Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горюнов, В. М. Закалюкин, Об устойчивости проекций лагранжевых многообразий с особенностями, *Функци. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 4, 13–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 12:37:00

Об устойчивости проекций лагранжевых многообразий с особенностями*

© 2004. В. В. Горюнов, В. М. Закалюкин

Изучение лагранжевых и лежандровых подмногообразий с особенностями было начато В. И. Арнольдом примерно 25 лет назад при изучении особенностей в вариационной задаче обхода препятствия [1]. Первые примеры таких подмногообразий — раскрытые ласточкины хвосты — оказались связанными с дискриминантами некрystalлографических групп Коксетера [4, 8]. Разрабатывая общую теорию, включающую такие примеры, А. Б. Гивенталь [4] ввел понятие устойчивости лагранжева и лежандрова подмногообразий с особенностями по отношению к возмущениям только симплектической или контактной структуры и лагранжевой или соответственно лежандровой проекции при сохранении дифференцируемого типа подмногообразия.

Позже [7] было показано, что это понятие устойчивости имеет явное геометрическое описание в терминах производящих семейств, версальных деформаций особенностей функций и индуцирующих отображений.

В последнее время интерес к теории особых лагранжевых и лежандровых подмногообразий возрос в связи с их возможными приложениями к фробениусовым структурам, D -модулям и другим областям.

В этой работе мы переносим результаты работы [7] на случай некоторой естественной модификации понятия устойчивости по Гивенталю и показываем, что это условие устойчивости выполняется для широкого класса лагранжевых и лежандровых подмногообразий с особенностями, связанных с матричными особенностями (см. [2, 3, 6]) и особенностями сложных функций [5].

§1. 0-устойчивость

В этом параграфе мы напомним некоторые основные понятия и вводим их модификации, которые будут использованы ниже.

1.1. Лагранжев случай. *Особое лагранжево* (под)многообразие L симплектического пространства M^{2n} — это n -мерное аналитическое подмножество в M , являющееся лагранжевым в обычном смысле во всех своих регулярных точках. *Лагранжева проекция* π — это проекция $\pi: M \rightarrow B^n$, задающая расслоение, слои которого лагранжевы.

Слои всякого лагранжева расслоения имеют инвариантно определенную аффинную структуру. В самом деле, локальные координаты на базе поднимаются до регулярных функций на пространстве расслоения, которые попарно находятся в инволюции. Следовательно, отвечающие им гамильтоновы векторные поля не обращаются в нуль, коммутируют и касаются слоев.

*Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00099) и программы «Университеты России» (грант UR0401016).

Ограничение $\pi|_L$ лагранжевой проекции π на лагранжево подмногообразие $L \subset M$ называется *лагранжевым отображением*.

Два лагранжевых отображения лагранжевых подмногообразий L' и L'' называются *эквивалентными*, если существует симплектоморфизм соответствующих симплектических пространств, отображающий L' на L'' , а слои одной лагранжевой проекции на слои другой. При этом, в частности, L' и L'' симплектоморфны.

Росток лагранжева отображения $\pi|_L$ подмногообразия L в точке m называется *устойчивым*, если росток всякого лагранжева отображения $\tilde{\pi}|_L$, близкого к $\pi|_L$, во всякой точке $\tilde{m}$, близкой к m , эквивалентен ростку отображения $\pi|_L$ в некоторой точке, близкой к m . Заметим, что в этом определении мы варьируем только расслоение π , оставляя подмногообразие L фиксированным.

Согласно работе Гивенталья [4], это понятие устойчивости эквивалентно следующему понятию версальности ростка отображения $\pi|_L$.

Пусть $\mathcal{O}_L$ — алгебра регулярных функций на L , и пусть $\mathbf{m}_{B,m}$ — максимальный идеал в алгебре $\mathcal{O}_{B,m}$ ростков функций на базе B в точке $\pi(m)$. Определим локальную алгебру ростка отображения $\pi|_L$ в точке m как

$$Q_m = \mathcal{O}_L / ((\pi|_L)^*(\mathbf{m}_{B,m})) \mathcal{O}_L.$$

Алгебра Q_m представляет собой алгебру ограничений функций, заданных на L , на пересечение L со слоем $F_{\pi(m)} = \pi^{-1}(\pi(m))$.

Обозначим через $\mathcal{A}_m$ подпространство аффинных (по отношению к соответствующей аффинной структуре) функций на слое $F_{\pi(m)}$ и через $r: \mathcal{A}_m \rightarrow Q_m$ гомоморфизм ограничения, отправляющий функцию на слое в ее ограничение на $L \cap F_{\pi(m)}$.

Росток отображения $\pi|_L$ в точке $m \in L$ называется *версальным*, если r сюръективно, и *миниверсальным*, если r — изоморфизм.

Пусть p, q — локальные координаты Дарбу на M в окрестности точки m : $p(m) = p_0$, $q(m) = 0$ и $\pi(p, q) = q$. По подготовительной теореме Вейерштрасса версальность ростка отображения $\pi|_L$ в m равносильна существованию для всякого аналитического ростка функции φ на M в точке $m = (p_0, 0)$ разложения следующего вида:

$$\varphi(p, q) = \psi(p, q) + \sum_{j=1}^n a_j(q) p_j + a_0(q), \quad (1)$$

где a_j , $j \geq 0$, — аналитические ростки функций на базе B , а росток функции ψ обращается в нуль на L .

ЗАМЕЧАНИЕ. Это разложение означает, что всякий росток в точке m функции на M является суммой функции, обращающейся в нуль на L , и функции, аффинной на каждом слое. Таким образом, всякое гамильтоново векторное поле в окрестности точки m равно сумме гамильтонова поля, касающегося L , и гамильтонова поля, сохраняющего расслоение π . Применяя гомотопический метод, получим, что всякий росток симплектоморфизма пространства M в точке m , близкий к тождественному, является композицией симплектоморфизма, сохраняющего L , и симплектоморфизма, сохраняющего стандартную проекцию π . Поскольку всякое возмущение ростка проекции π в классе лагранжевых проекций является композицией проекции π с подходящим симплектоморфизмом, из версальности вытекает устойчивость. Подробные доказательства см. в [4].

Обратимся теперь к специальному случаю этой теории. А именно, рассмотрим кокасательное расслоение $M = T^*B$ многообразия B^n и отметим нулевое сечение T_0 в T^*B . Пусть $\text{Sym}_0(M)$ — подгруппа симплектоморфизмов расслоения M , которые сохраняют T_0 .

Два лагранжевых отображения лагранжевых подмногообразий кокасательного расслоения называются *0-эквивалентными*, если они эквивалентны относительно симплектоморфизма из $\text{Sym}_0(M)$.

Заменяя в определении устойчивости понятие эквивалентности на понятие 0-эквивалентности, получаем понятие 0-устойчивости ростка лагранжева отображения.

Нулевое сечение T_0 задает линейную структуру в слоях кокасательного расслоения. Заменяя пространство $\mathcal{A}_m$ аффинных функций на слое F_m на инвариантно определенное подпространство $\mathcal{A}_m^0$ линейных функций, получаем определение *0-версальности*, которое эквивалентно существованию для всякого ростка в точке m функции φ на M , такой, что $\varphi|_{T_0} = 0$, разложения вида

$$\varphi(p, q) = \psi(p, q) + \sum_{j=1}^n a_j(q)p_j, \quad (2)$$

где ростки a_j и ψ такие же, как и в (1), причем мы предполагаем, что координаты Дарбу p обращаются в нуль на нулевом сечении T_0 .

Как и раньше, 0-версальность влечет за собой 0-устойчивость.

Кратность μ 0-миниверсального ростка лагранжева отображения, т. е. ранг локальной алгебры как векторного пространства, равна n . Она не превышает n , если росток 0-версален.

Мы ограничимся далее рассмотрением только комплексного случая. Отметим, что результаты этого раздела легко переносятся и в вещественную категорию.

ЛЕММА 1. *Проекция $\pi: T^*\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $(p, q) \mapsto q$, лагранжева ростка L в начале координат является 0-устойчивой, если и только если ростки произведений $p_i p_j$, $i, j = 1, \dots, n$, допускают разложения*

$$p_i p_j = \psi_{ij}(p, q) + \sum_{k=1}^n c_{ij}^k(q)p_k, \quad (3)$$

в которых ростки функций ψ_{ij} и c_{ij}^k голоморфны и ростки ψ_{ij} обращаются в нуль на L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение «только если» очевидно. Чтобы доказать «если», заметим, что идеал I , порожденный всеми квадратичными полиномами $P_{ij}(p) = p_i p_j - \sum c_{ij}^k(0)p_k$, $i, j = 1, \dots, n$, в пространстве голоморфных ростков функций на слое F_0 имеет конечную коразмерность. По модулю I всякий росток функции на F_0 совпадает с ростком аффинной по p функции. После проекции в локальную алгебру Q_0 , т. е. после еще одной редукции по модулю функций, равных нулю на L (точнее, на $L \cap F_0$), такая функция остается аффинной по p . Таким образом, условие 0-версальности выполняется. $\square$

Аналог этой леммы для устойчивости (а не 0-устойчивости) имеется в [4].

Надстройкой лагранжева расслоения $\pi: M \rightarrow B$ назовем его прямое произведение

$$\widehat{\pi} = (\pi, \pi_0): \widehat{M} = M \times T^*\mathbb{C} \rightarrow B \times \mathbb{C}$$

с канонической проекцией $\pi_0: T^*\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Надстройкой лагранжева подмногообразия $L \subset M^{2n}$ назовем $(n+1)$ -мерное лагранжево подмногообразие $\widehat{L} \subset M \times T^*\mathbb{C}$, являющееся произведением подмногообразия L и прямой $\ell = \{p_{n+1} = \text{const} \neq 0\}$ в пространстве $T^*\mathbb{C}$, снабженным стандартными координатами Дарбу p_{n+1}, q_{n+1} .

Следующие утверждения непосредственно вытекают из определений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Росток отображения $\pi|_L$ в точке $t \in M$ (мини)версален тогда и только тогда, когда его надстройка $\widehat{\pi}|_{\widehat{L}}$ 0-(мини)версальна в некоторой (и тогда — любой) точке линии $t \times \ell$ в пространстве $\widehat{M}$.*

ПРИМЕР. Росток стандартной проекции π лагранжева подмногообразия $L \subset T^*\mathbb{C}^n = \{p, q\}$, заданного производящим семейством $f = f(x, q)$ с параметрами $q \in \mathbb{C}^n$ и переменными $x \in \mathbb{C}^k$,

$$L = \{(p, q) \mid \exists x : \partial f / \partial x = 0, p = \partial f / \partial q\},$$

является устойчивым тогда и только тогда, когда росток семейства $f(\cdot, \cdot)$ является $\mathcal{R}^+$ -версальной деформацией ростка функции $f(\cdot, 0)$. Проекция является 0-устойчивой, если $f(\cdot, \cdot)$ является $\mathcal{R}$ -версальной деформацией функции $f(\cdot, 0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Рассмотрим росток лагранжева подмногообразия L в $\widehat{M} = T^*\mathbb{C}^n \times T^*\mathbb{C}$ в точке, не лежащей в нулевом сечении. Пусть росток отображения $\widehat{\pi}|_L$ является 0-версальным и L принадлежит регулярной гиперповерхности в пространстве $\widehat{M}$, трансверсальной направлению $\partial / \partial p_{n+1}$. Тогда росток $\widehat{\pi}|_L$ 0-эквивалентен надстройке версального ростка отображения $\pi|_{L'}$ некоторого лагранжева подмногообразия $L' \subset M = T^*\mathbb{C}^n$.*

1.2. Лежандров случай. Особое n -мерное подмногообразие контактного пространства называется *лежандровым*, если во всех своих регулярных точках оно лежандрово в обычном смысле. Будем использовать стандартные (и эквивалентные) локальные модели контактных $(2n+1)$ -мерных пространств: проективизацию кокасательного расслоения $PT^*\mathbb{C}^{n+1}$ и пространство $J^1(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) = \{p, q, z\}$ один-струй функций на $\mathbb{C}^n$, снабженное контактной формой $dz - p dq$. Определения лежандрова отображения, устойчивости и другие аналогичны лагранжеву случаю (см. также [4]).

Функторы симплектизации и контактизации связывают лагранжевы и лежандровы ростки следующим образом.

А. Проекция $\rho: (p, q, z) \mapsto (p, q)$ отображает лежандрово подмногообразие $\Lambda \subset J^1(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ на лагранжево подмногообразие $\rho(\Lambda) \subset T^*\mathbb{C}^n$.

В. Локально лагранжево расслоение и его нулевое сечение однозначно задают форму Лиувилля $\alpha = p dq$, являющуюся примитивной для симплектической формы $\omega = d\alpha$. Для заданного лагранжева ростка $L \subset T^*\mathbb{C}^n$ в точке t обозначим через $L_{0,t}$ подмножество таких точек $s \in L$, что интеграл от α вдоль некоторого пути γ на L , соединяющего t и s , равен нулю.

Для простоты предположим, что значения интеграла не зависят от локального пути γ , т. е. что класс когомологий формы α на L нулевой (примеры, когда такой класс ненулевой, см. в [4]).

Если $L_{0,t}$ не пересекает нулевое сечение расслоения $T^*\mathbb{C}^n$, то его проективизация является лежандровым (или изотропным) подмногообразием в $PT^*\mathbb{C}^n$.

Его проекция $W_0(L, m) = \pi(L_{0,m}) \subset \mathbb{C}^n$ называется *0-волновым фронтом* подмногообразия L .

С. Для лагранжева ростка $L \subset T^*\mathbb{C}^n$ в точке m множество $\Lambda_{L,m} \subset J^1(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ таких точек (p, q, z) , что $s = (p, q) \in L$ и интеграл от формы α по пути в L , соединяющему m и s , равен z , является лежандровым подмногообразием пространства струй $J^1(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$.

Росток симплектоморфизма $\theta \in \text{Sym}_0(T^*\mathbb{C}^n)$, сохраняющего проекцию π , сохраняет форму α . Следовательно, если $\theta(L') = L''$, то $\theta(L'_{0,m}) = L''_{0,\theta(m)}$. В координатах Дарбу диффеоморфизм θ имеет вид

$$\theta: (p, q) \mapsto (P, \check{\theta}(q)),$$

где $\check{\theta}$ — соответствующий диффеоморфизм базы и $P = (\check{\theta}^{-1})^*p$ — значение на векторе p линейного оператора на слое, сопряженного к оператору, обратному к производной диффеоморфизма θ . В частности, $\check{\theta}(W_0(L', m)) = W_0(L'', \theta(m))$.

Из этих определений вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Рассмотрим лежандров росток $\Lambda \subset J^1(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ и предположим, что многообразие $\widehat{\rho(\Lambda)}$ не пересекает нулевое сечение и что его стандартная лагранжева проекция 0-устойчива. Тогда проекция ростка Λ в $J^0(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ лежандрово устойчива.

Обратно, если проекция ростка Λ в $J^0(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ лежандрово устойчива и росток Λ квазиоднороден при положительных весах переменных, то росток $\widehat{\rho(\Lambda)}$ 0-устойчив.

§2. Устойчивость индуцированных отображений

2.1. Теорема о критических значениях. Образы при лагранжевом отображении $\pi|_L$ особых точек лагранжева подмногообразия L , а также образы критических точек сужения отображения $\pi|_L$ на регулярную часть подмногообразия L образуют *каустик* Σ_L лагранжева отображения.

Каустика лагранжева ростка L в точке m конечной кратности μ является собственным аналитическим подмножеством базы B положительной коразмерности.

Для точки $q \notin \Sigma_L$, близкой к отмеченной точке $\pi(m)$, прообраз $\pi^{-1}(q) \cap L$ состоит из μ различных точек m_i , близких к m . Можно считать, что локально π является стандартным расслоением $T^*B \rightarrow B$. Это позволяет определить множество Максвелла $M_L \subset B$ как замыкание множества точек $q \notin \Sigma_L$, для которых μ значений переменной z на $\Lambda_{L,m} \cap (\pi \circ \rho)^{-1}(q)$ не все различны. Если μ конечно, множество Максвелла задает росток собственного аналитического подмножества базы. Объединение каустики и множества Максвелла называется *бифуркационной диаграммой* $\text{Bif}(\pi, L)$ лагранжевой проекции.

Рассмотрим лагранжеву проекцию $\pi: T^*\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ростка особого лагранжева подмногообразия L . Пусть $g: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n$ — росток гладкого отображения. При соответствующем выборе отмеченных точек ростков определим *индуцированное лагранжево отображение* $g^*(\pi|_L)$ как проекцию подмногообразия $g^*(L) \subset T^*\mathbb{C}^k$ на $\mathbb{C}^k$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть ростки проекций $\pi|_L$ в точке m , $m \notin T_0$, и $g^*(\pi|_L)$ в точке l , такой, что $\rho(\pi(l)) = \pi(m)$, являются соответственно 0-минивер-

сальным и 0-устойчивым. Тогда множество критических значений Ξ_g отображения g содержится в объединении $W_0(L, m) \cup \text{Bif}(\pi, L)$.

Заметим, что точка многообразия-прообраза называется критической, если производная отображения в ней не сюръективна. В частности, все точки прообраза критические, если его размерность меньше размерности образа. В этом случае из теоремы вытекает, что g отображает $\mathbb{C}^k$ в $W_0(L, m) \cup \text{Bif}(\pi, L)$.

Аналог этой теоремы для устойчивости доказан в [7].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем точку $q_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \Sigma_L$, близкую к отмеченной точке. Ее $\pi|_L$ -прообраз состоит из n различных точек $m_1, \dots, m_n \in F_{q_0}$, отличных от начала координат. Мультиросток проекции $\pi|_L$ в конечном множестве $\{m_1, \dots, m_n\}$ является 0-версальным (разложение (2) выполняется для мультиростков). Это равносильно тому, что точки m_i линейно независимы в слое F_{q_0} : ограничение произвольной функции на слое на это множество совпадает с ограничением некоторой линейной функции.

Пусть теперь $\lambda_0 \in g^{-1}(q_0)$. Пусть $I \subset T_{q_0}\mathbb{C}^n$ — образ производной $g_*: T_{\lambda_0}\mathbb{C}^k \rightarrow T_{q_0}\mathbb{C}^n$. Двойственное отображение $g^*: F_{q_0}^n \rightarrow F_{\lambda_0}^k$ между слоями кокасательных расслоений является композицией факторизации pr слоя F_{q_0} по подпространству $I^\vee$ ковекторов, аннулирующих I , и вложения. Предположим, что размерность r подпространства $I^\vee$ положительна, т. е. что λ_0 — критическая точка отображения g . Из 0-устойчивости ростка $g^*(\pi|_L)$ вытекает, что pr -образы линейно независимых точек $m_1, \dots, m_n \in F_{q_0}$ образуют линейно независимый набор в $(n-r)$ -мерном пространстве $F_{q_0}/I^\vee$ (здесь точки образа рассматриваются без учета кратности). Таким образом, набор вершин $\{m_0 = 0, m_1, \dots, m_n\}$ n -мерного симплекса $\sigma \subset F_{q_0}$ отображается в набор вершин $\{m'_0 = 0, m'_1, \dots, m'_{n-r}\}$ $(n-r)$ -мерного симплекса в $F_{q_0}/I^\vee$. В частности, подпространство $I^\vee$ ранга r порождается всеми такими разностями $m_i - m_j$, что $pr(m_i) = pr(m_j)$, т. е. векторами из всех граней σ , которые отображаются в точку при факторизации pr (сумма размерностей таких граней равна r).

Вблизи каждой из точек m_i , $i = 1, \dots, n$, лагранжево многообразие L является локально графиком дифференциала некоторой функции $z = \psi_i(q)$, $\psi_i(q_0) = 0$. Линейно независимые точки $m_i \in F_{q_0}$ являются дифференциалами функций ψ_i в точке q_0 .

Для всякой пары $i \neq j$ обозначим через $\Delta_{ij} \subset T_{q_0}\mathbb{C}^n$ гиперплоскость, касательную к гиперповерхности $\psi_i(q) - \psi_j(q) = 0$.

Для каждого ℓ обозначим через $\Delta_\ell \subset T_{q_0}\mathbb{C}^n$ гиперплоскость, касательную к гиперповерхности $\psi_\ell(q) = 0$. Гиперплоскости Δ_ℓ и Δ_{ij} двойственны линиям направлений 1-мерных граней симплекса $\sigma \subset F_{q_0}$.

Условие того, что мультиросток $g^*(\pi|_L)$ является 0-устойчивым в точках F_{λ_0} , равносильно тому, что подпространство I совпадает с пересечением всех таких подпространств Δ_ℓ , что $pr(m_\ell) = 0$, и всех таких подпространств Δ_{ij} , что $pr(m_i) = pr(m_j) \neq 0$. Таким образом, подпространство I является пересечением подпространств в $T_{q_0}\mathbb{C}^n$, двойственных некоторым граням симплекса σ . Поскольку I принадлежит касательному конусу в точке q_0 к множеству критических значений Ξ_g , регулярные страты множества Ξ_g в окрестности q_0 совпадают с интегральными многообразиями распределений, заданных, подобно подпространству I , в касательных пространствах $T_q\mathbb{C}^n$ наборами граней соответствующих n -симплексов в слоях F_q .

Из результатов статьи [7] (разд. 7.1 и 7.2) следует, что такие интегральные подмногообразия, имеющие максимальную размерность и содержащие точку $\pi(m)$ в своем замыкании, совпадают с регулярными стратами каустики, множества Максвелла и, как легко видеть, волнового фронта $W_0(L, m)$. Таким образом, $\Xi_g \subset W_0(L, m) \cup \text{Bif}(\pi, L)$. $\square$

ТЕОРЕМА 6. *Если g является ростком собственного отображения пространств одинаковой размерности, то 0-устойчивость ростка $g^*(\pi|_L)$ эквивалентна тому, что g является разветвленным накрытием, множество ветвления которого содержится в $W_0(L, m) \cup \text{Bif}(\pi, L)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае регулярные страты множества Ξ_g являются $(n-1)$ -мерными. По теореме 5 0-устойчивость влечет за собой требуемое свойство множества ветвления. Чтобы доказать обратное, достаточно заметить, что вне множества ветвления индуцированное отображение $g^*(\pi|_L)$ является 0-миниверсальным.

Кроме того, оно является версальным и в регулярных точках множества ветвления, как легко видеть из действия на соответствующий симплекс в слое двойственного отображения g^* . Следовательно, всякий голоморфный росток функции $\varphi(p, q)$ допускает разложение (2) с коэффициентами $a_j(q)$, однозначно определенными на дополнении к аналитическому подмножеству коразмерности, не меньшей 2. По теореме Хартогса такое разложение существует в целой окрестности отмеченной точки. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть росток лагранжева подмногообразия L в точке $m \in T^*\mathbb{C}^n$ является надстройкой лагранжева ростка L' в точке, не принадлежащей нулевому сечению расслоения $T^*\mathbb{C}^{n-1}$. База $\mathbb{C}^n$ надстроенного лагранжева расслоения содержит выделенную координатную функцию q_n , соответствующую второму сомножителю произведения $L \simeq L' \times \mathbb{C}$. Каустика и множество Максвелла для L также являются произведениями каустики и множества Максвелла для L' на прямую (координатную ось q_n). С другой стороны, гиперплоскость, касательная к волновому фронту $W_0(L, m)$ в точке m , задана уравнением $dq_n = 0$.

Если в условиях теоремы 6 множество ветвления Ξ_g содержит $(n-1)$ -мерную компоненту каустики или множества Максвелла, то направление ∂_{q_n} принадлежит образу I дифференциала отображения g в точках, сколь угодно близких к m . Следовательно, сложная функция $q_n \circ g$ неособа в отмеченной точке. С другой стороны, если множество ветвления содержится в $(n-1)$ -мерной компоненте волнового фронта $W_0(L, m)$, то отмеченная точка является критической для сложной функции $q_n \circ g$. В противном случае гиперплоскости, касательные к Ξ_g вблизи отмеченной точки, не были бы близки к гиперплоскости $dq_n = 0$.

2.2. Сложные функции. Интересный класс 0-устойчивых лагранжевых проекций доставляют версальные деформации составных отображений [6].

Для ростка функции $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ рассмотрим группу $\mathcal{H}_f$ (см. [6]), состоящую из ростков диффеоморфизмов Θ пространства-произведения $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ в точке $(0, 0)$, расслоенных над проекцией на первый сомножитель, т. е. имеющих вид $\Theta: (x, y) \mapsto (X(x), Y(x, y))$, $x \in \mathbb{C}^m$, $y \in \mathbb{C}^n$, и таких, что $f(Y(x, y)) = f(y)$ при всех (x, y) .

Группа $\mathcal{H}_f$ естественно действует на пространстве ростков отображений $\varphi: (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, переводя график одного отображения в график другого.

Пусть число Тюриной τ по отношению к группе $\mathcal{K}_f$ ростка отображения φ в начале координат конечно. Пусть семейство $\Phi(x, \lambda) = \varphi(x) + \sum \lambda_s \varphi_s(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}^\tau$, является $\mathcal{K}_f$ -миниверсальной деформацией отображения φ . Рассмотрим композицию $F = f \circ \Phi$.

ТЕОРЕМА 7. *Лагранжева проекция, заданная ростком производящего семейства $F(x, \lambda)$, является 0-устойчивой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in (\mathbb{C}, 0)$ — дополнительный параметр. Рассмотрим деформацию

$$F_{ij} = f \circ \left(\Phi + t \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} \varphi_i \right)$$

сложной функции $f \circ \varphi$. Поскольку $F_{ij}|_{t=0} = F$ и Φ является K_f -версальной, то найдется семейство K_f -эквивалентностей, зависящее от t и индуцирующее семейство F_{ij} из семейства F :

$$F_{ij}(x, \lambda, t) = f \circ \left(\varphi(X(x, \lambda, t)) + \sum_{s=1}^{\tau} \Lambda_s(\lambda, t) \varphi_s(X(x, \lambda, t)) \right).$$

Более того, семейство эквивалентностей можно выбрать так, чтобы при $t = 0$ отображение $(x, \lambda) \mapsto (X, \Lambda)$ было тождественным.

Дифференцируя предыдущее равенство по t при $t = 0$, получим

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = \sum \frac{\partial F}{\partial x_r} \frac{\partial X_r}{\partial t} + \sum \frac{\partial F}{\partial \lambda_k} \frac{\partial \Lambda_k}{\partial t}.$$

Поскольку $\partial F / \partial \lambda_i = p_i$ и $\partial F / \partial x_r = 0$ на лагранжевом подмногообразии, заданном производящим семейством F , это равенство совпадает с критерием 0-устойчивости из леммы 1 для этого подмногообразия. $\square$

Пусть росток в нуле сложной функции $h = f \circ \varphi$ имеет конечную кратность μ . Деформация $F = f \circ \Phi$ ростка h индуцирована из $\mathcal{R}$ -миниверсальной деформации H ростка h при помощи ростка отображения $g: (\mathbb{C}^\tau, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^\mu, 0)$ пространств баз деформаций.

СЛЕДСТВИЕ 8. *Если $\tau = \mu$ и индуцирующее отображение g собственное, то g является накрытием, разветвленным над 0-волновым фронтом 0-устойчивого лагранжева подмногообразия, заданного производящим семейством H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение тривиально, если росток функции f регулярен (в этом случае отображение g является диффеоморфизмом). Предположим, что росток функции f имеет в нуле критическую точку. В этом случае композиция отображения g с проекцией $\mathbb{C}^\mu \rightarrow \mathbb{C}$ вдоль гиперплоскости, касательной к дискриминанту функции h в нуле, особа в $0 \in \mathbb{C}^\tau$. Результат вытекает теперь из теорем 7, 6 и замечания после теоремы 6.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Отображение накрытия, индуцирующее детерминантную функцию версальной матричной деформации простой матричной особенности из версальной деформации детерминантной функции невозмущенной матрицы (см. [6]), представляет собой частный случай отображения из следствия 8.

2. Пространство линейных функций на слое F_q кокасательного расслоения $T^*B \rightarrow B$ совпадает с касательным пространством $T_q B$. Таким образом, функции c_{ij}^k , определенные разложением (3) для 0-версального лагранжева ростка, задают поточечное ассоциативное умножение ростков векторных полей на базе.

3. В условиях следствия 8 $\mathcal{K}_f$ -дискриминант ростка φ является свободным дивизором. Доказательство этого факта будет опубликовано отдельно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k , C_k , F_4 и особенности эволют. УМН, **33**, вып. 5, 91–105 (1978).
2. Bruce J. W. On families of symmetric matrices. Moscow Math. J., **3**, No. 2, 335–360 (2003).
3. Bruce J. W., Goryunov V. V., Zakalyukin V. M. Sectional singularities and geometry of families of planar quadratic forms, Trends in Singularities, 83–97, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2002.
4. Гивенталь А. Б. Особые лагранжевы многообразия и их лагранжевы отображения. Итоги науки и техники, Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 33, ВИНТИ, М., 1988, с. 55–112.
5. Goryunov V. V., Mond D. Tjurina and Milnor numbers of matrix singularities. arXiv:math.AG/0307025.
6. Goryunov V. V., Zakalyukin V. M. Simple symmetric matrix singularities and the subgroups of Weyl groups A_μ , D_μ , E_μ . Moscow Math. J., **3**, No. 2, 507–530 (2003).
7. Робертс Р. М., Закалюкин В. М. Устойчивость лагранжевых многообразий с особенностями. Функц. анализ и его прил., **26**, вып. 3, 28–34 (1992).
8. Щербак О. П. Волновые фронты и группы отражений. УМН, **43**, вып. 3, 125–160 (1988).

Университет Ливерпуля, Великобритания

email: Victor.Goryunov@liverpool.ac.uk

Московский государственный университет

email: zakalyu@mail.ru

Поступило в редакцию

24 мая 2004 г.