Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Губреев, Регулярные ядра Миттаг-Леффлера и
вольтерровы операторы, *Функци. анализ и его прил.*,
2004, том 38, выпуск 4, 82–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa129>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским
соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:57:52

Регулярные ядра Миттаг–Леффлера и вольтерровы операторы

© 2004. Г. М. ГУБРЕЕВ

1. Регулярные ядра Миттаг–Леффлера. В заметке изучается класс целых функций $\mathcal{E}_\rho: \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{H}$ порядка роста ρ и нормального типа со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, который выделяется следующим определением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Целую функцию $\mathcal{E}_\rho$, $\rho \geq 1$, назовем *ядром Миттаг–Леффлера*, если выполняются следующие условия:

1) для каждого $z \in \mathbb{C}$ существует такой вектор $h(z) \in \mathfrak{H}$, что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(\tilde{\mathcal{E}}_\rho(\lambda), \mathcal{E}_\rho(z)) = (\mathcal{E}_\rho(\lambda), h(z)), \quad \text{где } \tilde{\mathcal{E}}_\rho(\lambda) := \lambda^{-1}(\mathcal{E}_\rho(\lambda) - \mathcal{E}_\rho(0));$$

2) для любых конечных наборов $\{c_k\}_1^n, \{\lambda_k\}_1^n$ ($n \geq 1$) комплексных чисел значения форм $(\sum_{k=1}^n c_k \tilde{\mathcal{E}}_\rho(\lambda_k), \sum_{k=1}^n c_k \mathcal{E}_\rho(\lambda_k))$ принадлежат углу $0 \leq \arg z \leq \pi/\rho$.

Через $\Lambda^{(\text{exp})}$ обозначается (см. [1, с. 70]) множество ограниченных операторов B в пространстве $\mathfrak{H}$, таких, что 1) $\sigma(B) = \{0\}$, $\text{Ker } B = \{0\}$, 2) $\frac{1}{2i}(B - B^*) \geq 0$, 3) оператор-функция $(I - zB)^{-1}$ имеет первый порядок роста и нормальный тип. Пусть $B^{1/\rho}$ обозначает π/ρ -секториальную дробную степень диссипативного оператора B (см. [2, с. 195]), т. е. $\arg(B^{1/\rho}h, h) \in [0, \pi/\rho]$, $h \in \mathfrak{H}$. Тогда каждая целая функция

$$\mathcal{E}_\rho(z) := (I - zB^{1/\rho})^{-1}g, \quad g \in \mathfrak{H}, B \in \Lambda^{(\text{exp})}, \quad (1)$$

имеет нормальный тип при порядке роста ρ и является ядром Миттаг–Леффлера, поскольку

$$\tilde{\mathcal{E}}_\rho(z) = B^{1/\rho}(I - zB^{1/\rho})^{-1}g, \quad \left(\sum c_k \tilde{\mathcal{E}}_\rho(\lambda_k), \sum c_k \mathcal{E}_\rho(\lambda_k) \right) = (B^{1/\rho}h, h),$$

где $h = \sum c_k \mathcal{E}_\rho(\lambda_k)$. Отметим, что определение 1 пригодно лишь при $\rho \geq 1$. Поэтому для значений $\rho \in (0, 1)$ ядром Миттаг–Леффлера $\mathcal{E}_\rho$ будем называть произвольную вектор-функцию вида (1). В настоящей работе для значений параметра $\rho > 1/2$ дается полное описание ядер Миттаг–Леффлера, которые обладают определенными свойствами регулярности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Ядро $\mathcal{E}_\rho$, $\rho > 1/2$, со значениями в пространстве $\mathfrak{H}$ называется *непрерывно регулярным* (в дальнейшем *s-регулярным*), если существуют такие константы m, M ($0 < m < M < \infty$), что для всех $h \in \mathfrak{H}$ справедливы оценки

$$m\|h\|^2 \leq \int_{\gamma_\rho} |z - \omega_\rho|^{\rho-1} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^{-2} |(\mathcal{E}_\rho(z), h)|^2 |dz| \leq M\|h\|^2, \quad \omega_\rho := e^{-i\pi/(2\rho)}, \quad (2)$$

где γ_ρ — угол с вершиной $z = 0$ и сторонами $\arg z = 0$, $\arg z = -\pi/\rho$.

Обозначим через γ_ρ^- область внутри γ_ρ , т. е. $\gamma_\rho^- := \{z \in \mathbb{C} : -\pi/\rho < \arg z < 0\}$. Пусть λ^ρ — та ветвь многозначной функции, которая отображает γ_ρ^- на нижнюю полуплоскость $\mathbb{C}_-$. Последовательность $\Lambda := \{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\lambda_k \in \gamma_\rho^-$, лежащую в некоторой криволинейной полосе $-\Delta < \text{Im } \lambda^\rho < -\delta$ ($\delta, \Delta > 0$) и сгущающуюся

ся к ∞ , назовем *последовательностью без пропусков*, если для любого $x \in \mathbb{R}$ существует такой элемент $\lambda(x) \in \Lambda$, что $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\lambda^\rho(x) - x| < \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Ядро Миттаг–Леффлера $\mathcal{E}_\rho$, $\rho > 1/2$, со значениями в пространстве $\mathfrak{H}$ называется *дискретно регулярным* (в дальнейшем *d-регулярным*), если существует хотя бы одна последовательность без пропусков Λ , для которой семейство $\{\mathcal{E}_\rho(\lambda_k) : \lambda_k \in \Lambda\}$ образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Ядро $\mathcal{E}_\rho$ называется *регулярным*, если оно одновременно *c-регулярно* и *d-регулярно*.

Следуя работам [3, 4], приведем теперь одну конструкцию регулярных ядер со значениями в каждом из пространств $L_2(0, \sigma)$, $\sigma > 0$. Пусть на контуре γ_ρ , $\rho > 1/2$, который фигурирует в определении 2, задан $A_{\gamma_\rho}^2$ -вес Макенхаупта w^2 , т. е.

$$\sup_{z \in \gamma_\rho} \sup_{r > 0} \left\{ r^{-1} \int_{B(z, r) \cap \gamma_\rho} w^2(\lambda) |d\lambda| r^{-1} \int_{B(z, r) \cap \gamma_\rho} w^{-2}(\lambda) |d\lambda| \right\} < \infty, \quad (A_{\gamma_\rho}^2)$$

где $B(z, r)$ — круг с центром z и радиуса r . Тогда существует аналитическая в угле γ_ρ^- функция w_- , удовлетворяющая следующим условиям: а) почти при всех $z \in \gamma_\rho$ существуют некасательные предельные значения $w_-(z) := \lim_{\lambda \rightarrow z} w_-(\lambda)$, $\lambda \in \gamma_\rho^-$, причем $w^2(z) \stackrel{\text{н.в.}}{=} |w_-(z)|^2$, $z \in \gamma_\rho$; б) функция $w_-(u^{1/\rho})$ — внешняя в нижней полуплоскости $\mathbb{C}_-$ (определение см. в [5, с. 73]). Этими условиями w_- определяется с точностью до унимодулярного постоянного множителя. Имеет место интегральное представление

$$w_-(u^{1/\rho}) = u^{(1+\rho)/(2\rho)} \int_0^\infty e^{-itu} y_w(t) dt, \quad u \in \mathbb{C}_-,$$

с некоторой функцией $y_w \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Через y_w^σ обозначим сужение функции y_w на отрезок $[0, \sigma]$. Итак, каждый $A_{\gamma_\rho}^2$ -вес w^2 , в полном соответствии с формулой (1) в частном случае $B = J_\sigma \in \Lambda^{\text{(exp)}}$, $g = y_w^\sigma$, $\mathfrak{H} = L_2(0, \sigma)$, порождает ядро

$$\mathcal{E}_{\rho, w}(z, t) := (I - zJ_\sigma^{1/\rho})^{-1} y_w^\sigma, \quad (J_\sigma^{1/\rho} h)(t) = e^{i\pi/(2\rho)} \Gamma^{-1} \left(\frac{1}{\rho} \right) \int_0^t (t-s)^{1/\rho-1} h(s) ds, \quad (3)$$

со значениями в пространстве $L_2(0, \sigma)$. В дальнейшем ядра $\mathcal{E}_{\rho, w}(z, t)$ будем называть *w-ядрами Миттаг–Леффлера*.

ТЕОРЕМА 1. Для произвольного $A_{\gamma_\rho}^2$ -веса w^2 ядро $\mathcal{E}_{\rho, w}(z, t)$, $\rho > 1/2$, со значениями в каждом из пространств $L_2(0, \sigma)$, $\sigma > 0$, является регулярным.

Если в формулах (3) отбрасывать от степенного веса $w^2(z) = |z|^\omega$, $-1 < \omega < 1$, то нетрудно проверить [3], что соответствующее *w-ядро* выражается через функцию Миттаг–Леффлера $E_\rho(z, \mu)$ по формуле

$$\mathcal{E}_{\rho, w}(z, t) = t^{\mu-1} E_\rho(e^{i\pi/(2\rho)} z t^{1/\rho}; \mu), \quad E_\rho(z; \mu) := \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma^{-1}(\mu + k\rho^{-1}) z^k, \quad (4)$$

где $\mu = (2\rho)^{-1}(1 + \rho - \omega)$. Этим объясняется то, что абстрактные классы функций $\mathcal{E}_\rho$, которые выделяются определением 1, были названы нами ядрами Миттаг–Леффлера. Функция Миттаг–Леффлера и ее обобщения занимают заметное место в современном анализе [7–11]. Свойства интегральных преобразований с ядрами Миттаг–Леффлера вида (4) составляют одну из основных тем монографии [6]. М. Г. Крейн неоднократно указывал на необходимость переосмыслить ряд результатов этой книги, полученных М. М. Джрбашяном

классическими методами, с позиций бурно развивающейся теории несамосопряженных операторов. В беседе с автором (1986 г.) он предложил выяснить, насколько существенна роль операторов дробного интегрирования в построениях Джрбашяна и не порождают ли другие вольтерровы операторы интегральные преобразования с аналогичными свойствами. В принятой здесь терминологии эту задачу можно сформулировать как задачу об описании всех s -регулярных ядер Миттаг–Леффлера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Ядра $\mathcal{E}_\rho^{(k)}$ со значениями в гильбертовых пространствах $\mathfrak{H}_k$ ($k = 1, 2$) называются *изоморфными*, если существует непрерывный и непрерывно обратимый оператор S из $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2$, такой, что $S\mathcal{E}_\rho^{(1)}(z) = \mathcal{E}_\rho^{(2)}(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Очевидно, что изоморфные ядра только одновременно могут обладать свойством какой-нибудь регулярности. Поэтому описание регулярных ядер Миттаг–Леффлера возможно лишь с точностью до изоморфизма.

2. Описание регулярных ядер Миттаг–Леффлера. Если ядро $\mathcal{E}_\rho$ имеет нормальный тип σ при порядке роста ρ , то будем говорить, что *его рост равен* (ρ, σ) . Следующий результат показывает, что регулярные ядра надо искать среди вектор-функций вида (1).

ТЕОРЕМА 2. Каждое s -регулярное или d -регулярное ядро Миттаг–Леффлера $\mathcal{E}_\rho$ роста (ρ, σ) , $\rho \geq 1$, со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ допускает единственное представление вида

$$\mathcal{E}_\rho(z) = (I - zB^{1/\rho})^{-1}g, \quad g \in \mathfrak{H}, \quad B \in \Lambda^{(\text{exp})},$$

причем экспоненциальный тип оператора $(I - zB)^{-1}$ равен σ .

Из теоремы 1 следует, что регулярными будут все изоморфные образы w -ядер, построенных с помощью канонической процедуры по произвольному $A_{\gamma_\rho}^2$ -весу w^2 на контуре γ_ρ . Оказывается, что других регулярных (s -регулярных, d -регулярных) ядер Миттаг–Леффлера нет.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{E}_\rho$ — произвольное ядро Миттаг–Леффлера, $\rho > 1/2$, роста (ρ, σ) со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) ядро $\mathcal{E}_\rho$ s -регулярно тогда и только тогда, когда оно d -регулярно;
- 2) ядро $\mathcal{E}_\rho$ регулярно тогда и только тогда, когда вес

$$w^2(z) := |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2$$

удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$ и $\mathcal{E}_\rho$ изоморфно ядру $\mathcal{E}_{\rho,w}$ со значениями в пространстве $L_2(0, \sigma)$, построенному по весу w^2 .

В сформулированной теореме речь идет о случае $\rho > 1/2$. Построения этой работы непригодны для значений параметра $\rho \in (0, 1/2)$, что объясняется, в основном, неограниченным ростом резольвенты $(I - zB^{1/\rho})^{-1}$, $B \in \Lambda^{(\text{exp})}$, вдоль любого луча $\arg z = \varphi$. Поэтому при $0 < \rho < 1/2$ правильные постановки задач должны быть другими. В пограничном случае $\rho = 1/2$ имеют место аналогичные утверждения, но с несколько другими формулировками. Эти результаты опубликованы в [14]. Наиболее простой случай $\rho = 1$ впервые исследовался в работах [12, 13].

3. Некоторые приложения. К понятию регулярного ядра Миттаг–Леффлера мы приходим при изучении спектральной структуры конечномерных возмущений дробных степеней операторов класса $\Lambda^{(\text{exp})}$. Например, к этому

понятию приводит задача о подобии нормальному оператору произвольного одномерного возмущения вида

$$Kh := B^{1/\rho}h + (h, f)g, \quad B \in \Lambda^{(\exp)}, \quad f, g \in \mathfrak{H}, \quad \rho > 1/2. \quad (5)$$

Фредгольмов спектр оператора K , т.е. множество $\{\mu^{-1} : \mu \in \sigma(K), \mu \neq 0\}$, совпадает с множеством корней целой функции $\Phi(z) := 1 - z((I - zB^{1/\rho})^{-1}g, f)$, которое мы обозначим через Λ . Скажем, что последовательность Λ расположена правильно относительно контура γ_ρ , если те ее части, которые при некотором $\varepsilon > 0$ попали в углы $|\arg z| < \varepsilon$, $|\pi/\rho + \arg z| < \varepsilon$, удовлетворяют условию $|\operatorname{Im} \lambda_k^\rho| \geq \delta > 0$, где λ^ρ — аналитическое продолжение ветви, отображающей γ_ρ^- на $\mathbb{C}_-$. Если Λ расположена правильно ($0 \notin \Lambda$), то $\Lambda_\pm = \Lambda \cap \gamma_\rho^\pm$, где γ_ρ^+ — дополнительный угол, т.е. $\gamma_\rho^+ := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \pi/\alpha\}$, $\rho^{-1} + \alpha^{-1} = 2$. Поэтому обе последовательности $U := \{u_k\}$, $V := \{v_k\}$, $u_k := \lambda_k^\alpha$, $\lambda_k \in \Lambda_+$, $v_k := \overline{\lambda_k^\rho}$, $\lambda_k \in \Lambda_-$, $\alpha^{-1} + \rho^{-1} = 2$, лежат в $\mathbb{C}_+$. Напомним, что последовательность из верхней полуплоскости (например, U) удовлетворяет условию Карлесона, если

$$\inf_k \prod_{j \neq k} \frac{|u_k - u_j|}{|u_k - \overline{u}_j|} > 0, \quad U = \{u_k\}. \quad (C)$$

ТЕОРЕМА 4. Если K — произвольный оператор вида (5), то справедливы следующие утверждения:

а) Пусть фредгольмов спектр оператора K есть некоторая последовательность без пропусков. Если K подобен нормальному оператору, то ядро $\mathcal{E}_\rho(z) := (I - zB^{1/\rho})^{-1}g$ регулярно.

б) Пусть указанное ядро $\mathcal{E}_\rho$ регулярно и имеет рост (ρ, σ) , $w^2(z) := |z - \omega_\rho|^{1-\rho} \|\mathcal{E}_\rho(z)\|^2$ и корни функции Φ расположены правильно относительно угла γ_ρ . Тогда для подобия оператора K нормальному оператору необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- 1) множество корней Φ бесконечно и все они простые;
- 2) $\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \log |\Phi(re^{-\pi/(2\rho)})| = \sigma$, $\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\alpha} \log |\Phi(re^{-i\pi/(2\alpha)})| = 0$, $\alpha^{-1} + \rho^{-1} = 2$;
- 3) вес $W^2(z) := w^{-2}(z)|\Phi(z)|^2$ удовлетворяет условию $(A_{\gamma_\rho}^2)$;
- 4) последовательности U, V удовлетворяют условию (C).

Для конкретных приложений необходимо иметь простые признаки регулярности ядер Миттаг–Леффлера. Сформулируем здесь один из результатов такого рода. Пусть $B \in \Lambda^{(\exp)}$, причем $\operatorname{Im} B$ ядерна. Пусть также существуют число $a \in \mathbb{C}$ и векторы $f, f_1 \in B\mathfrak{H} + B^*\mathfrak{H}$, такие, что $F(z) := a - z((I - zB)^{-1}f, f_1)$ является функцией типа синуса [15], ширина индикаторной диаграммы которой равна $2 \operatorname{Sp} \operatorname{Im} B$. Эти условия обеспечивают принадлежность f к области определения оператора $B^{\mu-1}$, $\mu > 1/2$. Доказывается, что ядро Миттаг–Леффлера $\mathcal{E}_{\rho, \mu}(z) := (I - zB^{1/\rho})^{-1}B^{\mu-1}f$, $\mu > 1/2$, регулярно тогда и только тогда, когда $1/2 < \mu < 1/2 + 1/\rho$. Более того, регулярное ядро $\mathcal{E}_{\rho, \mu}$ изоморфно ядру (4) со значениями в пространстве $L_2(0, \sigma)$, $\sigma := 2 \operatorname{Sp} \operatorname{Im} B$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. Наука, М., 1969.
2. Секефальви-Надь Б., Фойаш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Мир, М., 1970.
3. Губреев Г. М. Записки научных семинаров ЛОМИ. XIX, 190, 34–80 (1991).
4. Губреев Г. М. Спектральный анализ биортогональных разложений, порожденных весами Макенхаупта. Дисс. д.ф.-м.н.,

Харьков, ФТИНТ, 1995. **5.** *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. Наука, М., 1984. **6.** *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Наука, М., 1966. **7.** *Ostrovskii I. V., Peresolokova I. N.* In: Theory of Functions and Applications. Collection of works dedicated to the memory of M. M. Djrbashian, 1995, pp. 49–152. **8.** *Sedletskii A. M.* Anal. Math. **20**, 117–132 (1994). **9.** *Гельфанд И. М., Граев М. И., Ремах В. С.* УМН, **53**, вып. 1 (319), 3–60 (1998). **10.** *Маергойз Л. С.* Алгебра и анализ, **12**, вып. 2, 1–63 (2000). **11.** *Маергойз Л. С.* Индикаторная и сопряженная диаграммы целой функции уточненного порядка. Препринт 789Ф, Красноярск, 1998. **12.** *Губреев Г. М.* Матем. сб., **190**, вып. 12, 3–36 (1999). **13.** *Губреев Г. М.* Алгебра и анализ, **12**, вып. 6, 1–97 (2000). **14.** *Губреев Г. М., Волкова М. Г.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **290**, 23–41 (2002). **15.** *Левин Б. Я.* Записки физ.-мат. ф-та ХГУ и ХМО, **27**, 39–48 (1961).

Южноукраинский педагогический
государственный университет (г. Одесса)
email: varv@rambler.ru

Поступило в редакцию
20 февраля 2003 г.

УДК 517.956

Об усреднении периодических параболических систем*

© 2004. Т. А. СУСЛИНА

1. Рассматривается вопрос об усреднении (гомогенизации) задачи Коши для параболической системы вида

$$\rho(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad \rho(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad (1)$$

в пределе малого периода ε , стремящегося к нулю. Здесь $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ есть $\mathbb{C}^n$ -значная функция от $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ и $t \geq 0$, $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ — матричный эллиптический оператор с периодическими коэффициентами, зависящими от $\varepsilon^{-1}\mathbf{x}$, и ρ — периодическая положительная матрица. Точное описание оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ см. ниже в разд. 2, 4. Задача гомогенизации для параболических уравнений активно изучалась традиционными методами теории усреднений (см., например, книги [1–3]). Соответствующие результаты дают сходимость (в подходящем функциональном классе) решений $\mathbf{u}_\varepsilon$ к решению $\mathbf{u}_0$ усредненной системы с постоянными эффективными коэффициентами. Мы используем абстрактный теоретико-операторный подход, развитый применительно к эллиптическим системам в статьях [4, 5]. Этот подход позволяет не только установить сходимость $\mathbf{u}_\varepsilon$ к $\mathbf{u}_0$ по норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ (при фиксированном t), но и получить оценку для нормы разности $\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0$, точную по порядку и равномерную относительно $L_2(\mathbb{R}^d)$ -нормы начального значения ϕ . Точнее говоря, получается оценка порядка $\varepsilon t^{-1/2}$ для операторной нормы разности разрешающих операторов для задачи (1) и для «усредненной» задачи Коши (см. ниже теоремы 3, 4).

Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означает норму в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}}$ означает норму ограниченного оператора в $\mathfrak{H}$. Далее, $|\cdot|$ — норма вектора в $\mathbb{C}^n$, а $\mathbf{1}_n$ — единичная $(n \times n)$ -матрица. Используем обозначения $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial/\partial x^j$, $j = 1, \dots, d$,

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00798).