Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Седых, Полная система линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей коранга 1 фронта общего положения, *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 4, 73–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:11:48

Полная система линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей коранга 1 фронта общего положения*

© 2004. В. Д. СЕДЫХ

1. Введение. Рассмотрим фронт $\mathcal{F}$ общего положения в C^∞ -гладком n -мерном многообразии V . Это особая гиперповерхность, являющаяся образом (собственного) лежандрова отображения $f: L \rightarrow V$ гладкого $(n-1)$ -мерного многообразия L . Образ каждой связной компоненты многообразия L называется *неприводимой компонентой* фронта $\mathcal{F}$. Фронт $\mathcal{F}$ связного многообразия L называется *неприводимым*.

Если лежандрово отображение f устойчиво и размерность ядра его первого дифференциала ни в одной точке не превосходит 1, то фронт $\mathcal{F}$ называется *устойчивым фронтом коранга 1*. Особенности (ростки) такого фронта классифицируются по элементам $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ свободной абелевой полугруппы по сложению с образующими $A_1, A_2, \dots$ (см. [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Фронт $\mathcal{F}$ имеет *особенность* типа A_μ в точке x , если его росток $(\mathcal{F}, x)$ в этой точке диффеоморфен ростку в нуле гиперповерхности в $\mathbb{R}^n = \{(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})\}$, образованной точками, в которых многочлен

$$t^{\mu+1} + \lambda_{\mu-1}t^{\mu-1} + \dots + \lambda_1t + \lambda_0$$

имеет кратный вещественный корень.

Множество особенностей типа A_μ фронта $\mathcal{F}$ (т.е. множество точек, в которых $\mathcal{F}$ имеет особенность этого типа) является гладким подмногообразием коразмерности μ в V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Фронт $\mathcal{F}$ имеет *особенность типа* $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ в точке x , если росток $(\mathcal{F}, x)$ состоит из m неприводимых компонент, которые имеют (как ростки фронтов) особенности типов $A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_m}$ в точке x , причем ростки многообразий особенностей этих типов на соответствующих компонентах пересекаются в точке x трансверсально.

Числа $\mu_1, \dots, \mu_m$ называются *кратностями* особенности типа $\mathcal{A}$. Их сумма $\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_m$ называется *коразмерностью* этой особенности. Коразмерность особенности не превышает размерности n объемлющего многообразия V . Точки фронта $\mathcal{F}$, в которых он имеет особенность типа $\mathcal{A}$, образуют гладкое (вообще говоря, незамкнутое) подмногообразие $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ коразмерности $\text{codim } \mathcal{A}$ в V . Топологическую эйлерову характеристику этого многообразия мы будем обозначать через $\chi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}})$.

*Работа частично поддержана грантами РФФИ-02-01-00655 и НШ-1972.2003.1.

ТЕОРЕМА 1 [4]. Пусть $\mathcal{F}$ — компактный устойчивый фронт коранга 1 в гладком n -мерном многообразии V . Тогда для любого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$, такого, что многообразие $\mathcal{A}\mathcal{F}$ особенностей типа $\mathcal{A}$ фронта $\mathcal{F}$ имеет нечетную размерность, эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{A}\mathcal{F})$ многообразия $\mathcal{A}\mathcal{F}$ является линейной комбинацией,

$$\chi(\mathcal{A}\mathcal{F}) = \sum_X K_{\mathcal{A}}(X) \chi(X_{\mathcal{F}}), \quad (*)$$

эйлеровых характеристик $\chi(X_{\mathcal{F}})$ четномерных многообразий $X_{\mathcal{F}}$ особенностей типов X фронта $\mathcal{F}$, где $\text{codim } X > \text{codim } \mathcal{A}$. Эта комбинация универсальна в том смысле, что каждый ее коэффициент $K_{\mathcal{A}}(X)$ зависит только от $\mathcal{A}$ и X и не зависит от n , V и $\mathcal{F}$.

Например, для особенностей коразмерности 2 (их всего две) соответствующие формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \chi(2A_1) &= 3\chi(3A_1) + \chi(A_2 + A_1) + \frac{1}{2}\chi(A_3) - 20\chi(5A_1) \\ &\quad - 9\chi(A_2 + 3A_1) - 4\chi(2A_2 + A_1) - \frac{11}{2}\chi(A_3 + 2A_1) \\ &\quad - \frac{5}{2}\chi(A_3 + A_2) - \frac{7}{2}\chi(A_4 + A_1) - 2\chi(A_5) + \dots, \\ \chi(A_2) &= \chi(A_2 + A_1) + \chi(A_3) - 2\chi(A_2 + 3A_1) - 2\chi(2A_2 + A_1) \\ &\quad - 2\chi(A_3 + 2A_1) - \frac{3}{2}\chi(A_3 + A_2) - 2\chi(A_4 + A_1) - 2\chi(A_5) + \dots \end{aligned}$$

Здесь n нечетное, индекс $\mathcal{F}$ в обозначениях эйлеровых характеристик соответствующих многообразий опущен (для простоты), а многоточие обозначает линейную комбинацию эйлеровых характеристик многообразий $X_{\mathcal{F}}$ особенностей типов X нечетных коразмерностей, начиная с 7-й.

Работа [4] доставляет простой комбинаторный алгоритм для вычисления всех соотношений вида (*) в любой размерности n . Ниже доказано, что в условиях теоремы 1 не существует универсальных линейных соотношений (с вещественными коэффициентами) между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей фронта $\mathcal{F}$, которые не были бы линейными комбинациями соотношений (*).

2. Формулировка результата. Составим список $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N$ классов особенностей типов $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$, которые могут быть у фронтов в гладком n -мерном многообразии и коразмерность которых сравнима с n по модулю 2 (многообразия таких особенностей имеют четную размерность). Каждому компактному устойчивому фронту $\mathcal{F}$ коранга 1 в $\mathbb{R}^n$ сопоставим вектор

$$v(\mathcal{F}) = (\chi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^1), \dots, \chi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^N)) \in \mathbb{R}^N$$

из эйлеровых характеристик $\chi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^i)$ многообразий $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^i$ особенностей типов $\mathcal{A}^i$, $i = 1, \dots, N$.

Пусть G — подмножество в $\mathbb{R}^N$, образованное векторами $v(\mathcal{F})$ для всех фронтов $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^n$ указанного типа. Подмножество в G , образованное векторами $v(\mathcal{F})$ для неприводимых фронтов $\mathcal{F}$, обозначим через G_0 .

ТЕОРЕМА 2. Множество G содержит полугруппу с N линейно независимыми образующими. Если $n > 1$, то это верно и для множества G_0 .

Отсюда следует, что теорема 1 описывает полную систему универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей компактных устойчивых фронтов коранга 1. Это означает следующее.

Предположим, что список всех классов особенностей типов $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$, которые могут быть у $(n-1)$ -мерных фронтов, состоит из p элементов. Рассмотрим подмножество в $\mathbb{R}^p$, образованное (упорядоченными) наборами эйлеровых характеристик $\chi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}})$ многообразий $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей типов $\mathcal{A}$ из этого списка у компактных устойчивых фронтов $\mathcal{F}$ коранга 1 в n -мерном пространстве. Тогда система соотношений вида (*) задает минимальное аффинное подпространство в $\mathbb{R}^p$, содержащее указанное подмножество.

ЗАМЕЧАНИЕ. Эйлеровы характеристики многообразий особенностей фронта ограничены также условиями типа неравенства, четности и т. п. (см. [3]). Однако мы не знаем всех этих условий.

3. Вспомогательные утверждения. Прежде чем доказывать теорему 2, мы построим некоторые специальные фронты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{F}$ — компактный устойчивый фронт коранга 1 в $\mathbb{R}^n$, где $n > 1$. Предположим, что этот фронт имеет ровно k неприводимых компонент. Тогда существует неприводимый компактный устойчивый фронт $\tilde{\mathcal{F}}$ коранга 1 в $\mathbb{R}^n$, такой, что

- (1) многообразие $\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{F}}}$ особенностей типа $\mathcal{A}$ фронта $\tilde{\mathcal{F}}$ совпадает с многообразием $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей типа $\mathcal{A}$ фронта $\mathcal{F}$ для любого $\mathcal{A} \neq A_1$;
- (2) эйлерова характеристика многообразия $(A_1)_{\tilde{\mathcal{F}}}$ особенностей типа A_1 фронта $\tilde{\mathcal{F}}$ меньше эйлеровой характеристики многообразия $(A_1)_{\mathcal{F}}$ особенностей типа A_1 фронта $\mathcal{F}$ на $k-1$ эйлеровых характеристик $(n-1)$ -мерной сферы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим C^∞ -вложенную кривую $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, которая пересекает все неприводимые компоненты фронта $\mathcal{F}$, причем только в его гладких точках и только трансверсально ($\gamma(a), \gamma(b) \notin \mathcal{F}$). Нумерация моментов $t \in (a, b)$ первого пересечения кривой γ с неприводимыми компонентами фронта $\mathcal{F}$ в порядке их возрастания определяет нумерацию $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ этих компонент.

Зафиксируем эту нумерацию. Тогда в последовательности точек пересечения кривой γ с фронтом $\mathcal{F}$ можно выбрать подпоследовательность $x_1, x_2^1, x_2^2, \dots, x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, x_k$, такую, что

$$x_1 \in \mathcal{F}_1, \quad x_k \in \mathcal{F}_k, \quad x_i^1 \in \mathcal{F}_i, \quad x_i^2 \in \bigcup_{j=1}^i \mathcal{F}_j, \quad i = 2, \dots, k-1,$$

а открытые дуги $(x_1, x_2^1), (x_2^2, x_3^1), \dots, (x_{k-2}^2, x_{k-1}^1), (x_{k-1}^2, x_k)$ кривой γ с концами в указанных точках не пересекают $\mathcal{F}$.

Отсюда следует, что существуют C^∞ -вложенные кривые $\gamma_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k-1$, такие, что

- (1) каждая кривая γ_i пересекает фронт $\mathcal{F}$ ровно в двух гладких точках P_i^1, P_i^2 , причем трансверсально;
- (2) $P_i^1 = \gamma_i(t_1) \in \bigcup_{j=1}^i \mathcal{F}_j$, а $P_i^2 = \gamma_i(t_2) \in \mathcal{F}_{i+1}$, где $a < t_1 < t_2 < b$;

(3) кривые $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ попарно не пересекаются.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε -окрестности U_i кривых γ_i в $\mathbb{R}^n$. Если ε достаточно мало, то замыкания $\overline{U}_1, \dots, \overline{U}_{k-1}$ этих окрестностей попарно не пересекаются; каждое пересечение $\overline{U}_i \cap \mathcal{F}$ состоит только из гладких точек фронта $\mathcal{F}$ и имеет ровно две связные компоненты $D_i^1 \ni P_i^1$, $D_i^2 \ni P_i^2$; подмножества $D_i^1, D_i^2 \subset \mathbb{R}^n$ являются C^∞ -вложенными замкнутыми $(n-1)$ -мерными дисками с гладкими краями $\partial D_i^1, \partial D_i^2$ (диффеоморфными $(n-2)$ -мерной сфере S^{n-2}); каждая разность $\partial U_i \setminus (\partial D_i^1 \cup \partial D_i^2)$, где ∂U_i — граница окрестности U_i , имеет три связные компоненты; две из этих компонент гомеоморфны открытым $(n-1)$ -мерным дискам, а замыкание C_i третьей является C^∞ -вложенным цилиндром $S^{n-2} \times [t_1, t_2]$.

Следовательно, искомый фронт $\tilde{\mathcal{F}}$ можно получить из множества

$$\left[\mathcal{F} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} (D_i^1 \cup D_i^2) \right] \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} C_i \right)$$

путем стандартного сглаживания (использующего разбиение единицы) в малых окрестностях сфер $\partial D_i^1, \partial D_i^2$, $i = 1, \dots, k-1$. Предложение 1 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Фронт $\tilde{\mathcal{F}}$ является связной суммой фронтов $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ (см. [2]). Это суммирование проведено так, чтобы фронт $\tilde{\mathcal{F}}$ обладал нужными нам свойствами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$, такого, что $\mu_1 + \dots + \mu_m = n > 1$, существует неприводимый компактный устойчивый фронт $\Sigma(\mathcal{A})$ коранга 1 в $\mathbb{R}^n$, который имеет ровно две особенности типа $\mathcal{A}$ и не имеет других изолированных особенностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подмножество Σ в пространстве

$$\mathbb{R}^{n+1} = \{(\lambda_0^1, \lambda_1^1, \dots, \lambda_{\mu_1-1}^1, \dots, \lambda_0^m, \lambda_1^m, \dots, \lambda_{\mu_m-1}^m, \lambda_*)\},$$

образованное точками, для которых хотя бы один из многочленов

$$t^{\mu_i+1} + \lambda_{\mu_i-1}^i t^{\mu_i-1} + \dots + \lambda_1^i t + \lambda_0^i, \quad i = 1, \dots, m,$$

имеет кратный вещественный корень. Это подмножество является устойчивым фронтом коранга 1.

Зафиксируем в $\mathbb{R}^{n+1}$ стандартную сферу S^n радиуса $R > 0$ с центром в нуле. Пересечение фронта Σ с этой сферой является компактным устойчивым фронтом коранга 1 на S^n . Этот фронт имеет ровно две изолированные особенности, и обе они являются особенностями типа $\mathcal{A}$.

Действительно, прямая $\lambda_0^1 = \dots = \lambda_{\mu_m-1}^m = 0$ состоит из особенностей типа $\mathcal{A}$ фронта Σ и является единственным одномерным стратом минимальной C^∞ -стратификации этого фронта. Вместе с любой своей точкой $(\lambda_0^1, \dots, \lambda_{\mu_m-1}^m, \lambda_*) \neq 0$ каждый страт фронта Σ содержит всю кривую $\gamma: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\gamma: s \mapsto (\lambda_0^1 s^{\mu_1+1}, \lambda_1^1 s^{\mu_1}, \dots, \lambda_{\mu_1-1}^1 s^2, \dots, \lambda_0^m s^{\mu_m+1}, \lambda_1^m s^{\mu_m}, \dots, \lambda_{\mu_m-1}^m s^2, \lambda_* s).$$

Эта кривая трансверсально пересекает сферу S^n , причем ровно в одной точке. Следовательно, сфера S^n трансверсальна каждому страту фронта Σ и пересекает страт особенностей типа $\mathcal{A}$ ровно в двух точках.

Остается воспользоваться стереографической проекцией гиперплоскости

$$\lambda_0^1 + \lambda_0^2 + \dots + \lambda_0^m = 0$$

на сферу S^n без точки P , у которой $\lambda_0^1 = \lambda_0^2 = \dots = \lambda_0^m = -R/\sqrt{m}$, а все остальные координаты равны нулю (точка P служит полюсом проекции). Прообраз фронта $\Sigma \cap S^n$ относительно указанной проекции является фронтом в $\mathbb{R}^n$, который обладает всеми нужными свойствами, кроме неприводимости. Предложение 2 следует теперь из предложения 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$, такого, что $1 < \mu_1 + \dots + \mu_m = c \leq n$, существует неприводимый компактный устойчивый фронт $\Sigma_n(\mathcal{A})$ коранга 1 в $\mathbb{R}^n$, обладающий следующими свойствами:

- (1) фронт $\Sigma_n(\mathcal{A})$ не имеет особенностей коразмерности выше c , а все его особенности коразмерности c являются особенностями типа $\mathcal{A}$;
- (2) многообразие, образованное особенностями типа $\mathcal{A}$ фронта $\Sigma_n(\mathcal{A})$, диффеоморфно несвязному объединению двух сфер размерности $n - c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $c < n$, то искомый фронт диффеоморфен фронту $\Sigma(\mathcal{A}) \times S^{n-c}$ в прямом произведении $\mathbb{R}^c \times S^{n-c}$, где S^{n-c} — сфера размерности $n - c$, а $\Sigma(\mathcal{A})$ — неприводимый компактный устойчивый фронт коранга 1 в $\mathbb{R}^c$, который имеет ровно две особенности типа $\mathcal{A}$ и не имеет других изолированных особенностей (такой фронт существует согласно предложению 2). Если же $c = n$, то предложение 3 получается из предложения 2 с помощью предложения 1.

4. Доказательство теоремы 2. При $n = 1$ это утверждение очевидно. Поэтому везде далее $n > 1$. Кроме того, мы будем считать, что список $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N$ сформирован по неубыванию коразмерностей $\text{codim } \mathcal{A}^i$. В частности, $\mathcal{A}^1 = A_1$ при нечетном n и $\mathcal{A}^1 = 2A_1$, если n четное.

Зафиксируем фронты $\Sigma_n(\mathcal{A}^2), \dots, \Sigma_n(\mathcal{A}^N)$ в $\mathbb{R}^n$, обладающие свойствами (1)–(2) из предложения 3 для $\mathcal{A} = \mathcal{A}^2, \dots, \mathcal{A}^N$ соответственно. Через $\Sigma_n(\mathcal{A}^1)$ обозначим аналогичный фронт для $\mathcal{A} = \mathcal{A}^1$, если n четное, и $(n - 1)$ -мерный тор, C^∞ -вложенный в $\mathbb{R}^n$, если n нечетное.

Пусть $\chi_{i,j}$ — эйлерова характеристика многообразия, образованного особенностями типа $\mathcal{A}^j$ фронта $\Sigma_n(\mathcal{A}^i)$, где $i, j = 1, \dots, N$. Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа $k_1, \dots, k_N$, такие, что $k_1^2 + \dots + k_N^2 \neq 0$. Для любого $i = 1, \dots, N$ построим k_i фронтов $\mathcal{F}_i^l$, $l = 1, \dots, k_i$, в $\mathbb{R}^n$, диффеоморфных фронту $\Sigma_n(\mathcal{A}^i)$ и таких, что каждый фронт $\mathcal{F}_i^l$ расположен в одном из $k_1 + \dots + k_N$ попарно не пересекающихся открытых шаров в $\mathbb{R}^n$.

К фронтам $\mathcal{F}_i^l$, $i = 1, \dots, N$, $l = 1, \dots, k_i$, применим предложение 1. Согласно этому утверждению, существует неприводимый компактный устойчивый фронт $\mathcal{F}$ коранга 1 в $\mathbb{R}^n$, такой, что

- (1) эйлерова характеристика многообразия $(\mathcal{A}^j)_{\mathcal{F}}$ особенностей типа $\mathcal{A}^j$ фронта $\mathcal{F}$ равна $\sum_{i=1}^N k_i \chi_{i,j}$ для любого $j = 2, \dots, N$;
- (2) эйлерова характеристика многообразия $(\mathcal{A}^1)_{\mathcal{F}}$ особенностей типа $\mathcal{A}^1$ фронта $\mathcal{F}$ равна $\sum_{i=1}^N k_i [\chi_{i,1} - \chi(S^{n-1})] + \chi(S^{n-1})$, где $\chi(S^{n-1})$ — эйлерова характеристика $(n - 1)$ -мерной сферы.

Рассмотрим полугруппу в $\mathbb{R}^N$, состоящую из векторов

$$\left(\sum_{i=1}^N k_i [\chi_{i,1} - \chi(S^{n-1})], \sum_{i=1}^N k_i \chi_{i,2}, \dots, \sum_{i=1}^N k_i \chi_{i,N} \right),$$

соответствующих всевозможным упорядоченным наборам целых неотрицательных чисел $(k_1, \dots, k_N)$. Эта полугруппа порождена векторами

$$v_i = (\chi_{i,1} - \chi(S^{n-1}), \chi_{i,2}, \dots, \chi_{i,N}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Предложение 4. *Векторы $v_1, \dots, v_N$ линейно независимы.*

Доказательство. Рассмотрим $(N \times N)$ -матрицу M , строками которой служат векторы $v_1, \dots, v_N$. Матрица M является нижнетреугольной ($\chi_{i,j} = 0$ при всех $j > i$). На ее главной диагонали стоят ненулевые числа: $\chi_{1,1} - \chi(S^{n-1}) = -2$, если $\mathcal{A}^1 = A_1$, и $\chi_{i,i} = 2\chi(S^{n-\text{codim } \mathcal{A}^i}) = 4$ для любого $\mathcal{A}^i \neq A_1$ (напомним, что $\text{codim } \mathcal{A}^i \equiv n \pmod{2}$). Таким образом, $\det M \neq 0$. Предложение 4 доказано.

Теорема 2 следует теперь из предложения 4.

Автор благодарен В. И. Арнольду и М. Э. Казаряну за полезные обсуждения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений, т. 1. Наука, М., 1982.
2. Arnold V. I. Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications. Adv. Sov. Math., **21**, 33–91 (1994).
3. Васильев В. А. Лагранжевы и лежандровы характеристические классы. МЦНМО, М., 2000.
4. Седых В. Д. Разрешение особенностей коранга 1 фронта общего положения. Функц. анализ и его прил., **37**, вып. 2, 52–64 (2003).

Российский государственный университет
нефти и газа им. И. М. Губкина

Поступило в редакцию
4 апреля 2003 г.