Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Яйте, Индивидуальная эргодическая теорема для сжатий в пространствах $\mathbb{L}_p(\mathcal{H})$, *Функци. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 2, 90–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa13>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru

подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 18:34:07

Индивидуальная эргодическая теорема для сжатий в пространствах $\mathbb{L}_p(\mathcal{H})$

© 2006. Р. ЯЙТЕ

1. Введение и основной результат. Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим через $\mathbb{L}_p(Z, \mathcal{F}, \mu; \mathcal{H})$ пространство $\mathcal{H}$ -значных измеримых функций ξ на конечном пространстве с мерой $(Z, \mathcal{F}, \mu)$, таких, что норма

$$\|\xi\|_p = \left(\int_Z \|\xi(z)\|_{\mathcal{H}}^p \mu(dz) \right)^{1/p}$$

конечна. В предположении, что $1 < p < \infty$ и $p \neq 2$, мы доказываем результат о поточечной сходимости для сжатий в пространстве $\mathbb{L}_p(Z, \mathcal{F}, \mu; \mathcal{H})$, тесно связанный со знаменитой эргодической теоремой Акоголу для положительных сжатий в классических $\mathbb{L}_p$ -пространствах [1].

Начнем с необходимых обозначений и определений. Пусть (Z, μ) — пространство с чисто атомической мерой, имеющей конечное число атомов $m_1, \dots, m_n$, т. е. $Z = \{1, \dots, n\}$ и $\mu\{j\} = m_j$. Обозначим через $\mathbb{L}_p(m_1, \dots, m_n; \mathcal{H})$ соответствующее $\mathbb{L}_p$ -пространство. Линейный оператор T в пространстве $\mathbb{L}_p(m_1, \dots, m_n; \mathcal{H})$ задается матрицей $T = (T_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ линейных операторов в $\mathcal{H}$, т. е. для $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i \in \mathcal{H}$,

$$(Tf)_j = \sum_{i=1}^n T_{ij} f_i, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что оператор $T = (T_{ij})$ в пространстве $\mathbb{L}_p(m_1, \dots, m_n; \mathcal{H})$ *мажорируется сжатием*, если

$$\|T_{ij}\|_{B(\mathcal{H})} \leq t_{ij}, \quad (2)$$

где матрица $t = (t_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ задает сжатие в пространстве $\mathbb{L}_p(m_1, \dots, m_n; \mathbb{R})$, т. е.

$$\sum_{j=1}^n m_j \left| \sum_{i=1}^n t_{ij} x_i \right|^p \leq \sum_{i=1}^n m_i |x_i|^p \quad \text{при } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Сжатие $T = (T_{ij})$ в пространстве $\mathbb{L}_p(m_1, \dots, m_n; \mathcal{H})$ называется *симметричным*, если все операторы T_{ij} являются самосопряженными.

Пусть $(Z, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с мерой и $G = (E_1, \dots, E_n)$ — разбиение пространства Z , причем $\mu(E_j) = m_j$, $j = 1, \dots, n$. Очевидно, что пространство $\mathbb{L}_p(m_1, \dots, m_n; \mathcal{H})$ изоморфно пространству $\mathbb{L}_p(Z, S, \mu; \mathcal{H})$, где S — алгебра подмножеств пространства Z , порожденная разбиением G (причем изометрический изоморфизм задается формулой $(\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow \sum_{j=1}^n \xi_j 1_{E_j}$).

Оператор условного ожидания $\mathcal{E}^G: \mathbb{L}_p(Z, \mathcal{F}, \mu; \mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{L}_p(Z, S, \mu; \mathcal{H})$ задается формулой

$$(\mathcal{E}^G f)(x) = \frac{1}{\mu(E_j)} \int_{E_j} f(z) \mu(dz) \quad \text{при } x \in E_j. \quad (4)$$

Пусть в пространстве $\mathbb{L}_p(Z, \mathcal{F}, \mu; \mathcal{H})$ задано сжатие T и $\mathcal{E} = \mathcal{E}^G$ — введенный выше оператор. Рассмотрим $\mathcal{E}T$ как оператор, действующий только в $\mathbb{L}_p(Z, S, \mu; \mathcal{H}) \sim \mathbb{L}_p(m_1, \dots, m_n; \mathcal{H})$. Таким образом, для подходящей матрицы (T_{ij}) мы можем записать

$$((\mathcal{E}T)f)_j = \sum_{i=1}^n T_{ij} f_i, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_j \in \mathcal{H}$.

Введя эти обозначения, мы можем сформулировать наш основной результат.

ТЕОРЕМА. Пусть T — сжатие в пространстве $\mathbb{L}_p(Z, \mathcal{F}, \mu; \mathcal{H})$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. Предположим, что выполнено следующее условие:

для любого конечного разбиения $G = (E_1, \dots, E_n)$ пространства Z ($\mu(E_j) = t_j$) и соответствующего условного ожидания $\mathcal{E}^G$ сжатие $\mathcal{E}^G T$ в пространстве $\mathbb{L}_p(Z, S, \mu, \mathcal{H}) \sim \mathbb{L}_p(m_1, \dots, m_n, \mathcal{H})$ симметрично и мажорируется сжатием. (5)

Тогда чезаровские средние

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (T^k f)(z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

сильно сходятся в $\mathcal{H}$ почти везде относительно меры μ .

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Доказательство по существу следует идеям Акоголу [1]. Основной шаг состоит в построении обратимой изометрии Q , которая является дилатацией для сжатия в пространстве $\mathbb{L}_p(m_1, \dots, m_n; \mathcal{H})$, на некотором большем пространстве $\mathbb{L}_p(Z, \mathcal{F}, \mu; \mathcal{H})$ при помощи условных ожиданий. С помощью этого процесса Акоголу сводит доказательство к одному результату Ионеску-Тулчи [6] (см. также улучшенные версии в работах де ла Торре [5] и Кана [4]). Мы действуем аналогичным образом и сводим доказательство к результатам Камберна [3], Сурура [7] и Ассани [2]. А именно, как показано в [2, Corollary I.16] (см. также [3] и [7]), для обратимой изометрии Q в пространстве $\mathbb{L}_p(Z, \mathcal{F}, \mu; \mathcal{H})$, где $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, имеет место следующее неравенство:

$$\left(\int_Z \sup_n \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (Q^k f)(z) \right\|_{\mathcal{H}}^p \mu(dz) \right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_Z \|f(z)\|_{\mathcal{H}}^p \mu(dz) \right)^{1/p}. \quad (7)$$

Таким образом, нашу теорему можно вывести из теоремы II.6 работы [2] при помощи подходящего аппроксимационного рассуждения.

Переходя к описанию некоторых деталей доказательства, зафиксируем положительные числа $m_1, \dots, m_n$ и предположим, что $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. Пусть $T = (T_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ — симметричное сжатие в пространстве $\mathbb{L}_p(m_1, \dots, m_n; \mathcal{H})$, которое мажорируется сжатием: $\|T_{ij}\| \leq t_{ij}$, где $t = (t_{ij})$ — сжатие в пространстве $\mathbb{L}_p(m_1, \dots, m_n; \mathbb{R})$; предположим на время, что сжатие $t = (t_{ij})$ удовлетворяет условиям

$$t_{ij} > 0 \text{ при всех } i, j \text{ и } \|t\|_p = 1 \text{ (ср. [1])}. \quad (8)$$

Тогда $(t_{ij})^{-1} T_{ij}$ — сжатие в $\mathcal{H}$. Известно, что любое самосопряженное сжатие K в гильбертовом пространстве имеет вид $K = \frac{1}{2}(U + U^*)$, где U — унитарный оператор. Достаточно положить $U = K + i(1 - K^2)^{1/2}$. Таким образом, мы можем записать

$$T_{ij} = \frac{1}{2} t_{ij} (U_{ij}^{(1)} + U_{ij}^{(2)}), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (9)$$

где $U_{ij}^{(\alpha)}$ — унитарные операторы в $\mathcal{H}$ ($i, j = 1, \dots, n$; $\alpha = 1, 2$).

В следующих нескольких строках мы ссылаемся на часть конструкции Акоголу [1], сохраняя его обозначения. Выберем множество Z и преобразование $\tau: Z \rightarrow Z$ в точности так, как описано в работе [1, р. 1077]. Теперь разобьем J_{ij} (где J_{ij} определено в [1]) на две равные части $J_{ij}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, и положим

$R_{ij}^{(\alpha)} = I_i \times J_{ij}^{(\alpha)}$, так что $|R_{ij}^{(\alpha)}| = \frac{1}{2}|R_{ij}| = \frac{1}{2}\eta_{ij}$ ($\alpha = 1, 2$). При $z \in Z$, $f \in \mathbb{L}_p$ положим

$$(Qf)(z) = [\rho(z)]^{1/p} V(\tau^{-1}z)[f(\tau^{-1}z)], \quad (10)$$

где $V(z) = U_{ij}^{(\alpha)}$ на множестве $R_{ij}^{(\alpha)}$, а $U_{ij}^{(\alpha)}$ — унитарные операторы из формулы (9). Очевидно, что Q — обратимая изометрия в $\mathbb{L}_p(Z, \mathcal{F}, \mu; \mathcal{H})$.

Пусть f — функция, заданная на Z и зависящая только от x -координаты, т. е. $f(z) = F(x)$ при $z = (x, y)$.

Проведя необходимые вычисления, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(E_j)} \int_{E_j} (Qf)(z) \mu(dz) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} t_{ij} [U_{ij}^{(1)} + U_{ij}^{(2)}] \frac{1}{\mu(E_i)} \int_{E_i} f(z) \mu(dz) \\ &= \sum_{i=1}^n T_{ij} \left(\frac{1}{\mu(E_i)} \int_{E_i} f(z) \mu(dz) \right), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (11)$$

Отождествляя пространство $\mathbb{L}_p(m_1, \dots, m_n; \mathcal{H})$ с $\mathbb{L}_p(Z, S, \mu; \mathcal{H})$, где S — алгебра, порожденная разбиением $(E_1, \dots, E_n)$, и обозначая через $\mathcal{E}$ условное ожидание, соответствующее этому разбиению, можно переписать (11) в виде

$$\mathcal{E}Qf = T\mathcal{E}f, \quad f \in \mathbb{L}_p(Z, \mathcal{F}, \mu; \mathcal{H}). \quad (12)$$

Таким образом, для функции $f \in \mathbb{L}_p(m_1, \dots, m_n; \mathcal{H}) \sim \mathbb{L}_p(Z, S, \mu; \mathcal{H})$ имеем

$$\mathcal{E}Q^k f = T^k f, \quad k = 0, 1, \dots \quad (13)$$

(при дополнительном предположении (8)). Поскольку для изометрии Q справедливо неравенство (7), мы получаем

$$\left(\int_Z \sup_n \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (T^k f)(z) \right\|_{\mathcal{H}}^p \mu(dz) \right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_Z \|f(z)\|_{\mathcal{H}}^p \mu(dz) \right)^{1/p}. \quad (14)$$

Теперь нетрудно избавиться от предположения (8), ср. [1].

Чтобы доказать нашу теорему в полной общности, возьмем сжатие T в пространстве $\mathbb{L}_p(Z, \mathcal{F}, \mu; \mathcal{H})$, удовлетворяющее условию (5).

Предположим, что для T неравенство (7) не выполнено. Тогда существует положительное целое число N и функция $f \in \mathbb{L}_p(Z, \mathcal{F}, \mu; \mathcal{H})$, такие, что

$$\int_Z \max_{1 \leq n \leq N} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (T^k f)(z) \right\|_{\mathcal{H}}^p \mu(dz) > \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_Z \|f(z)\|_{\mathcal{H}}^p \mu(dz). \quad (15)$$

Для произвольного $\delta > 0$ найдем условное ожидание $\mathcal{E}$, соответствующее некоторому конечному разбиению $(E_1, \dots, E_N)$ пространства Z , такое, что

$$\int_Z \|f_k(z) - g_k(z)\|_{\mathcal{H}}^p \mu(dz) < \delta, \quad k = 1, \dots, N,$$

где

$$g_k = \frac{1}{k} \sum_{\nu=0}^{k-1} (\mathcal{E}T)^\nu \mathcal{E}f, \quad f_k = \frac{1}{k} \sum_{\nu=0}^{k-1} T^\nu f \quad (\text{ср. [1, Lemma 3.1]}).$$

Тогда

$$\int_Z \left| \|f_k(z)\|_{\mathcal{H}} - \|g_k(z)\|_{\mathcal{H}} \right|^p \mu(dz) < \delta, \quad k = 1, \dots, N.$$

По непрерывности нормы в $\mathbb{L}_p(Z, \mu)$ для любого $\eta > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\int_Z \left| \|f_k(z)\|_{\mathcal{H}}^p - \|g_k(z)\|_{\mathcal{H}}^p \right| \mu(dz) < \eta.$$

Для любого $\epsilon > 0$ мы можем выбрать такое $\eta > 0$, что

$$\int_Z \left| \max_{1 \leq k \leq N} \|f_k(z)\|_{\mathcal{H}}^p - \max_{1 \leq k \leq N} \|g_k(z)\|_{\mathcal{H}}^p \right| \mu(dz) < \epsilon. \quad (16)$$

Учитывая определения функций f_k и g_k , из (15), (16) и стандартных соотношений непрерывности получаем

$$\int_Z \max_{1 \leq n \leq N} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\mathcal{E}T)^k \mathcal{E}f \right\|_{\mathcal{H}}^p \mu(dz) > \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_Z \|f(z)\|_{\mathcal{H}}^p \mu(dz),$$

что противоречит предположению (5). Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Akcoglu M. A.* Canad. J. Math., **27**, 1075–1082 (1975).
2. *Assani I.* Ann. Inst. Henri Poincaré, **23**, 209–224 (1987).
3. *Cambern M.* Pacific J. Math., **55**, 9–17 (1974).
4. *Charn-Huen Kan.* Canad. J. Math., **30**, 1206–1214 (1978).
5. *de la Torre A.* Canad. J. Math., **28**, 1073–1075 (1976).
6. *Ionescu-Tulcea A.* Bull. Amer. Math. Soc., **70**, 366–371 (1964).
7. *Sourour A. R.* J. Funct. Anal., **30**, 276–285 (1978).

Faculty of Mathematics, University of Łódź, Poland
e-mail: rjajte@math.uni.lodz.pl

Поступило в редакцию
24 декабря 2004 г.