, см., например, [2, гл. 8, § 2], а также [8–10]), так и естественными приложениями, связанными с вопросами разрешимости задачи Коши для абстрактных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной (см. [11] и имеющуюся там библиографию). Так, например, если $A \in \mathcal{G}(B)$, $A^{-1} \in \mathcal{G}(B)$, то можно показать, что и оператор $L = \alpha A + A^{-1}$ с $D(L) = D(\alpha A) \cap D(A^{-1})$ при любом $\alpha \geq 0$ принадлежит $\mathcal{G}(B)$, причем (см. [12, § 2]) $e^{tL} = e^{t\alpha A} e^{tA^{-1}} = e^{tA^{-1}} e^{t\alpha A}$, $t \geq 0$. Отсюда нетрудно заключить (см. [1, гл. 9]), что задача Коши

$$\frac{dAu(t)}{dt} = (\alpha A^2 + I)u(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0 \in B,$$

для любого $u_0 \in D(A^2)$ имеет единственное ограниченное при $t \geq 0$ решение $u(t) = e^{tL}u_0$. Если $\alpha = 0$, то последнее утверждение справедливо при любом $u_0 \in D(A)$.

Автор выражает благодарность Т. Я. Азизову, привлечшему его внимание к рассмотренной в этой работе тематике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. Мир, М., 1972.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. ИЛ, М., 1962.

3. *de Laubenfels R.* Inverses of generators. Proc. Amer. Math. Soc., **104**, No. 2, 443–448 (1988).
4. *Горбачук М. Л., Мацлишин И. Т.* Поведение на бесконечности решений дифференциального уравнения первого порядка параболического типа в банаховом пространстве. ДАН СССР, **312**, №3, 521–524 (1990).
5. *Гомилко А. М.* Об условиях на производящий оператор равномерно ограниченной C_0 -полугруппы операторов. Функц. анализ и его прил., **33**, вып. 4, 66–69 (1999).
6. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. Мир, М., 1984.
7. *Goldstein J. A.* Semigroups of linear operators and applications. Oxford Univ. Press, New York, 1985.
8. *de Laubenfels R.* Powers of generators of holomorphic semigroups. Proc. Amer. Math. Soc., **99**, No. 1, 105–108 (1987).
9. *Горбачук В. И., Князюк А. В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений. УМН, **44**, вып. 3, 55–91 (1989).
10. *Миротин А. Р.* О $\mathcal{T}$ -исчислении генераторов C_0 -полугрупп. Сиб. матем. ж., **39**, No. 3, 571–582 (1998).
11. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов. УМН, **49**, вып. 4, 47–79 (1994).
12. *Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения. Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 28, ВИНТИ, М., 1990, с. 87–202.

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев
email: gomilko@ukrpost.net

Поступило в редакцию
11 августа 2003 г.