Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. А. Аюпов, Вещественные AW^* -алгебры типа I, *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 4, 79–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:31:56

Вещественные AW^* -алгебры типа I

© 2004. Ш. А. Аюпов

В серии работ Капланского [1–3] был рассмотрен специальный класс C^* -алгебр, названных AW^* -алгебрами, с целью выяснения, насколько свойства W^* -алгебры (алгебры фон Неймана) определяются ее внутренней (алгебраической) структурой и не связаны с действием ее элементов на гильбертовом пространстве.

Всякая W^* -алгебра является AW^* -алгеброй, но обратное утверждение неверно, как показал Диксмье [4] с помощью абелева контрпримера. Капланский [2] доказал, что AW^* -алгебра типа I является W^* -алгеброй тогда и только тогда, когда ее центр является W^* -алгеброй, и высказал гипотезу, что это верно для произвольных AW^* -алгебр. Однако гипотеза Капланского была опровергнута Такенучи и Дзем, которые независимо построили примеры AW^* -факторов, не являющихся W^* -факторами.

В нашей работе [5] было введено понятие вещественной AW^* -алгебры как вещественной C^* -алгебры [6], являющейся бэровским $*$ -кольцом [7]. Была исследована связь между вещественной AW^* -алгеброй и ее комплексификацией, построены примеры вещественных абелевых AW^* -алгебр, комплексификации которых не являются AW^* -алгебрами, а также примеры вещественных AW^* -факторов, не являющихся вещественными W^* -факторами.

Как и комплексные W^* -алгебры, вещественные W^* -алгебры естественным образом классифицируются по типам. Связь между типами вещественной W^* -алгебры и ее комплексификации исследована в монографии [6]. В частности, в [6, §8.6] была сформулирована следующая проблема: верно ли, что вещественная W^* -алгебра имеет тип I («полудискретна» в терминологии [6]) тогда и только тогда, когда ее комплексификация имеет тип I. В настоящей работе мы даем решение этой проблемы для более общего случая вещественных AW^* -алгебр. Как следствие получается аналог упомянутой выше теоремы Капланского об AW^* -алгебрах типа I.

Пусть A — вещественная или комплексная $*$ -алгебра, а S — ее непустое подмножество. Положим

$$R(S) = \{x \in A : sx = 0 \text{ для всех } s \in S\}$$

и назовем $R(S)$ правым аннулятором подмножества S .

$*$ -алгебра A называется *бэровской $*$ -алгеброй*, если правый аннулятор любого непустого множества $S \subset A$ порождается проектором, т.е. $R(S) = gA$ для некоторого проектора $g \in A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вещественная или комплексная C^* -алгебра A , являющаяся бэровской $*$ -алгеброй, называется соответственно *вещественной* или *комплексной AW^* -алгеброй*.

Очевидно, что всякая вещественная (соответственно комплексная) W^* -алгебра является вещественной (соответственно комплексной) AW^* -алгеброй, а обратное, вообще говоря, неверно [5]. В отличие от вещественных C^* -алгебр и W^* -алгебр, у которых комплексификация является (комплексной) C^* -алгеброй и W^* -алгеброй, комплексификация вещественной AW^* -алгебры может не быть AW^* -алгеброй [5, Proposition 2.2].

AW^* -алгебру A назовем *полуабелевой*, если каждый проектор в A является центральным. Проектор $e \in A$ называется *полуабелевым*, если eAe — полуабелева AW^* -алгебра.

ЗАМЕЧАНИЕ. В комплексном случае понятия полуабелевой алгебры и полуабелева проектора совпадают соответственно с понятиями абелевой алгебры и абелева проектора. Однако в вещественном случае полуабелева AW^* -алгебра или W^* -алгебра может не быть абелевой. Например, тело кватернионов $\mathbb{Q}$ является полуабелевой, но не абелевой вещественной W^* -алгеброй.

AW^* -алгебра A называется *дискретной* или *типа I*, если в ней есть точный полуабелев проектор e , т. е. $C(e) = \mathbb{I}$, где $C(e)$ — центральный носитель проектора e ; AW^* -алгебра A называется *непрерывной*, если в ней нет ненулевых полуабелевых проекторов.

Прежде чем доказывать основной результат работы, приведем одно вспомогательное утверждение, представляющее самостоятельный интерес. Оно обобщает на случай вещественных AW^* -алгебр результат Штёрмера [8, Theorem 2.8], доказанный для слабо замкнутых вещественных операторных алгебр.

ТЕОРЕМА 1. Пусть R — вещественная AW^* -алгебра, такая, что ее комплексификация $M = R + iR$ является (комплексной) AW^* -алгеброй. Если $R_S = \{x \in R : x^* = x\}$ абелева, то в M существует центральный проектор e , такой, что eM — абелева AW^* -алгебра, а $(\mathbb{I} - e)M$ есть AW^* -алгебра типа I_2 .

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 2. Пусть R — вещественная AW^* -алгебра, такая, что ее комплексификация $M = R + iR$ является (комплексной) AW^* -алгеброй. Тогда R имеет тип I в том и только в том случае, когда M имеет тип I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = R + iR$, α — канонический инволютивный $*$ -антиавтоморфизм алгебры M , порождающий R , т. е. $\alpha(a + ib) = a^* + ib^*$, $a, b \in R$. Тогда

$$R = \{x \in M : \alpha(x) = x^*\}.$$

Через $C_R(e)$ (соответственно $C_M(e)$) обозначим центральный носитель проектора $e \in R$ (соответственно $e \in M$) относительно вещественной AW^* -алгебры R (соответственно относительно комплексной AW^* -алгебры M). Если $e \in R$, то легко проверить, что $C_R(e) = C_M(e)$.

Пусть R имеет тип I, т. е. существует проектор $e \in R$ с центральным носителем $C_R(e) = \mathbb{I}$, такой, что $(eRe)_S$ — абелева алгебра. Как отмечено выше, $C_M(e) = \mathbb{I}$.

В силу теоремы 1 eMe есть алгебра типа I, т. е. существует абелев проектор f в eMe , такой, что $C_{eMe}(f) = e$ (так как e — единица в eMe). Тогда f является абелевым и в M , поскольку $fMf = feMef$ и f абелев в eMe . Легко заметить, что $C_M(f) = \mathbb{I}$, т. е. M имеет тип I.

Обратно, допустим, что R не типа I. Тогда в R существует ненулевой центральный проектор z , такой, что zR — непрерывная AW^* -алгебра. Переходя при необходимости к рассмотрению алгебр zR и $zM = zR + izR$, можно сразу считать, что $z = \mathbb{I}$, т. е. вещественная AW^* -алгебра R непрерывна, а ее комплексификация M является AW^* -алгеброй типа I.

Заметим, что если $e \in M$ — произвольный проектор, то проектор $g = e \vee \alpha(e)$ лежит в R , так как совпадает с носителем эрмитова элемента $e + \alpha(e)$, который, очевидно, лежит в R .

Далее, если $e \in M$ — ненулевой абелев проектор, то проектор $\alpha(e)$ для канонического инволютивного $*$ -антиавтоморфизма α также абелев в M . В частности, e и $\alpha(e)$ — конечные проекторы, и поэтому конечен проектор $g = e \vee \alpha(e) = s(e + \alpha(e)) \in R$ [1, Theorem 6.2]. Переходя к рассмотрению AW^* -алгебр gRg и $gMg = gRg + igRg$, можно считать, что M — конечная AW^* -алгебра.

В силу [7, p. 78, Proposition 2, p. 120, Theorem 1] в непрерывной вещественной AW^* -алгебре R для любого проектора e существует два ортогональных эквивалентных проектора $e_1, e_2 \in R$, таких, что $e = e_1 + e_2$.

Пусть $e \in R$ — ненулевой проектор с центральным носителем $C(e) = \mathbb{I}$, а p — абелев проектор в M . Покажем, что $p \lesssim e$. В силу [1, Theorem 5.6] существует центральный проектор $h \in M$, такой, что $hp \lesssim he$, $(\mathbb{I} - h)p \gtrsim (\mathbb{I} - h)e$. Поскольку p — абелев проектор, то $(\mathbb{I} - h)e$ также абелев проектор, поскольку он эквивалентен подпроектору абелева проектора. С другой стороны, $e = e_1 + e_2$, где e_1, e_2 — ортогональные эквивалентные проекторы в R и, значит, в M . Но тогда проектор $(\mathbb{I} - h)e$ есть сумма двух ортогональных эквивалентных проекторов $(\mathbb{I} - h)e_1$ и $(\mathbb{I} - h)e_2$, что противоречит абелевости $(\mathbb{I} - h)e$. Следовательно, $(\mathbb{I} - h)e = 0$, т.е. $he = e$ или $h \geq e$. Так как h — центральный проектор, то $h \geq C(p) = \mathbb{I}$, т.е. $h = \mathbb{I}$. Значит, $p \lesssim e$. В вещественной AW^* -алгебре R разложим единицу $\mathbb{I}$ в сумму двух ортогональных эквивалентных проекторов, $\mathbb{I} = e_1 + e'_1$. Так как $C(e_1) = C(e'_1)$ [7, p. 34, Proposition 1], то $C(e_1) \geq e_1 + e'_1 = \mathbb{I}$, т.е. $C(e_1) = C(e'_1) = \mathbb{I}$. Далее, разложим e'_1 в сумму двух ортогональных эквивалентных проекторов e_2 и e'_2 в R . Аналогично имеем $C(e_2) = C(e'_2) = C(e'_1) = \mathbb{I}$, причем $e_2 \leq e'_1 = \mathbb{I} - e_1$, т.е. $e_2e_1 = 0$. Далее разложим e'_2 в сумму ортогональных эквивалентных проекторов, $e'_2 = e_3 + e'_3$, и т.д. В итоге получим бесконечную последовательность ортогональных проекторов $e_1, e_2, e_3, \dots$ в R , таких, что $C(e_i) = \mathbb{I}$ для всех $i = 1, 2, \dots$. Как доказано выше, если p — ненулевой абелев проектор в M , то $p \lesssim e_i$ для всех $i = 1, 2, \dots$, т.е. $p \sim p_i \leq e_i$, $i = 1, 2, \dots$. Это значит, что в M существует бесконечная последовательность ортогональных проекторов $\{p_i\}$, каждый из которых эквивалентен p . Это противоречит конечности AW^* -алгебры M . Противоречие показывает, что M не может быть непрерывной. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть R — вещественная AW^* -алгебра типа I, причем ее комплексификация $M = R + iR$ является AW^* -алгеброй. Тогда R является вещественной W^* -алгеброй в том и только в том случае, когда ее центр Z_R — вещественная W^* -алгебра.

ПРОБЛЕМА. Можно ли в следствии снять условие, что $M = R + iR$ является AW^* -алгеброй?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaplansky I.* Ann. Math., **53**, 235–249 (1951).
2. *Kaplansky I.* Ann. Math., **56**, 460–472 (1952).
3. *Kaplansky I.* Amer. J. Math., **75**, 839–858 (1953).
4. *Dixmier J.* Summa Brasil. Math., **2**, 151–182 (1951).
5. *Albeverio S., Ayupov Sh. A., Abdumaitov A. H.* On Real AW^* -algebras, Preprint No. 37, SFB 611 Bonn, 2002.
6. *Li B. R.* Real Operator Algebras, World Scientific, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong, 2002.
7. *Berberian S. K.* Baer $*$ -rings, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
8. *Stormer E.* Pacific J. Math., **21**, 349–370 (1967).