Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Эллиптические краевые задачи на гибридных областях, *Функци. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 4, 55–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa126>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 15:09:51

Эллиптические краевые задачи на гибридных областях*

© 2004. С. А. НАЗАРОВ

*Посвящается Виктору Борисовичу Лидскому
в связи с его юбилеем*

§1. Введение

На гладкой границе $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с компактным замыканием $\bar{\Omega}$ выберем точки $P^1, \dots, P^J$, из которых наружу выпустим попарно непересекающиеся лучи Λ^j , $j = 1, \dots, J$. Обозначим через $z^j \in \mathbb{R}_+$ координату на Λ^j и отсечем интервалы $\Upsilon^j = \{x : z^j \in (0, l_j)\} \subset \Lambda^j$ с длинами $l_j > 0$. Основной целью статьи является описание корректной постановки на множестве

$$\Omega^\star = \Omega \cup (\Upsilon^1 \cup \dots \cup \Upsilon^J) \quad (1.1)$$

(«кактус с одномерными иглами») эллиптической задачи с условиями сопряжения (трансмиссии) в точках $P^1, \dots, P^J$. Подразумевается, что эта задача должна оказаться формально самосопряженной и допускать вариационную постановку.

Краевые задачи на «гибридных» множествах, составленных из стратов различных размерностей, рассматривались в публикациях [1–6] и др., но из-за отсутствия в обсуждаемом здесь случае необходимых следовых теорем полученные ранее результаты не удается приспособить к сочленению (1.1) — подходы, опирающиеся на структурированные энергетические функционалы, стратифицированные меры и пр., приводят к распадению задачи в $\Omega^\star$ на зачастую нестандартные, но всегда решаемые по отдельности задачи для тела Ω и для отрезков Υ^j .

В данной статье предлагается новый подход, основанный на применении обобщенных формул Грина (см. [7, 8] и др.) в пространствах функций с предписанным асимптотическим поведением около точек $P^1, \dots, P^J$ (предложение 3.1 и лемма 4.1). Эти формулы позволяют так определить условия сопряжения на $\mathbf{P} = \{P^1, \dots, P^J\}$, связывающие коэффициенты асимптотических разложений, что полученная задача (★) на $\Omega^\star$ (см. §4) приобретает все свойства обычных самосопряженных эллиптических краевых задач, в частности, нулевой индекс (предложение 4.2) и энергетический функционал, стационарными точками которого являются решения задачи (★) и только они (предложение 5.1). При подходящем строении матричных дифференциальных операторов условия сопряжения в точках $P^1, \dots, P^J$ дают возможность сопоставить сформулированной задаче на $\Omega^\star$ самосопряженное расширение некоторого оператора в векторном пространстве $L_2(\Omega^\star)^n$ с областью определения $C_0^\infty(\Omega^\star)^n$ (предложение 6.1).

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03–01–00835).

В §7, где речь идет о моделировании сочленений тонких и массивных тел, результаты асимптотического анализа (см. [9–11]) интерпретируются с позиций постановки условий сопряжения.

Финальные формулы, но не сам ход рассуждений, весьма чувствительны к порядкам дифференциальных операторов и размерностям областей, составляющих гибридное множество. Во избежание нагромождения индексов ограничимся рассмотрением системы уравнений второго порядка на трехмерном теле Ω . Предполагается, что эта система обладает полиномиальным свойством [12], а строение систем обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезках Υ^j соотносится с соответствующим подпространством векторных полиномов (см. комментарии к формуле (2.8) и ср. с замечанием 7.2).

§2. Эллиптические системы с полиномиальным свойством

Рассмотрим $n \times n$ -матрицу дифференциальных операторов

$$L^0(x, \nabla_x) = D^0(-\nabla_x)^\top A^0(x) D^0(\nabla_x), \quad (2.1)$$

где $^\top$ — знак транспонирования, A — симметрическая и положительно определенная $m \times m$ -матрица-функция с вещественными элементами из $C^\infty(\bar{\Omega})$, а $D^0(\nabla_x)$ — матрица размера $m \times n$, составленная из дифференциальных операторов первого порядка и являющаяся *алгебраически комплектной* [13], т. е. при каком-то $\rho_D \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ для любой строки $q(\xi) = (q_1(\xi), \dots, q_n(\xi))$ однородных полиномов степени $\rho \geq \rho_D$ найдется полиномиальная строка $Q(\xi) = (Q_1(\xi), \dots, Q_m(\xi))$, удовлетворяющая равенству

$$q(\xi) = Q(\xi) D^0(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3. \quad (2.2)$$

Согласно [12], оператор (2.1) обладает *полиномиальным свойством в полном объеме*:

$$u \in C^\infty(\bar{\Xi})^n, \quad a^0(u, u; \Xi) = 0 \iff u \in \mathcal{P}|_{\Xi}. \quad (2.3)$$

Здесь Ξ — произвольная область в $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{P}$ — линейал векторных полиномов, причем

$$\mathcal{P} = \{p = (p_1, \dots, p_n)^\top : D^0(\nabla_x)p(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3\} \quad (2.4)$$

и его конечномерность вытекает из требования (2.2) (см. [12]), а a^0 — симметрическая и неотрицательная квадратичная форма, фигурирующая в формуле Грина

$$(L^0 u, v)_\Omega + (N^0 u, v)_{\partial\Omega} = a^0(u, v; \Omega) := (A^0 D^0(\nabla_x)u, D^0(\nabla_x)v)_\Omega, \quad (2.5)$$

в которой $N^0(x, \nabla_x) = D^0(\nu(x))^\top A^0(x) D^0(\nabla_x)$ — оператор краевых условий Неймана, ν — единичный вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$, $(\cdot, \cdot)_\Omega$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)^m$ (вне зависимости от размерности m).

На теле Ω рассматриваем краевую задачу Неймана

$$\begin{aligned} L^0(x, \nabla_x)u^0(x) &= f^0(x), & x \in \Omega, \\ N^0(x, \nabla_x)u^0(x) &= g^0(x), & x \in \partial\Omega \setminus \mathbf{P}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $u^0 = (u_1^0, \dots, u_J^0)^\top$ и

$$f^0 = (f_1^0, \dots, f_J^0)^\top \in L_2(\Omega)^n, \quad g^0 = (g_1^0, \dots, g_J^0)^\top \in H^{1/2}(\partial\Omega)^n. \quad (2.7)$$

При этом применяются стандартные обозначения пространств Соболева–Слободецкого. Для описания структуры подходящих матричных операторов $L^j(z^j, \partial/\partial z^j)$ из систем обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезках

$$L^j(z^j, \partial_{z^j})u^j(z^j) = f^j(z^j), \quad z^j \in \Upsilon^j, \quad (2.8)$$

потребуется дополнительные построения. В силу (2.4) производные любого векторного полинома $p \in \mathcal{P}$ также принадлежат $\mathcal{P}$. Поэтому в линейале $\mathcal{P}$ можно ввести базис $\{p_{(j)}^{k,i} : k = 1, \dots, T^{(j)}, i = 0, \dots, t_k^{(j)} - 1\}$, соотнесенный с направлением луча Λ^j и обладающий следующими свойствами:

1° полиномы $p_{(j)}^{1,0}, \dots, p_{(j)}^{T^{(j)},0}$ не зависят от переменной z^j ;

2° при $k = 1, \dots, T^{(j)}$ и $i = 1, \dots, t_k^{(j)} - 1$ выполняются равенства $\partial_{z^j} p_{(j)}^{k,i} = p_{(j)}^{k,i-1}$.

Ясно, что $t_1^{(j)} + \dots + t_{T^{(j)}}^{(j)} = \dim \mathcal{P} := d_0$. Только для устранения индекса j в обозначениях $t_k^{(j)}$ и $T^{(j)}$ предположим, что эти числа не зависят от направления z^j (свойство *изотропии* линейала $\mathcal{P}$). В качестве L^j возьмем матрицы дифференциальных операторов размера $T \times T$,

$$L^j(z^j, \partial_{z^j}) = \mathcal{D}(-\partial_{z^j})^\top A^j(z^j) \mathcal{D}(\partial_{z^j}); \quad (2.9)$$

здесь A^j — симметрическая и положительно определенная $T \times T$ -матрица-функция с элементами из $C^\infty[0, l_j]$, а $\mathcal{D}(\partial_{z^j})$ — диагональная матрица $\text{diag}\{\partial_z^{t_1}, \dots, \partial_z^{t_T}\}$ (символ $^\top$ в (2.9) можно не писать). Опять-таки для упрощения изложения назовем в точках $z^j = l_j$ граничные условия Дирихле

$$D^j(\partial_{z^j})u^j(l_j) = 0, \quad (2.10)$$

причем матрица D^j (алгебраически коммутативная) имеет размер $d_0 \times T$, а левая часть равенства (2.10) выглядит так:

$$(u_1^j(l_j), \partial_{z^j} u_1^j(l_j), \dots, \partial_{z^j}^{t_1-1} u_1^j(l_j), \dots, u_T^j(l_j), \partial_{z^j} u_T^j(l_j), \dots, \partial_{z^j}^{t_T-1} u_T^j(l_j))^\top. \quad (2.11)$$

ПРИМЕР 2.1. 1) Если $\mathcal{P} = \mathbb{R}^n$ (в частности, L^0 — скалярный оператор в дивергентной форме и $D^0(\nabla_x) = \nabla_x$), то $T = n$ и $t_1 = \dots = t_T = 1$, а значит, L^j также состоит из операторов второго порядка.

2) Для оператора L^0 трехмерной системы теории упругости, анизотропной и неоднородной, $\mathcal{P} = \{p(x) = \mathbf{p}(x)a : a \in \mathbb{R}^6\}$ — линейал жестких смещений, инвариантный относительно ортогональных преобразований координат. Матрицы $\mathbf{p}(x)$ и $D^0(x)^\top$ размера 3×6 имеют соответственно вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha x_3 & \alpha x_2 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha x_3 & 0 & -\alpha x_1 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha x_2 & \alpha x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha x_3 & \alpha x_2 \\ 0 & x_2 & 0 & \alpha x_3 & 0 & \alpha x_1 \\ 0 & 0 & x_3 & \alpha x_2 & \alpha x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha = 2^{-1/2}$ — нормирующий множитель. Любую линейную вектор-функцию можно разложить по столбцам этих матриц, а $D^0(\xi)$ удовлетворяет условию (2.2) с $\rho_D = 2$. Нетрудно убедиться в том, что $n = 3$, $T = 4$ и $t_1 = t_2 = 2$, $t_3 = t_4 = 1$ (см. примеры 1.12 и 4.3(1) в [12]), причем в изотропном случае физически оправдан выбор диагональной матрицы A^j — система (2.8) распадается на четыре независимых уравнения с порядками 4, 4 и 2, 2 (см. [14]).

Предположим, что в уравнении (2.8)

$$f^j = (f_1^j, \dots, f_T^j)^\top \in \mathcal{H}^{-\mathbf{t}}(\Upsilon^j) = \prod_{k=1}^T H^{-t_k + \max \mathbf{t}}(\Upsilon^j), \quad (2.12)$$

где $\max \mathbf{t} = \max\{t_1, \dots, t_T\}$. Таким образом, решение $u^j = (u_1^j, \dots, u_T^j)^\top$ логично искать в подпространстве

$$\mathring{\mathcal{H}}^{\mathbf{t}}(\Upsilon^j) = \left\{ u^j \in \prod_{k=1}^T H^{t_k + \max \mathbf{t}}(\Upsilon^j) : u^j \text{ удовлетворяет равенству (2.10)} \right\}. \quad (2.13)$$

Из вектор-функций, фигурирующих в (2.6) и в (2.8), (2.9), составим столбец

$$\mathbf{u} = (u^0, u^1, \dots, u^J)^\top \in \mathbf{H} := H^2(\Omega)^n \times \mathring{\mathcal{H}}^{\mathbf{t}}(\Upsilon^1) \times \dots \times \mathring{\mathcal{H}}^{\mathbf{t}}(\Upsilon^J). \quad (2.14)$$

Если $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}$, то справедливы формулы Грина

$$\begin{aligned} (L^0 u^0, v^0)_\Omega + (N^0 u^0, v^0)_{\partial\Omega} &= (u^0, L^0 v^0)_\Omega + (u^0, N^0 u^0)_{\partial\Omega}, \\ (L^j u^j, v^j)_{\Upsilon^j} + \langle N^j(\partial_{z^j})u^j(0), D^j(\partial_{z^j})v^j(0) \rangle & \\ &= (u^j, L^j v^j)_{\Upsilon^j} + \langle D^j(\partial_{z^j})u^j(0), N^j(\partial_{z^j})v^j(0) \rangle, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $N^j(\partial_{z^j})$ — оператор граничных условий Неймана для системы (2.8) в точке $z^j = 0$, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$ (вне зависимости от размерности m).

§3. Сингулярные решения задачи в Ω

При $l \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ введем пространство $V_\beta^l(\Omega)$ как пополнение линеала $C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathbf{P})$ по весовой норме

$$\|v; V_\beta^l(\Omega)\| = \left(\sum_{q=0}^l \|\mathbf{r}^{\beta-l+q} \nabla_x^q v; L_2(\Omega)\|^2 \right)^{1/2}, \quad (3.1)$$

где ∇_x^q — совокупность производных функции v порядка q , а $\mathbf{r} \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathbf{P})$ — весовая функция, положительная всюду в $\overline{\Omega}$, кроме точек P^j , и совпадающая с $r_j = |x - P^j|$ в окрестностях этих точек. Иными словами, в $V_\beta^l(\Omega)$ включены те функции $v \in H_{\text{loc}}^l(\overline{\Omega} \setminus \mathbf{P})^n$, для которых конечна норма (3.1). При $l \geq 1$ под $V_\beta^{l-1}(\partial\Omega)$ понимаем следовое пространство, снабженное естественной нормой $\|V; V_\beta^{l-1}(\partial\Omega)\| = \inf\{\|v; V_\beta^l(\Omega)\| : v = V \text{ на } \overline{\Omega} \setminus \mathbf{P}\}$. При $k \in \mathbb{N}$ вложение $V_{\beta+k}^{l+k}(\Omega) \subset V_\beta^l(\Omega)$ непрерывно, но не компактно. В силу неравенств Харди пространства $H^1(\Omega)$ и $V_0^1(\Omega)$ неразличимы, включение $V_0^l(\Omega) \subset H^l(\Omega)$ выполняется при любом $l \in \mathbb{N}_0$, а пространство $V_0^2(\Omega)$ совпадает с подпространством

$$\{v \in H^2(\Omega) : v(P^1) = \dots = v(P^J) = 0\}. \quad (3.2)$$

Нетрудно убедиться в том, что оператор задачи (2.6)

$$\mathcal{O}_\beta^l = \{L^0, N^0\} : V_\beta^{l+1}(\Omega)^n \rightarrow V_\beta^{l-1}(\Omega)^n \times V_\beta^{l-1/2}(\partial\Omega)^n \quad (3.3)$$

непрерывен при любых $l \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{R}$. Другие его характеристики и асимптотические свойства решений приведены в следующем утверждении, конкретизирующем общие результаты теории краевых задач в областях с коническими точками на границе (см. ключевые работы [15, 16], а также [12, 17] и гл. 4, 6 из [8]). Через $\varkappa$ обозначаем наибольшую степень компонент полиномов в линейале (2.4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $l \in \mathbb{N}$ и $|\gamma - l + \varkappa + 1| < 1/2$.

1) Оператор $\mathcal{O}_\gamma^l$ (оператор $\mathcal{O}_{2l-\gamma}^l$) является фредгольмовым мономорфизмом (эпиморфизмом), причем

$$\dim \operatorname{coker} \mathcal{O}_\gamma^l = \dim \ker \mathcal{O}_{2l-\gamma}^l = Jd := Jn(1 + \varkappa). \quad (3.4)$$

2) Если $u^0 \in V_{2l-\gamma}^{l+1}(\Omega)^n$ — решение задачи (2.6) с правыми частями

$$f^0 \in V_\gamma^{l-1}(\Omega)^n, \quad g^0 \in V_\gamma^{l-1/2}(\partial\Omega)^n, \quad (3.5)$$

то справедливо асимптотическое представление

$$u^0(x) = \tilde{u}^0(x) + \sum_{j=1}^J \chi_j(x) \sum_{i=1}^d \{ \mathbf{a}_i^j q^{j,i}(x) + \mathbf{b}_i^j s^{j,i}(x) \}, \quad (3.6)$$

в котором $\chi_j \in C^\infty(\bar{\Omega})$ — срезающие функции с взаимно непересекающимися носителями, равные единице в окрестности «своей» точки P^j ,

$$\tilde{u}^0 \in V_\gamma^{l+1}(\Omega)^n, \quad \mathbf{a}^j = (\mathbf{a}_1^j, \dots, \mathbf{a}_d^j)^\top, \quad \mathbf{b}^j = (\mathbf{b}_1^j, \dots, \mathbf{b}_d^j)^\top \in \mathbb{R}^d, \quad (3.7)$$

$q^{j,i}$ — векторные полиномы степени μ_i , вообще говоря, неоднородные (количество полиномов степени $\mu \leq \varkappa$ равно $n(1 + \mu)$), $s^{j,i}$ — сингулярные составляющие,

$$s^{j,i}(x) = \sum_{p=0}^{\varkappa+1+\mu_i} r_j^{-1-\mu_i+p} S_{(p)}^{j,i}(\log r_j, \varphi^j), \quad (3.8)$$

где $S_{(p)}^{j,i}(l, \cdot)$ — полином переменной l степени не выше p с коэффициентами — гладкими функциями угловых переменных $\varphi^j = r_j^{-1}(x - P^j) \in \mathbb{S}^2$. Только коэффициенты $\mathbf{a}_i^j$ и $\mathbf{b}_i^j$, но не выражения $q^{j,i}$ и $s^{j,i}$, зависят от f^0 , g^0 и u^0 . Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}^0; V_\gamma^{l+1}(\Omega)\|^2 + \sum_{j=1}^J (|\mathbf{a}^j|^2 + |\mathbf{b}^j|^2) \\ & \leq c \{ \|f^0; V_\gamma^{l-1}(\Omega)\|^2 + \|g^0; V_\gamma^{l-1/2}(\partial\Omega)\|^2 + \|u^0; V_{2l-\gamma}^{l+1}(\Omega)\|^2 \}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Выполняются включения $L^0 u^0 \in V_\gamma^{l-1}(\Omega)^n \subset V_{\gamma-l+1}^0(\Omega)^n$ и $N^0 u^0 \in V_\gamma^{l-1/2}(\partial\Omega)^n \subset V_{\gamma-l+1/2}^0(\partial\Omega)^n$, причем соответствующие нормы не превосходят левой части неравенства (3.9), умноженной на постоянную.

3) При фиксированном наборе полиномов $\{q^{j,i}\}$ угловые части $S_{(p)}^{j,i}$ в (3.8) можно выбрать так, чтобы для любых вектор-функций u^0 и v^0 , допускающих

разложение (3.6) со столбцами коэффициентов $\mathbf{a}_u^j$, $\mathbf{b}_u^j$ и $\mathbf{a}_v^j$, $\mathbf{b}_v^j$ соответственно, выполнялась обобщенная формула Грина

$$(L^0 u^0, v^0)_\Omega + (N^0 u^0, v^0)_{\partial\Omega} - (u^0, L^0 v^0)_\Omega - (u^0, N^0 u^0)_{\partial\Omega} = \sum_{j=1}^J (\langle \mathbf{a}_u^j, \mathbf{b}_v^j \rangle - \langle \mathbf{b}_u^j, \mathbf{a}_v^j \rangle), \quad (3.10)$$

в которой под $(\cdot, \cdot)_\Omega$ и $(\cdot, \cdot)_{\partial\Omega}$ подразумеваются расширения скалярных произведений в $L^2(\Omega)^n$ и $L^2(\partial\Omega)^n$ до двойственности между элементами пар $V_{\sigma-l+1}^0(\Omega)^n$, $V_{(2l-\sigma)-(l+1)}^0(\Omega)^n$ и $V_{\sigma-l+1/2}^0(\partial\Omega)^n$, $V_{(2l-\sigma)-(l+1/2)}^0(\partial\Omega)^n$; здесь $\sigma = \gamma$ или $\sigma = 2l - \gamma$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Число $n(1 + \varkappa)$, фигурирующее в (3.4), указывает количество линейно независимых векторных полиномов степени не выше $\varkappa$, удовлетворяющих однородной модельной задаче в полупространстве $\mathbb{R}_{j+}^3 = \{x : \nu(P^j)^\top(x - P^j) < 0\}$

$$\begin{aligned} D^0(-\nabla_x)^\top A^0(P^j) D^0(\nabla_x)v(x) &= 0, & x \in \mathbb{R}_{j+}^3, \\ D^0(\nu(P^j))^\top A^0(P^j) D^0(\nabla_x)v(x) &= 0, & x \in \partial\mathbb{R}_{j+}^3 \setminus \{P^j\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Предложение 3.1 нуждается в пояснениях.

Благодаря алгебраической комплектности (2.2) матрицы D^0 задача (2.6) допускает вариационную постановку (см. [13]), причем ее решение определено с точностью до слагаемого из $\mathcal{P}$, а условия разрешимости имеют вид

$$(f^0, p)_\Omega + (g^0, p)_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}. \quad (3.12)$$

При учете сказанного о пространствах $V_\beta^{l+1}(\Omega)$ перед формулой (3.2) у оператора $\mathcal{O}_l^l$ ядро и коядро также определены соотношениями (2.4) и (3.12) соответственно; подчеркнем, что, согласно [15, 18], отображение (3.3) теряет фредгольмовость лишь при полупелых показателях $\beta \in \mathbb{Z} + 1/2$. Поскольку только тривиальный элемент линейала $\mathcal{P}$ попадает в пространство $V_\gamma^{l+1}(\Omega)^n$ при $\gamma - l + \varkappa < -1/2$ (ср. с определением (3.1)), оператор $\mathcal{O}_\gamma^l$ становится мономорфизмом, а размерность его коядра вычисляется с помощью теоремы о приращении индекса при переходе через запретные значения $\beta \in \mathbb{Z} + 1/2$ (см., например, теорему 4.3.3 в [8] и замечание 3.1). Операторы $\mathcal{O}_\gamma^l$ и $\mathcal{O}_{2l-\gamma}^l$ оказываются сопряженными относительно формулы Грина¹⁾ (2.15)₁, перенесенной на весовые классы по замыканию, и поэтому оператор $\mathcal{O}_{2l-\gamma}^l$ обслуживается результатами из [16] (см. также [8, §4.1]). Асимптотическое разложение (3.6), оценка (3.9) и форма (3.8) сингулярных решений вытекают из [15], а уточнение структур (3.8) и вывод подобных (3.10) обобщенных формул Грина приведены в [7, 17].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если $\varkappa = 0$ и $\mathcal{P} = \mathbb{R}^n$ (см. пример 2.1(1)), то можно взять $l = 1$, $\gamma = 0$ и, следовательно, пространство $V_\gamma^{l+1}(\Omega) = V_0^2(\Omega)$ совпадает с подпространством (3.2). Решения $u^0 \in V_{2l-\gamma}^{l+1}(\Omega)^n = V_2^2(\Omega)^n$ также допускают ясную интерпретацию — к классическому решению $\hat{u}^0 \in H^2(\Omega)^n$ добавляется

¹⁾Нижний индекс указывает номер строки в соответствующей формуле.

линейная комбинация обобщенных матриц Грина с особенностями в точках P^j (ср. с [19] и см. замечание 3.3):

$$u^0(x) = \hat{u}^0(x) + \sum_{j=1}^J \mathfrak{G}^j(x) \mathbf{b}^j. \quad (3.13)$$

Для того чтобы написать аналогичное (3.13) представление в общем случае, заменим систему дифференциальных уравнений (2.6)₁ интегро-дифференциальной системой

$$\begin{aligned} L^0(x, \nabla_x) v^0(x) + \zeta(x) \mathbf{p}(x) \Pi(v^0) &= f^0(x), & x \in \Omega, \\ N^0(x, \nabla_x) v^0(x) &= g^0(x), & x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Здесь $\Pi: L_2(\Omega)^n \rightarrow \mathbb{R}^{d_0}$ — проекция,

$$\Pi(v) = \left\{ \int_{\Omega} \zeta(x)^2 \mathbf{p}(x)^\top \mathbf{p}(x) dx \right\}^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{p}(x)^\top v(x) dx, \quad (3.15)$$

$\mathbf{p} = (\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^{d_0})$ — строка векторных полиномов, составляющих базис в линейале $\mathcal{P}$, а ζ — неотрицательная функция из $C_0^\infty(\Omega)$, равная единице на непустой внутренней подобласти $\Omega' \subset \Omega$. Матрица Грама Π_Ω из фигурных скобок в (3.15) положительно определена. Следующее утверждение очевидно.

ЛЕММА 3.1. *При любых правых частях (2.7) задача (3.14) имеет единственное решение $v^0 \in H^2(\Omega)^n$. Если выполнено условие ортогональности (3.12), то решение v^0 совпадает с решением $u^0 \in H^2(\Omega)^n$ задачи (2.6), подчиненным соотношению $\Pi(u^0) = 0$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. По определению столбцы $\mathfrak{G}^{j,k}$ обобщенной матрицы Грина $\mathfrak{G}^j$, упомянутой в замечании 3.1, удовлетворяют задаче (3.14), в которой $f^0 = 0$ и $g^0(x) = \delta(x - P^j) e_k$, где $e_k = (\delta_{1,k}, \dots, \delta_{n,k})^\top$ и δ — функция Дирака. Таким образом, при $v^0 \in H^2(\Omega)^n$ и соответственно $\mathbf{b}_v^j = 0$ равенство (3.10) становится формулой Грина в рамках теории распределений: выражение $N^0 u^0$ рассматривается на проколотой поверхности $\partial\Omega \setminus \mathbf{P}$, но происходящий от δ -функции член $v^0(P^j)^\top \mathbf{b}_u^j = (\mathbf{a}_u^j)^\top \mathbf{b}_u^j$ присутствует в правой части соотношения (3.10). Если оба столбца $\mathbf{b}_u^j$ и $\mathbf{b}_v^j$ ненулевые, упомянутая интерпретация формулы Грина затруднительна, а ее проверка осуществляется предельным переходом при $\delta \rightarrow +0$ в формуле Грина (2.15)₁ на области $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, P^j) > \delta\}$ (ср. с [16] и [8, §§3.2, 3.4]), причем в [7, 17] установлено, что при надлежащем выборе угловых частей $S_{(1)}^{j,i}, \dots, S_{(\kappa+2+\mu_i)}^{j,i}$ пределы возникающих интегралов по малым множествам $\{x \in \Omega : \text{dist}(x, P^j) = \delta\}$ совпадают с членами суммы по j в (3.10).

Через $\mathfrak{G}^{j,i}$ обозначим решение однородной системы уравнений (3.14)₁, удовлетворяющее однородным краевым условиям (3.14)₂ на $\partial\Omega \setminus P^j$ и имеющее сингулярности (3.8) вблизи точки P^j . Это решение следует искать в виде

$$\mathfrak{G}^{j,i}(x) = \chi_j(x) s^{j,i}(x) + \hat{\mathfrak{G}}^{j,i}(x), \quad \hat{\mathfrak{G}}^{j,i} \in H^{\kappa+2}(\Omega)^n. \quad (3.16)$$

Действительно, лемма 3.1 и последующее поднятие гладкости решения доставляют остатки $\mathfrak{G}^{j,i}$ с нужными свойствами, поскольку, согласно предложению 3.1(2), где $l = \kappa + 1$ и $\gamma = 0$, верны включения $L^0 \chi_j s^{j,i} \in V_\gamma^{l-1}(\Omega)^n \subset H^\kappa(\Omega)^n$ и

$L^0 \chi_j s^{j,i} \in V_\gamma^{l-1/2}(\partial\Omega)^n \subset H^{\kappa+1/2}(\partial\Omega)^n$ (см. текст перед формулой (3.2)). Подчеркнем, что интегрирование в (3.15) и добавка в (3.14) удалены от границы $\partial\Omega$ и поэтому никак не затрагивают сингулярности в точках P^j .

§4. Асимптотические условия сопряжения в точках P^j

Введем пространство

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{D} \times \mathcal{H}^{\mathfrak{t}}(\Upsilon^1) \times \dots \times \mathcal{H}^{\mathfrak{t}}(\Upsilon^J) \quad (4.1)$$

функций-столбцов $\mathbf{u} = (u^0, u^1, \dots, u^J)^\top$ и сделаем его гильбертовым, определив норму по формуле

$$\|\mathbf{u}; \mathfrak{H}\| = \left\{ \|\tilde{u}^0; V_\gamma^2(\Omega)\|^2 + \sum_{j=1}^J (|\mathbf{a}^j|^2 + |\mathbf{b}^j|^2 + \|u^j; \mathcal{H}^{\mathfrak{t}}(\Upsilon^j)\|^2) \right\}^{1/2}. \quad (4.2)$$

В (4.1) пространство $\mathcal{H}^{\mathfrak{t}}(\Upsilon^j)$ задано равенством (2.13), а $\mathfrak{D}$ — пространство вектор-функций, представимых в виде (3.6) с атрибутами (3.7), причем показатели гладкости и веса фиксируем так:

$$l = 1, \quad \gamma = -\kappa. \quad (4.3)$$

Ясно, что модификация срезающих функций χ_j в (3.6) не сказывается на пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{D}$ ни алгебраически, ни топологически. Введем на $\mathfrak{H}$ проекции $\pi_\pm^j$ и π^j равенствами $\pi_+^j \mathbf{u} = \mathbf{a}^j$, $\pi_-^j \mathbf{u} = \mathbf{b}^j$ и $\pi^j \mathbf{u} = u^j$ — условия сопряжения в точках реализуются как связи, налагаемые на $\pi_\pm^j \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ и $D^j(\partial_{z^j})\pi^j \mathbf{u}(0)$, $N^j(\partial_{z^j})\pi^j \mathbf{u}(0) \in \mathbb{R}^{d_0}$.

Линейная оболочка полиномиальных столбцов $q^{j,1}, \dots, q^{j,d}$ из предложения 3.1(2) включает в себя подпространство (2.4) (потому что элемент $p \in \mathcal{P}$ удовлетворяет однородной задаче (2.6)). Согласованным изменением базисов $\{q^{j,i}\}$ и $\{s^{j,i}\}$ гладких и сингулярных составляющих разложения (3.6) добиваемся при сохранении формулы (3.10) совпадения строк $(q^{j,1}, \dots, q^{j,d_0})$ и

$$(p_{(j)}^{1,0}, \dots, p_{(j)}^{1,t^1-1}, \dots, p_{(j)}^{T,0}, \dots, p_{(j)}^{T,t^T-1}), \quad (4.4)$$

где $\{p_{(j)}^{k,i}\}$ — базис в $\mathcal{P}$, упомянутый в §2, а порядок расположения элементов в (4.4) аналогичен (2.11). За столбцом $a^j \in \mathbb{R}^{d_0}$, увеличенным до высоты d путем добавления нулей снизу, сохраняем обозначение a^j , а столбец $\mathbf{a}^j \in \mathbb{R}^d$, из которого удалены нижние $d - d_0$ элементов, обозначаем через $\mathbf{a}_\#^j$. Далее нам понадобятся два ортогональных проектора $\mathfrak{P}^j$ в $\mathbb{R}^d$ и $\mathbf{p}^j$ в $\mathbb{R}^{d_0}$, а также два симметрических оператора $\mathfrak{S}^j$ и $\mathfrak{s}^j$ на подпространствах $\mathfrak{P}^j \mathbb{R}^d$ и $\mathbf{p}^j \mathbb{R}^{d_0}$ соответственно.

В качестве искоемых условий сопряжения в точках $P^1, \dots, P^J$ возьмем

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}^j \pi_+^j \mathbf{u} - \mathfrak{S}^j \mathfrak{P}^j \pi_-^j \mathbf{u} - \mathfrak{P}^j \mathfrak{s}^j \mathbf{p}^j D^j(\pi^j \mathbf{u})(0) &= 0, \\ \mathfrak{s}^j \mathbf{p}^j (\pi_-^j \mathbf{u})_\# + \mathbf{p}^j N^j(\pi^j \mathbf{u})(0) &= 0, \\ (\mathbb{I}_d - \mathfrak{P}^j) \pi_-^j \mathbf{u} &= 0, \\ (\mathbb{I}_{d_0} - \mathbf{p}^j) D^j(\pi^j \mathbf{u})(0) &= 0, \quad j = 1, \dots, J; \end{aligned} \quad (4.5)$$

здесь D^j и N^j — граничные дифференциальные операторы, фигурирующие в (2.15)₂, а $\mathbb{I}_d$ — тождественное отображение в пространстве $\mathbb{R}^d$. Асимптотическая и механическая подоплека условий (4.5) будет разъяснена в §7, а сейчас займемся исследованием задачи (2.6), (2.8) и (2.10) с асимптотическими условиями сопряжения (4.5), которую кратко обозначим (★) (ср. с (1.1)).

ЛЕММА 4.1. Для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{H}$ справедлива обобщенная формула Грина

$$\mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{q}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad (4.6)$$

где при использовании обозначений из (3.10), (3.6) и (2.14)

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (L^0 u^0, v^0)_\Omega + (N^0 u^0, v^0)_{\partial\Omega} \\ &+ \sum_{j=1}^J \left\{ (L^j u^j, v^j)_{\Upsilon^j} - \langle (\mathbb{I}_d - \mathfrak{P}^j) \mathbf{b}_u^j, \mathbf{a}_v^j + \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j D^j v^j(0) \rangle \right. \\ &- \langle (\mathbb{I}_{d_0} - \mathfrak{p}^j) D^j u^j(0), N^j v^j(0) \rangle + \langle \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j (\mathbf{b}_u^j)_\# + \mathfrak{p}^j N^j u^j(0), D^j v^j(0) \rangle \\ &\left. - \langle \mathfrak{P}^j \mathbf{a}_u^j - \mathfrak{S}^j \mathfrak{P}^j \mathbf{b}_u^j - \mathfrak{P}^j \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j D^j u^j(0), \mathbf{b}_v^j \rangle \right\}. \quad (4.7) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сложим формулы Грина (3.10) и (2.15)₂, $j = 1, \dots, J$, после чего сделаем следующее преобразование, использующее симметричность операторов:

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{a}_u^j, \mathfrak{P}^j \mathbf{b}_v^j \rangle - \langle \mathfrak{P}^j \mathbf{b}_u^j, \mathbf{a}_v^j \rangle + \langle \mathfrak{p}^j D^j u^j(0), N^j v^j(0) \rangle - \langle N^j u^j(0), \mathfrak{p}^j D^j v^j(0) \rangle \\ &= \langle \mathfrak{P}^j \mathbf{a}_u^j - \mathfrak{S}^j \mathfrak{P}^j \mathbf{b}_u^j, \mathbf{b}_v^j \rangle - \langle \mathbf{b}_u^j, \mathfrak{P}^j \mathbf{a}_v^j - \mathfrak{S}^j \mathfrak{P}^j \mathbf{b}_v^j \rangle \\ &- \langle \mathfrak{p}^j N^j u^j(0) + \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j (\mathbf{b}_u^j)_\#, D^j v^j(0) \rangle + \langle \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j (\mathbf{b}_u^j)_\#, D^j v^j(0) \rangle \\ &+ \langle D^j u^j(0), \mathfrak{p}^j N^j v^j(0) + \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j (\mathbf{b}_v^j)_\# \rangle - \langle D^j u^j(0), \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j (\mathbf{b}_v^j)_\# \rangle. \end{aligned}$$

Осталось переписать член $\langle D^j u^j(0), \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j (\mathbf{b}_v^j)_\# \rangle$ (и аналогичный ему) в виде $\langle \mathfrak{P}^j \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j D^j u^j(0), \mathbf{b}_v^j \rangle + \langle \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j D^j u^j(0), (\mathbb{I}_d - \mathfrak{P}^j) \mathbf{b}_v^j \rangle$ и распределить слагаемые по составляющим в (4.7). $\square$

Итак, задача (★) включается в симметричную обобщенную формулу Грина, т. е. оказывается формально самосопряженной. Очередное утверждение о повышении гладкости решения очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $\mathbf{u}$ — решение задачи (★) из пространства (4.1) с индексами (4.3), но справедливы включения (3.5) и

$$f^j \in \mathcal{H}^{s-\mathbf{t}}(\Upsilon^j) = H^{s-t_1}(\Upsilon^j) \times \dots \times H^{s-t_T}(\Upsilon^j), \quad (4.8)$$

где $l \geq 1$, $s \geq \max \mathbf{t}$, а пара l, γ подчинена условию из предложения 3.1. Тогда компонента u^0 решения $\mathbf{u}$ принадлежит пространству $V_{2l-\gamma}^{l+1}(\Omega)^n$ и допускает представление (3.6) с атрибутами (3.7), а компоненты u^j попадают в пространства $\mathcal{H}^{s+\mathbf{t}}(\Upsilon^j)$, причем соответствующие нормы компонент u^0 и u^j не превосходят постоянной, умноженной на сумму норм правых частей (3.5) и (4.8), а также нормы $\|\mathbf{u}; \mathfrak{H}\|$.

Для задачи (★) верна альтернатива Фредгольма.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $\mathfrak{h}$ — подпространство решений $\mathbf{u} \in \mathfrak{H}$ однородной задачи $(\star)$. Задача $(\star)$ с правыми частями (3.5), (2.12) имеет решение $\mathbf{u} \in \mathfrak{H}$ в том и только в том случае, когда

$$(f^0, v^0)_\Omega + (g^0, v^0)_{\partial\Omega} + \sum_{j=1}^J (f^j, v^j)_{\Upsilon^j} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{h}. \quad (4.9)$$

В частности, индекс оператора $\mathfrak{D}_\star$ задачи $(\star)$ равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условий разрешимости (4.9) вытекает из обобщенной формулы Грина (4.6), а достаточность обеспечивается равенством $\text{Ind } \mathfrak{D}_\star = 0$. Проверим его. Оператор $\mathfrak{D}_\star$ фредгольмов, так как лишь конечным возмущением отличается от оператора $\mathcal{O} = (\mathcal{O}_0^2, \mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_J)^\top$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{O})$; при этом $\mathcal{O}_0^2$ взят из (3.3), а $\mathcal{O}_j$ — оператор задачи Дирихле для системы (2.8), т. е. $(L^j, D^j|_{z^j=0}) : \mathcal{H}^{\mathbf{t}}(\Upsilon^j) \rightarrow \mathcal{H}^{-\mathbf{t}}(\Upsilon^j) \times \mathbb{R}^{d_0}$. Согласно предложению 3.1(1) индекс оператора $\mathcal{O}$ равен $-Jd$. Так как факторпространство $\mathfrak{H}/\mathcal{D}(\mathcal{O})$ имеет размерность $J(2d + d_0)$, а условия (4.5) налагают связи в количестве

$$J\{\dim(\mathfrak{P}^j \mathbb{R}^d) + \dim(\mathfrak{p}^j \mathbb{R}^{d_0}) + \text{codim}(\mathfrak{P}^j \mathbb{R}^d) + \text{codim}(\mathfrak{p}^j \mathbb{R}^{d_0})\} = J(d + d_0),$$

получаем нужное равенство $\text{Ind } \mathfrak{D}_\star = -Jd + J(2d + d_0) - J(d + d_0) = 0$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Если размерность подпространства

$$\mathcal{P}^\star = \{p \in \mathcal{P} : \mathfrak{P}^j \pi_+^j(p, 0, \dots, 0)^\top = 0, j = 1, \dots, J\} \quad (4.10)$$

положительна, задача $(\star)$ не может быть однозначно разрешимой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p \in \mathcal{P}^\star$ столбец $\mathbf{w} = (p, 0, \dots, 0)^\top$ удовлетворяет всем условиям сопряжения в точках P^j , поскольку $\pi_-^j \mathbf{w} = 0$, $\pi^j \mathbf{w} = 0$, а в (4.5) фигурирует только проекция $\mathfrak{P}^j \pi_+^j \mathbf{w}$, равная нулю в силу (4.10). Следовательно, $\mathcal{P}^\star \subset \mathfrak{h}$. $\square$

§5. Вариационная формулировка задачи

Рассмотрим на пространстве $\mathfrak{H}$ квадратичную форму

$$\mathfrak{Q}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathfrak{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \mathfrak{f}(\mathbf{u}), \quad (5.1)$$

где форма $\mathfrak{q}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ определена равенством (4.7) и

$$\mathfrak{f}(\mathbf{u}) = (f^0, u^0)_\Omega + (g^0, u^0)_{\partial\Omega} + \sum_{j=1}^J (f^j, u^j)_{\Upsilon^j}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Столбец $\mathbf{u} \in \mathfrak{H}$ является стационарной точкой функционала (5.1) тогда и только тогда, когда этот столбец — решение задачи $(\star)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисляя вариацию формы (5.1) и применяя формулу Грина (4.6), обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \mathfrak{q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \mathfrak{q}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - \mathfrak{f}(\mathbf{v}) = \mathfrak{q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathfrak{f}(\mathbf{v}) \\ &= (L^0 u^0 - f^0, v^0)_\Omega + (N^0 u^0 - g^0, v^0)_{\partial\Omega} \\ &\quad + \sum_{j=1}^J \left\{ (L^j u^j - f^j, v^j)_{\Upsilon^j} - \langle (\mathbb{I}_d - \mathfrak{P}^j) \pi_-^j \mathbf{u}, \pi_+^j \mathbf{v} + \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j D^j(\pi^j \mathbf{v})(0) \rangle \right. \\ &\quad - \langle (\mathbb{I}_{d_0} - \mathfrak{p}^j) D^j(\pi^j \mathbf{u})(0), N^j(\pi^j \mathbf{v})(0) \rangle \\ &\quad + \langle \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j (\pi_-^j \mathbf{u})_\# + \mathfrak{p}^j N^j(\pi^j \mathbf{u})(0), D^j(\pi^j \mathbf{v})(0) \rangle \\ &\quad \left. - \langle \mathfrak{P}^j \pi_+^j \mathbf{u} - \mathfrak{S}^j \mathfrak{P}^j \pi_-^j \mathbf{u} - \mathfrak{P}^j \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j D^j(\pi^j \mathbf{u})(0), \pi_-^j \mathbf{v} \rangle \right\}. \quad (5.2) \end{aligned}$$

Итак, действительно вариация (5.2) вырождается на решении задачи (★). Если же она сама равна нулю, то возьмем «пробную функцию» $\mathbf{v}$ с компонентами $v^0 \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathbf{P})^n$ и $v^j \in C_0^\infty(\Upsilon^j)^T$. Так как проекции $\pi_\pm^j \mathbf{v}$ и $D^j(\pi^j \mathbf{v})(0)$, $N^j(\pi^j \mathbf{v})(0)$ нулевые, равенство $\delta\mathfrak{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ ввиду произвольности v^0 и v^j обеспечивает соотношения (2.6) и (2.8). При $\mathbf{v} \in \mathfrak{H}$ упомянутые проекции могут быть любыми столбцами в $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{R}^{d_0}$, а значит, из того же равенства вытекают условия сопряжения (4.5). $\square$

Обозначим через $\mathfrak{H}^0$ подпространство, составленное из столбцов, удовлетворяющих соотношениям (4.5)₂₋₄, которые не затрагивают проекции $\pi_+^1 \mathbf{u}, \dots, \pi_+^J \mathbf{u}$. Следовательно, $\mathcal{P}_\star := \mathcal{P} \times \{0\}^J \subset \mathfrak{H}^0$ и справедливо разложение

$$\mathfrak{H}^0 = \mathcal{P}_\star \dot{+} \mathfrak{H}_\perp^0, \quad (5.3)$$

где $\mathfrak{H}_\perp^0 = \{\mathbf{v} \in \mathfrak{H}^0 : \Pi(\hat{v}^0) = 0 \in \mathbb{R}^{d_0}\}$, Π — проекция (3.15), содержащая матрицу Грама Π_Ω , и $\hat{v}^0$ — регулярная часть компоненты v^0 , т. е. при $\mathbf{b}^j = \pi_-^j \mathbf{v}$

$$\hat{v}^0 = v^0 - \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^d \mathbf{b}_i^j \mathfrak{G}^{j,i}. \quad (5.4)$$

Кроме того, введем матрицы $\mathcal{G}^{j,m}$ и $\mathbf{G}^{j,m}$ размера $d \times d$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{j,m} &= [\langle \Pi_\Omega \Pi(\mathfrak{G}^{j,i}), \Pi(\mathfrak{G}^{j,i}) \rangle]_{i,k=1}^d, \\ \mathbf{G}^{j,m} &= (\mathbf{G}_1^{j,i}, \dots, \mathbf{G}_d^{j,m})^\top, \quad \mathbf{G}_i^{j,m} = \pi_+^m(\mathfrak{G}^{j,i}, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^{d_0}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Столбец $\mathbf{G}_i^{j,m}$ совпадает со столбцом $\mathbf{a}^m$ коэффициентов при полиномах $q^{m,k}$ в разложении (3.5) сингулярного решения $\mathfrak{G}^{j,i}$, и, следовательно, формула Грина (3.10), примененная к $\mathfrak{G}^{j,i}$ и $\mathfrak{G}^{m,k}$, устанавливает равенство $\mathbf{G}_{i,k}^{j,m} = \mathbf{G}_{k,i}^{m,j}$. Иными словами, матрица $\mathbf{G}$, имеющая размер $Jd \times Jd$ и составленная из блоков $\mathbf{G}^{j,m}$, оказывается симметрической. По определению (5.5)₁ тем же свойством обладает и аналогичная матрица $\mathcal{G}$; к тому же она неотрицательно определена. Далее под $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{P}$ подразумеваются блочно-диагональные матрицы $\text{diag}\{\mathfrak{S}^1, \dots, \mathfrak{S}^J\}$ и $\text{diag}\{\mathfrak{P}^1, \dots, \mathfrak{P}^J\}$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\mathbf{u} \in \mathfrak{H}$ — решение задачи $(\star)$ с правыми частями (3.5) и (2.12). Если оператор

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{S} + \mathcal{G} - \mathbf{G})\mathfrak{P}: \prod_{j=1}^J \mathfrak{P}^j \mathbb{R}^d \rightarrow \prod_{j=1}^J \mathfrak{P}^j \mathbb{R}^d \quad (5.6)$$

положительно определен, то в точке $\mathbf{u}$ функционал (5.1) достигает строгого минимума на множестве $\mathbf{u} + \mathfrak{H}_\perp^0 = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathfrak{H}_\perp^0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для решения $\mathbf{u} \in \mathfrak{H}$ вариация (5.2) вырождается, и поэтому

$$\frac{1}{2} \mathfrak{q}(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathfrak{f}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \left(\frac{1}{2} \mathfrak{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \mathfrak{f}(\mathbf{u}) \right) = \frac{1}{2} \mathfrak{q}(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Используя равенства (5.4), (4.5)₂₋₄ и интегрируя по частям (ср. (3.10), а также (2.5) и аналогичные формулы на отрезках Υ^j), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= (L^0 v^0, v^0)_\Omega + (N^0 v^0, v^0)_{\partial\Omega} \\ &\quad + \sum_{j=1}^J \{ (L^j v^j, v^j)_{\Upsilon^j} + \langle \mathfrak{S}^j \mathfrak{P}^j \mathbf{b}^j - \mathfrak{P}^j \mathbf{a}^j + \mathfrak{P}^j \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j D^j v^j(0), \mathbf{b}^j \rangle \} \\ &= (L^0 \hat{v}^0, \hat{v}^0)_\Omega + (N^0 \hat{v}^0, \hat{v}^0)_{\partial\Omega} + \left(\zeta_{\mathbf{p}} \sum_{\dots} \mathbf{b}_i^j \Pi(\mathfrak{S}^{j,i}), \sum_{\dots} \mathbf{b}_i^j \mathfrak{S}^{j,i} \right)_\Omega \\ &\quad + \left(L^0 \hat{v}^0, \sum_{\dots} \mathbf{b}_i^j \mathfrak{S}^{j,i} \right)_\Omega + \left(N^0 \hat{v}^0, \sum_{\dots} \mathbf{b}_i^j \mathfrak{S}^{j,i} \right)_{\partial\Omega} \\ &\quad + \sum_{j=1}^J \{ (L^j v^j, v^j)_{\Upsilon^j} + \langle \mathfrak{S}^j \mathfrak{P}^j \mathbf{b}^j - \mathfrak{P}^j \mathbf{a}^j + \mathfrak{P}^j \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j D^j v^j(0), \mathbf{b}^j \rangle \} \\ &= (A^0 D^0 \hat{v}^0, D^0 \hat{v}^0)_\Omega + \sum_{j=1}^J \left(\langle \hat{\mathbf{a}}^j, \mathbf{b}^j \rangle + \sum_{m=1}^J \langle \mathcal{G}^{j,m} \mathbf{b}^j, \mathbf{b}^m \rangle \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^J \{ (A^j \mathscr{D} v^j, \mathscr{D} v^j)_{\Upsilon^j} + \langle (N^j v^j(0), D^j v^j(0)) \\ &\quad \quad + \langle \mathfrak{S}^j \mathfrak{P}^j \mathbf{b}^j - \mathfrak{P}^j \mathbf{a}^j + \mathfrak{P}^j \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j D^j v^j(0), \mathfrak{P}^j \mathbf{b}^j \rangle \} \\ &= (A^0 D^0 \hat{v}^0, D^0 \hat{v}^0)_\Omega + \sum_{j=1}^J \left\{ (A^j \mathscr{D} v^j, \mathscr{D} v^j)_{\Upsilon^j} \right. \\ &\quad \quad \left. + \sum_{m=1}^J \langle \{ \delta_{j,m} \mathfrak{S}^j + \mathcal{G}^{j,m} - \mathbf{G}^{j,m} \} \mathfrak{P}^j \mathbf{b}^j, \mathfrak{P}^m \mathbf{b}^m \rangle \right\}. \quad (5.7) \end{aligned}$$

При этом $\hat{\mathbf{a}}^j = \pi_+^j(\hat{v}^0, 0, \dots, 0)^\top$, а в конце учтено, что в согласии с (4.5)₄

$$\begin{aligned} \pi_+^j \mathbf{v} &= \mathbf{a}^j = \hat{\mathbf{a}}^j + \sum_{m=1}^J \mathbf{G}^{m,j} \mathbf{b}^m, \\ \langle N^j v^j(0), D^j v^j(0) \rangle &= \langle D^j v^j(0), \mathfrak{p}^j N^j v^j(0) \rangle \\ &= -\langle D^j v^j(0), \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j \mathbf{b}_{\#}^j \rangle = -\langle \mathfrak{s}^j \mathfrak{p}^j D^j v^j(0), \mathfrak{p}^j \mathbf{b}^j \rangle. \end{aligned}$$

При положительно определенном операторе (5.6) выражение (5.7) не может быть отрицательным; если оно обращается в нуль, то $\mathfrak{P}^j \mathbf{b}^j = 0$, $D^0 \hat{v}^0 = 0$ и $D^j v^j(0) = 0$, а значит, в силу (4.5)₃, (2.3), (2.10) и равенства $\Pi(\hat{v}^0) = 0$ имеем $\mathbf{b}^j = 0$, $\hat{v}^0 = 0$ и $v^j(0) = 0$, т. е. $\mathbf{v} = 0$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Если изменить задачу (2.6) на теле Ω , сделав ее однозначно разрешимой в $H^2(\Omega)^n$, например, за счет постановки условия Дирихле на компоненте связности Γ границы $\partial\Omega$ (при этом $\Gamma \cap \mathbf{P} = \emptyset$), то проекция (3.15) вырождается и упомянутый в теореме 5.1 строгий минимум будет достигаться на всем пространстве $\mathfrak{H}^0$.

§6. Самосопряженные расширения

В этом параграфе краевое условие Неймана (2.6)₂ считаем однородным. Пусть $\mathcal{A}_0^0$ — неограниченный оператор в $L_2(\Omega)^n$ с дифференциальным выражением (2.1) и областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0^0) = \{u^0 \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \setminus \mathbf{P})^n : N^0 u^0 = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$. Следующее утверждение известно (см. [20] и др.), а его формулировку, апеллирующую к весовым классам, можно найти в [21].

ЛЕММА 6.1. *Замыкание $\mathcal{A}_0 = \overline{\mathcal{A}_0^0}$ и сопряженный оператор $\mathcal{A}_0^*$ заданы тем же дифференциальным выражением, что и $\mathcal{A}_0^0$, но обладают такими областями определения:*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \{u^0 \in V_0^2(\Omega)^n : N^0 u^0 = 0 \text{ на } \partial\Omega\},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0^*) = \{u^0 \in V_2^2(\Omega)^n : N^0 u^0 = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

$$u^0 \text{ имеет вид (3.13) с } \hat{u}^0 \in V_1^2(\Omega)^n, \mathbf{b}^j \in \mathbb{R}^n\}.$$

Матрица (2.9) содержит дифференциальные операторы второго порядка в том случае, когда $\mathcal{P} = \mathbb{R}^n$, а значит, $T = n$ и $\varkappa = 0$. Нетрудно проверить, что оператор $\mathcal{A}^j$ с дифференциальным выражением $L^j(z, \partial_z) = -\partial_z A^j(z) \partial_z$ и областью определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_j) = \{u^j \in H^2(\Upsilon^j)^n : u^j(0) = \partial_z u^j(0) = u^j(l_j) = 0\} \subset L_2(\Upsilon^j)^n$$

является замкнутым, а для его сопряженного $\mathcal{A}_j^*$ имеет место равенство $\mathcal{D}(\mathcal{A}_j^*) = \mathring{\mathcal{H}}^1(\Upsilon^j)$ (см. замечание 3.1 и формулу (2.13)). Таким образом, область определения оператора $\mathcal{A}^* = (\mathcal{A}_0^*, \mathcal{A}_1^*, \dots, \mathcal{A}_J^*)$, сопряженного с оператором $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_J)$, совпадает с пространством (4.1).

В рассматриваемой ситуации условия сопряжения упрощаются, поскольку $d = d_0$, представления (3.6) и (3.13) неразличимы и оба проектора $\mathfrak{P}^j$ и $\mathfrak{p}^j$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обобщенная формула Грина (4.6) обеспечивает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Сужение $\mathcal{A}_j^*$ на подпространство столбцов $\mathbf{u}^j \in \mathfrak{H}$, подчиненных условиям сопряжения (4.5), является самосопряженным расширением оператора $\mathcal{A}$.*

Если взять $\mathfrak{P}^1 = \dots = \mathfrak{P}^J = 0$, т. е. устранить условие (4.5)₁, превратить (4.5)₃ в $\pi_-^j \mathbf{u} = 0$ и тем самым перейти к «классическому» решению (2.14), то оставшиеся условия (4.5)_{2,4} вместе с (2.10) породят смешанные краевые задачи для систем (2.8), никак не взаимодействующие с задачей (2.6). Предложение 6.1

не описывает¹⁾ все возможные расширения оператора $\mathcal{A}$, например, из-за того, что условия (4.5) отвергают «дальнодействие», при котором векторы u^j и u^k для $j \neq k$ связываются напрямую. Тем не менее можно проверить, что для самосопряженного расширения с областью определения, содержащейся в пространстве $\mathbf{H}$ из (2.14), компонента $\mathcal{A}_0$ оператора $\mathcal{A}$ расширяется по Фридрихсу, что отрицает какое-либо взаимодействие тела Ω с отростками Υ^j .

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. В случае произвольного линейного полинома (2.4) применение самосопряженных расширений усложняется. Во-первых, при $\kappa \geq 1$ пространство $\mathfrak{D}$ не вкладывается в $L_2(\Omega)^n$, однако можно воспользоваться подходом, развитым в [21] и имеющим дело с расширениями *симметрических* операторов $\mathfrak{r}^{-2\beta} L^o$ в весовых классах $V_\beta^0(\Omega)^n$. Во-вторых, при различающихся порядках $t_j + t_k$ элементов матричного дифференциального оператора (2.9), эллиптического в смысле Дуглиса–Ниренберга, замыкание в $L_2(\Upsilon)^T$ производится просто лишь при блочно-диагональной матрице A^j (см. пример 2.1(1)) и распадении (2.8) на несколько систем, эллиптических по Петровскому. Впрочем, существуют ситуации, в которых возможен переход к краевой задаче для интегро-дифференциального оператора $H^2(\Upsilon)^\tau \rightarrow L_2(\Upsilon)^\tau$ (подобное сведение систематически применялось в [14] при изучении спектральных задач в теории стержней). Предположим, что $\mathfrak{P}^j$ проецирует на подпространство $\mathbb{R}^\tau$ столбцов коэффициентов $\mathbf{a}_i^j$ при постоянных $p_{(j)}^{1,0}, \dots, p_{(j)}^{\tau,0}$ из базиса $\{p_{(j)}^{k,i}\}$, для которых $t_1 = \dots = t_\tau = 1$. Пусть и оператор $\mathbf{s}^j \mathbf{p}^j$ действует из $\mathbb{R}^{d_0}$ в $\mathbb{R}^\tau$. Тогда при помощи (4.5)₂ и (4.5)₁ определяются все граничные данные в точке $z^j = 0$ для компонент u_k^j , которым отвечают порядки $t_k \geq 2$, и, следовательно, эти компоненты можно исключить из системы (2.8).

§7. Интерпретации

Обсудим две задачи математической физики, упомянутые в примере 2.1. Обозначим через $\omega^j \subset \mathbb{R}^2$ области, ограниченные простыми гладкими контурами $\partial\omega^j$, и введем тонкие цилиндры

$$Q^j \varepsilon = \{x : \eta^j := \varepsilon^{-1} y^j = (\varepsilon^{-1} y_1^j, \varepsilon^{-1} y_2^j) \in \omega^j, z^j \in (-\varepsilon \lambda_j, l_j)\}, \quad j = 1, \dots, J,$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ — малый параметр, $\varepsilon_0 > 0$, и y^j — декартовы координаты в плоскостях, перпендикулярных лучу Λ^j . Для простоты предполагаем, что область Ω выпуклая, лучи Λ^j трансверсальны ее границе, а размер $\lambda_j > 0$ выбран так, чтобы при $z = -\varepsilon \lambda_j$ сечение $\omega_\varepsilon^j(z) = \{x : \eta^j \in \omega^j, z^j = z\}$ лежало внутри Ω . На сочленении $\Omega(\varepsilon)$ тела Ω со стержнями $G_\varepsilon^j = Q_\varepsilon^j \setminus \bar{\Omega}$ рассмотрим сначала смешанную краевую задачу с оператором Лапласа Δ_x

$$\begin{aligned} -\Delta_x U^0 &= F^0 \quad \text{в } \Omega, & -\mu \Delta_x U^j &= F^j \quad \text{в } G_\varepsilon^j, \\ U^0 &= U^j, \quad \partial_\nu U^0 = \mu \partial_\nu U^j & \text{на } \Gamma_\varepsilon^j = Q_\varepsilon^j \cap \partial\Omega, \\ \partial_\nu U &:= \nu^\top \nabla_x U = 0 & \text{на } \partial\Omega(\varepsilon) \setminus (\Gamma_\varepsilon^1 \cup \dots \cup \Gamma_\varepsilon^J), \\ U^j &= 0 & \text{на } \omega_\varepsilon^j(l_j), \quad j = 1, \dots, J. \end{aligned} \tag{7.1}$$

¹⁾ Это нетрудно сделать на основе общих результатов [20, 22, 23].

Параметр $\mu > 0$, большой или малый, соотнесем с «толщиной» стержней ε :

$$\mu = \mu_0 \varepsilon^s, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (7.2)$$

В соответствии с [10] (см. также [9, 25] для случая $\mu = 1$) согласованные асимптотические анзацы для сужений F^q и U^q правой части F и решения U выглядят так:

$$\begin{aligned} F^0(x) &= f^0(x), & F^j(\varepsilon, x) &= \varepsilon^{s+s_j} \{(\text{mes}_2 \omega_j)^{-1} f^j(z^j) + f_\perp^j(\eta^j, z^j)\}, \\ U^0(\varepsilon, x) &\sim \varepsilon^{s_0} c^0 + u_\perp^0(x) + \dots, & U^j(\varepsilon, x) &\sim \varepsilon^{s_j} u^j(z^j) + \dots, \end{aligned} \quad (7.3)$$

где $s_0 = -1 - (1+s)_+$, $s_j = -1 - s/2$ и

$$t_+ = \frac{1}{2}(t + |t|), \quad \int_{\omega_j} f_\perp^j(\eta^j, z^j) d\eta^j = 0, \quad \int_{\Omega} u_\perp^0(x) dx = 0. \quad (7.4)$$

Показатель s_j подобран так, чтобы интеграл Дирихле, вычисленный на стержне по анзацу из (7.3)₂, имел порядок $\varepsilon^0 = 1$. Из-за того что предельная задача Неймана в Ω не является однозначно разрешимой, в (7.3)₂ присутствует большой множитель ε^{s_0} при постоянной c^0 и составляющая $u_\perp^0$, а значит, и сумма $u^0 = \varepsilon^{s_0} c^0 + u_\perp^0$ обладают сингулярностями в точках P^j (см. [10] и [9, 11]). Подставив (7.3) в (7.1)_{1,3,4}, обнаруживаем, что компоненты столбца $\mathbf{u} = (u^0, u^1, \dots, u^J)^\top$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} -\Delta_x u^0(x) &= f^0(x), & x \in \Omega, & \partial_\nu u^0 = 0, & x \in \partial\Omega \setminus \mathbf{P}, \\ -\mu_0 \text{mes}_2 \omega_j \partial_{z_j}^2 u^j(z^j) &= f^j(z^j), & z^j \in \Upsilon^j, & u^j(l_j) = 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Подчеркнем, что постоянное слагаемое исчезает из (7.5)₁. Справедливо представление (3.13), где $\mathbf{b}^j = \pi_-^j \mathbf{u} \in \mathbb{R}$, а $\mathfrak{G}^j$ — обобщенная функция Грина [19], т. е. имеющее нулевое среднее решение задачи

$$-\Delta_x \mathfrak{G}^j(x) = -(\text{mes}_3 \Omega)^{-1}, \quad x \in \Omega, \quad \partial_\nu \mathfrak{G}^j(x) = \delta(x - P^j), \quad x \in \partial\Omega.$$

Сингулярностей $(2\pi r_j)^{-1} \mathbf{b}^j$ у решения исходной задачи (7.1) нет, и поэтому в зонах присоединения стержней к телу возникает явление пограничного слоя, описываемое в растянутых координатах η^j и $\zeta^j = \varepsilon^{-1} z^j$ при помощи решений задач в полупространстве $\mathbb{R}_{j-}^3 = \{\xi^j = (\eta^j, \zeta^j) : \nu(P^j)^\top \xi^j < 0\}$, в усеченном цилиндре $Q_+^j = \{\xi^j \in \omega^j \times \mathbb{R} : \nu(P^j)^\top \xi^j < 0\}$ или на их объединении (подробности см. в [9–11]). Далее потребуется только гармонический емкостной потенциал $Y^j(\xi) = \mathbf{c}_j(4\pi|\xi^j|)^{-1} + O(|\xi^j|^{-2})$ для диска $B^j = \partial\mathbb{R}_{j-}^3 \cap \partial Q_+^j$ в $\mathbb{R}^3$ и соответствующая емкость $(4\pi)^{-1} \mathbf{c}_j > 0$.

В качестве асимптотики решения $U^0(\varepsilon, x)$ вблизи точки P^j берется сумма $\mathbf{a}^j + 2\mathbf{b}^j \mathbf{c}_j^{-1} \varepsilon^{-1} Y^j(\xi)$, принимающая значение $\mathbf{a}^j + 2\mathbf{b}^j \mathbf{c}_j^{-1} \varepsilon^{-1}$ на Γ_ε^j ; здесь $\mathbf{a}^j = \pi_+^j \mathbf{u}$. Сравнивая это значение с анзацем (7.3)₂ для $U^j(\varepsilon, x)$, выводим первое условие сопряжения

$$\pi_+^j \mathbf{u} + 2\mathbf{c}_j^{-1} \varepsilon^{-1} \pi_-^j \mathbf{u} = \varepsilon^{s_j} (\pi^j \mathbf{u})(0). \quad (7.6)$$

Второе условие сопряжения получается в результате вычисления потоков через поверхность Γ_ε^j и принимает вид $\mathbf{b}^j = \mu_0 \varepsilon^s \text{mes}_2 \omega_\varepsilon^j \varepsilon^{s_j} \partial_{z_j} u^j(0)$, т. е. в соответствии с (7.5)₂

$$\varepsilon^{s_j} \pi_-^j \mathbf{u} = N^j(\partial_{z_j})(\pi^j \mathbf{u})(0). \quad (7.7)$$

Если положить $\mathfrak{P}^j = \mathfrak{p}^j = \mathbb{I}$, $\mathfrak{S}^j = \mathfrak{c}_j^{-1}\varepsilon^{-1}$ и $\mathfrak{s}^j = \varepsilon^{\mathfrak{s}j}$, то соотношения (4.5) превратятся в (7.6), (7.7). Само по себе такое наблюдение малоинтересно, однако можно убедиться в том, что на всем диапазоне изменения параметра s (или μ) решение задачи (7.5)–(7.7) дает приемлемую аппроксимацию решения задачи (7.1). А именно, повторив с некоторыми изменениями проверку оценок асимптотических остатков в [10], приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $f^0 \in L^2(\Omega)$, $f^j \in L^2(\Upsilon^j)$, а для $f_\perp^j \in L^2(\omega^j \times \Upsilon^j)$ выполняется условие ортогональности из (7.4). Тогда решения $U \in H^1(\Omega(\varepsilon))$ и $\mathbf{u} \in \mathfrak{H}$ задач (7.1) и (7.5)–(7.7) связаны соотношением

$$\varepsilon^{-s_0/2} |\overline{U}^0 - \overline{u}^0| + \|(U^0 - \overline{U}^0) - (u^0 - \overline{u}^0); V_1^1(\Omega)\| + \varepsilon^{s/2} \sum_{j=1}^J \|U^j - \varepsilon^{\mathfrak{s}j} u^j; H^1(G_\varepsilon^j)\| \leq c\varepsilon^{(1+s_0)/2} \mathcal{N}(\varepsilon), \quad (7.8)$$

где чертой обозначено среднее по Ω , постоянная c не зависит от параметров $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $s \in \mathbb{R}$ и правых частей (7.3)₁, а $\mathcal{N}(\varepsilon)$ — сумма норм функций f^0 , $\varepsilon^{s+\mathfrak{s}j} f^j$ и $\varepsilon^{s+\mathfrak{s}j} f_\perp^j$ в указанных пространствах.

Задача (7.5)–(7.7) по-прежнему содержит малый параметр ε , однако ее следует интерпретировать как *регулярно возмущенную*. Построение асимптотики ее решения, которое разлагается в *сходящийся* ряд, несложно. В частности, простейший анализ условий сопряжения (7.6), (7.7) показывает, что главный член асимптотики, составляющей u^0 , имеет вид (7.3)₂.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Если $s \geq 0$, то среди предельных задач для (7.1) (см. [10]) нет смешанной краевой задачи в полупространстве $\mathbb{R}_{j-}^3$ с условиями Дирихле на диске B^j и условиями Неймана на $\partial\mathbb{R}_{j-}^3 \setminus \overline{B}^j$, т.е. емкостной потенциал Y^j и емкость $(4\pi)^{-1}\mathfrak{c}_j$ не фигурируют в асимптотике. Однако оказывается, что погрешности одномерной модели (7.5)₂ стержня больше, чем невязка, привносимая потенциалом, и поэтому слагаемое $2\mathfrak{c}_j^{-1}\varepsilon^{-1}\pi_-^j \mathbf{u}$ можно оставить в (7.6) и при $s \geq 0$. Подчеркнем, что величина $2\mathbf{b}^j \mathfrak{c}_j^{-1}\varepsilon^{-1}Y^j(\xi^j)$ отсутствует в левой части неравенства (7.8) из-за весовых множителей в $V_1^1(\Omega)$ -норме, малых около точек P^j (см. (3.1)).

Аналогичное моделирование можно провести и для задачи теории упругости, упомянутой в примере 2.1(1). Ограничимся несколькими замечаниями, поскольку соответствующий анализ становится более громоздким из-за увеличения размерности линейала $\mathscr{P}$, которая влечет за собой усложнение строения базиса (4.4):

$$p_{(j)}^{k,0} = e_k^{(j)}, \quad p_{(j)}^{k,1} = z^j e_k^{(j)} \quad (k = 1, 2), \quad p_{(j)}^{3,0} = e_3^{(j)}, \quad p_{(j)}^{4,0} = y_2^j e_1^{(j)} - y_1^j e_2^{(j)}, \quad (7.9)$$

и структуры асимптотического анзаца на стержнях (см. [12, 14, 28]):

$$U^j(\varepsilon, x) \sim \varepsilon^{\mathfrak{s}j} \sum_{j=1}^J \varepsilon^{t_k} \sum_{i=0}^{t_k-1} \varepsilon^i p_{(j)}^{k,i}(\eta^j, 0) \frac{1}{i!} \partial_{z^j}^i u_k^j(z^j). \quad (7.10)$$

Здесь $e_k^{(j)}$ и $e_3^{(j)}$ — орты осей y_k^j и z^j . Поперечные смещения $u_1^j(z^j)$, $u_2^j(z^j)$ и продольное смещение $u_3^j(z^j)$, а также закручивание стержня $u_4^j(z^j)$ входят в

правую часть соотношения (7.10) с разными множителями $\varepsilon^{\mathbf{s}_j-2}$ и $\varepsilon^{\mathbf{s}_j-1}$ соответственно, что отражает житейски очевидный факт: упругий стержень легче изогнуть, чем растянуть или скрутить. Поэтому в механике выделяются конструкции, в которых стержневые элементы «работают только на растяжение». Для условий (4.5) это означает, что $\mathfrak{P}^j$ и $\mathbf{p}^j$ проецируют на подпространства столбцов $\mathbf{a}^j$, у которых ненулевым может быть только коэффициент $\mathbf{a}_3^j$ при полиноме $p_{(j)}^{3,0} = e_3^{(j)}$ (см. (4.4)). В силу следствия 4.1 обоснованное требование однозначной разрешимости задачи с подобными условиями сопряжения формулируется так:

3° линейная оболочка столбцов $\mathbf{p}(P^j)^\top \nu(p^j)$, $j = 1, \dots, J$, совпадает с $\mathbb{R}^6$.

Другая характерная конфигурация стержней связана с возможностью игнорировать передачу поворотов от тела стержням — проекторы $\mathfrak{P}^j$ и $\mathbf{p}^j$ действуют в подпространство столбцов с элементами $\mathbf{a}_k^j = 0$ при $k \neq 1, 3, 5$ (исключительными являются жесткие поступательные смещения; ср. (7.9) с (4.4)). Теперь необходимые условия из следствия 4.1 равносильны тому, что

4° линейная оболочка столбцов $\mathbf{p}(P^1)^\top \dots \mathbf{p}(P^J)^\top$ совпадает с $\mathbb{R}^6$.

В 3° возникает ограничение $J \geq 6$, а в 4° — ограничение $J \geq 3$; если $J < 3$, упрощенные модели не годятся. Требования 3° и 4° уже возникали в [24] при выводе асимптотически точных неравенств Корна, а в [11, 26, 27] — при асимптотическом анализе упругих сочленений, и в обоих случаях обеспечивали специфические свойства исследуемых объектов.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Как установлено в [12, 28], структура (7.10) начальных членов асимптотики сохраняется и для общих эллиптических задач с полиномиальным свойством на тонких областях. Разложение функций u_k^j в ряды Маклорена формирует справа в (7.10) полиномы $p_{(j)}^{k,i}(y^j, z^j)$, фигурирующие в представлении (3.6) для u^0 . Иными словами, условия сопряжения (4.5)_{1,4} обеспечивают сращивание асимптотических разложений на теле и стержнях, а операторы $\mathfrak{S}^j$ и $\mathbf{S}^j$ служат для выравнивания порядков относительно ε и учета эффектов пограничного слоя. Условия сопряжения (4.5)_{2,3}, парные для (4.5)_{1,4} ввиду обобщенной формулы Грина, выражают равенство потоков разнообразных физических полей через поверхность соединения Γ_ε^j .

ЛИТЕРАТУРА

1. Lumer G. Connecting of local operators and evolution equation on network. In: Lect. Notes in Math., Vol. 787, Springer-Verlag, 1980, pp. 219–234.
2. Павлов Б. С., Фаддеев М. Д. Модель свободных электронов и теория рассеяния. Теорет. и матем. физика, **55**, №2, 257–269 (1983).
3. Roth J. P. Le spectre du laplacien sur un graphe. In: Lect. Notes in Math., Vol. 1096, Springer-Verlag, 1984, pp. 521–539.
4. Пенкин О. М., Покорный Ю. В. О некоторых качественных свойствах уравнений на одномерном клеточном комплексе. Матем. заметки, **64**, №5, 777–780 (1996).
5. Naimark K., Solomyak M. Eigenvalue estimates for the weighted laplacian on metric trees. Proc. Lond. Math. Soc., **80**, No. 3, 690–724 (2000).
6. Жиков В. В. Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах. Изв. РАН, сер. матем., **66**, №2, 81–148 (2002).

7. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Обобщенная формула Грина для эллиптических задач в областях с ребрами. Проблемы матем. анализа, вып. 13, Изд-во СПбГУ, СПб, 1992, с. 106–147.
8. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. Наука, М., 1991; English transl.: *Nazarov S. A., Plamenevsky B. A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries.* Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1994.
9. Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B. Asymptotic analysis of a mixed boundary value problem in a multistructure. *Asymptotic Analysis*, **8**, 105–143 (1994).
10. Назаров С. А. Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. 1. Труды семинара им. И. Г. Петровского, вып. 18, Изд-во МГУ, М., 1995, с. 3–78; 2. *ibid*, вып. 20, Изд-во МГУ, М., 1997, с. 155–195.
11. Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B. Asymptotic analysis of fields in multi-structures. Clarendon Press, Oxford, 1999.
12. Назаров С. А. Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов. УМН, **54**, вып. 5, 77–142 (1999).
13. Nečas J. Les méthodes directes in théorie des équations elliptiques. Masson-Academia, Paris–Prague, 1967.
14. Назаров С. А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Научная книга, Новосибирск, 2002.
15. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. Труды ММО, **16**, 219–292 (1963).
16. Маз'я В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками. *Math. Nachr.*, **76**, 29–60 (1977).
17. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи с условиями излучения на ребрах границы. Матем. сб., **183**, вып. 10, 13–44 (1992).
18. Pazy A. Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **24**, No. 2, 193–218 (1967).
19. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 2. Наука, М., 1967.
20. Павлов Б. С. Теория расширений и явно решаемые модели. УМН, **42**, вып. 6, 99–132 (1987).
21. Назаров С. А. Самосопряженные расширения оператора задачи Дирихле в весовых функциональных пространствах. Матем. сб., **137**, вып. 2, 224–241 (1988).
22. Рофе-Бекетов Ф. С. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций. ДАН СССР, **184**, 1034–1037 (1969).
23. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Наукова думка, Киев, 1984.
24. Nazarov S. A. Korn's inequalities for junctions of spatial bodies and thin rods. *Math. Methods Appl. Sci.*, **20**, No. 3, 219–243 (1997).
25. Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B. Asymptotic representation of elastic fields in a multi-structure. *Asymptotic Analysis*, **11**, 343–415 (1995).
26. Назаров С. А. Асимптотика решений задачи теории упругости для трехмерного тела с тонкими отростками. Докл. РАН, **352**, No. 4, 458–461 (1997).
27. Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B. Fields in non-degenerate 1D-3D elastic multi-structures. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **54**, 177–212 (2001).
28. Назаров С. А. Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких. Алгебра и анализ, **7**, вып. 5, 1–92 (1995).