Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Суслина, Об усреднении периодических параболических систем, *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 4, 86–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa130>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 18:32:22

Харьков, ФТИНТ, 1995. **5.** *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. Наука, М., 1984. **6.** *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Наука, М., 1966. **7.** *Ostrovskii I. V., Peresolokova I. N.* In: Theory of Functions and Applications. Collection of works dedicated to the memory of M. M. Djrbashian, 1995, pp. 49–152. **8.** *Sedletskii A. M.* Anal. Math. **20**, 117–132 (1994). **9.** *Гельфанд И. М., Граев М. И., Ремах В. С.* УМН, **53**, вып. 1 (319), 3–60 (1998). **10.** *Маергойз Л. С.* Алгебра и анализ, **12**, вып. 2, 1–63 (2000). **11.** *Маергойз Л. С.* Индикаторная и сопряженная диаграммы целой функции уточненного порядка. Препринт 789Ф, Красноярск, 1998. **12.** *Губреев Г. М.* Матем. сб., **190**, вып. 12, 3–36 (1999). **13.** *Губреев Г. М.* Алгебра и анализ, **12**, вып. 6, 1–97 (2000). **14.** *Губреев Г. М., Волкова М. Г.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **290**, 23–41 (2002). **15.** *Левин Б. Я.* Записки физ.-мат. ф-та ХГУ и ХМО, **27**, 39–48 (1961).

Южноукраинский педагогический
государственный университет (г. Одесса)
email: varv@rambler.ru

Поступило в редакцию
20 февраля 2003 г.

УДК 517.956

Об усреднении периодических параболических систем*

© 2004. Т. А. СУСЛИНА

1. Рассматривается вопрос об усреднении (гомогенизации) задачи Коши для параболической системы вида

$$\rho(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad \rho(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad (1)$$

в пределе малого периода ε , стремящегося к нулю. Здесь $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ есть $\mathbb{C}^n$ -значная функция от $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ и $t \geq 0$, $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ — матричный эллиптический оператор с периодическими коэффициентами, зависящими от $\varepsilon^{-1}\mathbf{x}$, и ρ — периодическая положительная матрица. Точное описание оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ см. ниже в разд. 2, 4. Задача гомогенизации для параболических уравнений активно изучалась традиционными методами теории усреднений (см., например, книги [1–3]). Соответствующие результаты дают сходимость (в подходящем функциональном классе) решений $\mathbf{u}_\varepsilon$ к решению $\mathbf{u}_0$ усредненной системы с постоянными эффективными коэффициентами. Мы используем абстрактный теоретико-операторный подход, развитый применительно к эллиптическим системам в статьях [4, 5]. Этот подход позволяет не только установить сходимость $\mathbf{u}_\varepsilon$ к $\mathbf{u}_0$ по норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ (при фиксированном t), но и получить оценку для нормы разности $\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0$, точную по порядку и равномерную относительно $L_2(\mathbb{R}^d)$ -нормы начального значения ϕ . Точнее говоря, получается оценка порядка $\varepsilon t^{-1/2}$ для операторной нормы разности разрешающих операторов для задачи (1) и для «усредненной» задачи Коши (см. ниже теоремы 3, 4).

Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означает норму в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}}$ означает норму ограниченного оператора в $\mathfrak{H}$. Далее, $|\cdot|$ — норма вектора в $\mathbb{C}^n$, а $\mathbf{1}_n$ — единичная $(n \times n)$ -матрица. Используем обозначения $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial/\partial x^j$, $j = 1, \dots, d$,

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00798).

$\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, \dots, D_d)$. Классы L_p вектор-функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_p(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Векторные классы Соболева обозначаются через $H^s(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, $s \in \mathbb{R}$.

2. Факторизованные операторы второго порядка. Мы рассматриваем самосопряженные матричные дифференциальные операторы (ДО) второго порядка в $\mathbb{R}^d$, допускающие факторизацию вида $\mathcal{X}^* \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — однородный ДО первого порядка. Соответствующий класс операторов был введен и подробно изучен в статьях [4, 5]. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, и $m \geq n$. Положим $\mathfrak{G} := L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\mathfrak{G}_* := L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$. Пусть $b(\mathbf{D}): \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_*$ — однородный ДО первого порядка с постоянными коэффициентами. Оператору $b(\mathbf{D})$ отвечает *символ* — $(m \times n)$ -матрица $b(\boldsymbol{\xi})$, которая является линейной однородной функцией от $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Предположим, что $\text{rank } b(\boldsymbol{\xi}) = n$, $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Тогда выполнены неравенства

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leq b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad |\boldsymbol{\theta}| = 1, \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 < \infty. \quad (2)$$

Пусть $(n \times n)$ -матрица-функция $f(\mathbf{x})$ и $(m \times m)$ -матрица-функция $h(\mathbf{x})$ (вообще говоря, с комплексными элементами) ограничены и ограниченно обратимы:

$$f, f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d), \quad h, h^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \quad (3)$$

Рассмотрим ДО $\mathcal{X} := hb(\mathbf{D})f: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_*$, $\text{Dom } \mathcal{X} := \{\mathbf{u} \in \mathfrak{G} : f\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)\}$. Оператор $\mathcal{X}$ замкнут. Самосопряженный в $\mathfrak{G}$ оператор $\mathcal{A} := \mathcal{X}^* \mathcal{X}$ порождается замкнутой в $\mathfrak{G}$ квадратичной формой $a[\mathbf{u}, \mathbf{u}] := \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{\mathfrak{G}_*}^2$, $\mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}$. Формально

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(g, f) = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}), \quad g(\mathbf{x}) := h(\mathbf{x})^* h(\mathbf{x}).$$

Отметим, что условия (2), (3) гарантируют оценки

$$c_0 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(f\mathbf{u})|^2 d\mathbf{x} \leq a[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq c_1 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(f\mathbf{u})|^2 d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X},$$

где $c_0 = \alpha_0 \|h^{-1}\|_{L_\infty}^{-2}$, $c_1 = \alpha_1 \|h\|_{L_\infty}^2$. Эти оценки позволяют говорить об эллиптичности оператора $\mathcal{A}$. При $f = \mathbf{1}_n$ используем обозначение $\mathcal{A}(g, \mathbf{1}_n) = \widehat{\mathcal{A}}(g) = \widehat{\mathcal{A}}$. Формально $\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ и $\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* \widehat{\mathcal{A}} f(\mathbf{x})$.

Ниже матрицы-функции f, h предполагаются *периодическими относительно некоторой решетки* $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. Через $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ обозначим элементарную ячейку решетки Γ .

Отметим, что скалярный эллиптический оператор $-\text{div } g(\mathbf{x}) \nabla$, возникающий в задачах диффузии, относится к рассматриваемому классу операторов. Здесь $g(\mathbf{x})$ — вещественная положительно определенная ограниченная $(d \times d)$ -матрица. Этот оператор имеет вид $\widehat{\mathcal{A}}(g) = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D}$ при $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$.

3. Аппроксимация для операторной экспоненты. Нас интересуют аппроксимации для операторов $e^{-\mathcal{A}t}$ и $f e^{-\mathcal{A}t} f^*$ при больших значениях параметра $t > 0$.

Пусть g^0 — *эффективная матрица*, отвечающая оператору $\widehat{\mathcal{A}}(g)$. Напомним (см. [4, 5]) выражение для постоянной положительно определенной $(m \times m)$ -матрицы g^0 . Пусть $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^m$ и $\mathbf{w}$ — слабое Γ -периодическое решение уравнения

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \mathbf{w} + \mathbf{C}) = 0. \quad (4)$$

Тогда g^0 определяется из соотношений

$$g^0 \mathbf{C} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\mathbf{w} + \mathbf{C}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{C}^m, \quad (5)$$

а $\widehat{\mathcal{A}}^0 := \widehat{\mathcal{A}}(g^0) = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ называется *эффективным оператором* для $\widehat{\mathcal{A}}(g)$. Определение (4), (5) для g^0 согласуется (см. [1–3]) с определением усредненной (эффективной) матрицы для ряда конкретных операторов математической физики.

ТЕОРЕМА 1. Пусть g^0 — эффективная матрица, определенная соотношениями (4), (5), и $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$. Тогда выполнена оценка

$$\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}t} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 t}\|_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}} \leq C_1 t^{-1/2}, \quad t > 0. \quad (6)$$

Постоянная C_1 зависит лишь от норм $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, от постоянных α_0 , α_1 из условия (2) и от параметров решетки Γ .

Перейдем к вопросу о поведении оператора $f e^{-\mathcal{A}t} f^*$. Положим

$$(\underline{f f^*})^{-1} := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1} d\mathbf{x}, \quad f^0 := (\underline{f f^*})^{1/2}. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(g, f)$. Пусть матрица g^0 определена в (4), (5) и матрица f^0 определена в (7). Положим $\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}(g^0, f^0) = f^0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f^0$. Тогда

$$\|f e^{-\mathcal{A}t} f^* - f^0 e^{-\mathcal{A}^0 t} f^0\|_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}} \leq C_2 t^{-1/2}, \quad t > 0. \quad (8)$$

Постоянная C_2 зависит лишь от норм $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, от постоянных α_0 , α_1 из условия (2) и от параметров решетки Γ .

Теорема 1 и (более общая) теорема 2 представляют *основные результаты работы*. Отметим, что оценки (6), (8) точны по порядку (относительно t), а постоянные C_1 , C_2 явно контролируются. Доказательство теорем 1 и 2 основано на абстрактном теоретико-операторном подходе, разработанном в [4, 5]. Поясним план доказательства на примере более простой теоремы 1. Оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ разлагается в прямой интеграл по операторам $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, действующим в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ и зависящим от *квазиимпульса* $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$. Здесь $\tilde{\Omega}$ — зона Бриллюэна двойственной решетки. Для операторной экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})t}$ удается найти удобную аппроксимацию в терминах так называемого *спектрального ростка* (см. [4, 5]) операторного семейства $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ при $\mathbf{k} = 0$. Поскольку эффективный оператор $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$ имеет тот же спектральный росток, что и $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, приходим к нужной оценке.

4. Гомогенизация. Пусть $\varepsilon > 0$ — параметр. Ниже, если $\psi(\mathbf{x})$ — какая-либо Γ -периодическая функция, используем обозначение $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. Рассмотрим семейства операторов $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = \widehat{\mathcal{A}}(g^\varepsilon)$, $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{A}(g^\varepsilon, f^\varepsilon)$ с быстро осциллирующими (при $\varepsilon \rightarrow 0$) коэффициентами. С помощью масштабного преобразования из теорем 1 и 2 непосредственно получаются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = \widehat{\mathcal{A}}(g^\varepsilon)$. Пусть матрица g^0 определена в (4), (5) и $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$. Тогда

$$\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon t} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 t}\|_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}} \leq C_1 \varepsilon t^{-1/2}, \quad t > 0, \varepsilon > 0. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{A}(g^\varepsilon, f^\varepsilon)$. Пусть g^0 определена в (4), (5) и f^0 определена в (7). Пусть $\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}(g^0, f^0) = f^0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f^0$. Тогда

$$\|f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon t} (f^\varepsilon)^* - f^0 e^{-\mathcal{A}^0 t} f^0\|_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}} \leq C_2 \varepsilon t^{-1/2}, \quad t > 0, \varepsilon > 0. \quad (10)$$

Теорема 4 автоматически позволяет исследовать задачу усреднения для следующей параболической системы. Пусть $\rho(\mathbf{x})$ есть Γ -периодическая измеримая $(n \times n)$ -матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, ограниченная и равномерно положительная. Пусть $\mathbb{C}^n$ -значная функция $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ от $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ и $t \geq 0$ является решением задачи Коши

$$\rho^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad \rho^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad (11)$$

где $\phi \in \mathfrak{G}$ — заданная функция. Факторизуем матрицу $\rho(\mathbf{x})^{-1}$ следующим образом: $\rho(\mathbf{x})^{-1} = f(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})^*$. (Например, можно положить $f = \rho^{-1/2}$.) Легко видеть, что тогда решение задачи (11) можно представить в виде $\mathbf{u}_\varepsilon = f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon t} (f^\varepsilon)^* \phi$, где $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{A}(g^\varepsilon, f^\varepsilon)$. Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ — решение «усредненной» задачи с постоянным эффективным коэффициентом g^0 и постоянным коэффициентом $\bar{\rho} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$:

$$\bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t), \quad \bar{\rho} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}). \quad (12)$$

Отметим, что $\bar{\rho}^{-1} = (f^0)^2$, где f^0 определено в соответствии с (7). Тогда решение задачи (12) можно записать в виде $\mathbf{u}_0 = f^0 e^{-\mathcal{A}^0 t} f^0$, где $\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}(g^0, f^0)$. Применяя теорему 4, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. При каждом фиксированном $t > 0$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, t)$ задачи (11) сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ по норме в $\mathfrak{G} = L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к решению $\mathbf{u}_0(\cdot, t)$ усредненной задачи (12). При этом выполнена оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, t) - \mathbf{u}_0(\cdot, t)\|_{\mathfrak{G}} \leq C_2 \varepsilon t^{-1/2} \|\phi\|_{\mathfrak{G}}, \quad t > 0, \varepsilon > 0. \quad (13)$$

Постоянная C_2 зависит от норм $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\rho\|_{L_\infty}$, $\|\rho^{-1}\|_{L_\infty}$, от постоянных α_0 , α_1 из условия (2) и от параметров решетки Γ .

Отметим, что оценка (13) точна по порядку. Она равномерна относительно нормы заданной функции ϕ в $\mathfrak{G}$, а постоянная C_2 контролируется явно.

5. О слабой сходимости решений и потоков. Помимо сходимости решений по норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ при фиксированном t с точной по порядку оценкой (13), имеет место слабая сходимость решений в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и слабая сходимость так называемых потоков в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ (также при фиксированном t). Результаты подобного рода традиционны в теории усреднений для задач диффузии. Для полноты изложения сформулируем соответствующий результат для более общей задачи (11).

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ — решение задачи (11) и $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ — решение усредненной задачи (12). Положим $\mathbf{p}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) := g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{p}_0(\mathbf{x}, t) := g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{q}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) := \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{q}_0(\mathbf{x}, t) := \widehat{\mathcal{A}}^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ и фиксированном $t > 0$ справедливы следующие утверждения:

- 1) решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, t)$ слабо сходятся в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к $\mathbf{u}_0(\cdot, t)$;
- 2) потоки $\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot, t)$ слабо сходятся в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ к $\mathbf{p}_0(\cdot, t)$;

- 3) функции $\mathbf{q}_\varepsilon(\cdot, t)$ слабо сходятся в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к $\mathbf{q}_0(\cdot, t)$;
 4) функции $\rho^\varepsilon \partial \mathbf{u}_\varepsilon / \partial t$ слабо сходятся в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к $\bar{\rho} \partial \mathbf{u}_0 / \partial t$.

В теореме 6 речь идет о слабых пределах при каждом $t > 0$. В дополнение к этому отметим следующее. Пусть $T > 0$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ слабо сходятся в $L_2([0, T]; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$ к $\mathbf{u}_0$, а потоки $\mathbf{p}_\varepsilon$ слабо сходятся в $L_2([0, T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ к $\mathbf{p}_0$. Для уравнения диффузии последние утверждения имеютс в [2, 3].

6. Средствами спектральной теории возмущений в [6, 3] изучалось поведение при больших t параболической функции Грина. В. В. Жиков сообщил автору, что использованные при этом соображения позволяют получить оценку вида (9) для оператора диффузии $-\operatorname{div} g(\mathbf{x}) \nabla$.

В заключение отметим, что постановка задачи о гомогенизации для параболических систем допускает целый ряд вариантов. Рассмотренный здесь вариант о задаче Коши в $L_2(\mathbb{R}^d)$ относится к числу основных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. Наука, М., 1984.
2. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Stud. Math. Appl., Vol. 5, North-Holland, Amsterdam-New York, 1978.
3. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. Наука, М., 1993.
4. Birman M. Sh., Suslina T. A. In: Systems, Approximations, Singular Integral Operators and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.
5. Бирман М. Ш., Суслина Т. А. Алгебра и анализ, **15**, вып. 5, 1–108 (2003).
6. Жиков В. В. Дифференциальные уравнения, **25**, №1, 44–50 (1989).

Санкт-Петербургский государственный университет,
 физический факультет
 email: tanya@petrov.stoic.spb.su

Поступило в редакцию
 28 августа 2004 г.

УДК 512.817.72+514.174.5

О подгруппах, порожденных отражениями, в группах, порожденных отражениями

© 2004. П. В. Тумаркин, А. А. Феликсон

1. Пусть $\mathbb{X}$ — гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$, евклидово пространство $\mathbb{E}^n$ или сферическое пространство $\mathbb{S}^n$. Многогранник в $\mathbb{X}$ называется *многогранником Кокстера*, если все его двугранные углы являются целыми частями π . *Кокстеровским разбиением* выпуклого многогранника в пространстве $\mathbb{X}$ называется такое его разбиение на конечное число многогранников Кокстера, что любые два многогранника разбиения, имеющие общую гипергрань, симметричны друг другу относительно нее. Многогранники разбиения при этом называются *фундаментальными*.

В данной работе доказано, что фундаментальный многогранник кокстеровского разбиения евклидова или гиперболического многогранника конечного объема, имеющего k гиперграней, имеет не более чем k гиперграней (теорема 1). В частности, если фундаментальная камера дискретной группы G , порожденной отражениями, имеет конечный объем и ограничена k гипергранями,