Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Тумаркин, А. А. Феликсон, О подгруппах, порожденных отражениями, в группах, порожденных отражениями, *Функц. анализ и его прил.*, 2004, том 38, выпуск 4, 90–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa131>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 10:59:52

- 3) функции $\mathbf{q}_\varepsilon(\cdot, t)$ слабо сходятся в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к $\mathbf{q}_0(\cdot, t)$;
 4) функции $\rho^\varepsilon \partial \mathbf{u}_\varepsilon / \partial t$ слабо сходятся в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к $\bar{\rho} \partial \mathbf{u}_0 / \partial t$.

В теореме 6 речь идет о слабых пределах при каждом $t > 0$. В дополнение к этому отметим следующее. Пусть $T > 0$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ слабо сходятся в $L_2([0, T]; H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$ к $\mathbf{u}_0$, а потоки $\mathbf{p}_\varepsilon$ слабо сходятся в $L_2([0, T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ к $\mathbf{p}_0$. Для уравнения диффузии последние утверждения имеют в [2, 3].

6. Средствами спектральной теории возмущений в [6, 3] изучалось поведение при больших t параболической функции Грина. В. В. Жиков сообщил автору, что использованные при этом соображения позволяют получить оценку вида (9) для оператора диффузии $-\operatorname{div} g(\mathbf{x}) \nabla$.

В заключение отметим, что постановка задачи о гомогенизации для параболических систем допускает целый ряд вариантов. Рассмотренный здесь вариант о задаче Коши в $L_2(\mathbb{R}^d)$ относится к числу основных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. Наука, М., 1984.
2. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Stud. Math. Appl., Vol. 5, North-Holland, Amsterdam-New York, 1978.
3. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. Наука, М., 1993.
4. Birman M. Sh., Suslina T. A. In: Systems, Approximations, Singular Integral Operators and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.
5. Бирман М. Ш., Суслина Т. А. Алгебра и анализ, **15**, вып. 5, 1–108 (2003).
6. Жиков В. В. Дифференциальные уравнения, **25**, №1, 44–50 (1989).

Санкт-Петербургский государственный университет,
 физический факультет
 email: tanya@petrov.stoic.spb.su

Поступило в редакцию
 28 августа 2004 г.

УДК 512.817.72+514.174.5

О подгруппах, порожденных отражениями, в группах, порожденных отражениями

© 2004. П. В. Тумаркин, А. А. Феликсон

1. Пусть $\mathbb{X}$ — гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$, евклидово пространство $\mathbb{E}^n$ или сферическое пространство $\mathbb{S}^n$. Многогранник в $\mathbb{X}$ называется *многогранником Кокстера*, если все его двугранные углы являются целыми частями π . *Кокстеровским разбиением* выпуклого многогранника в пространстве $\mathbb{X}$ называется такое его разбиение на конечное число многогранников Кокстера, что любые два многогранника разбиения, имеющие общую гипергрань, симметричны друг другу относительно нее. Многогранники разбиения при этом называются *фундаментальными*.

В данной работе доказано, что фундаментальный многогранник кокстеровского разбиения евклидова или гиперболического многогранника конечного объема, имеющего k гиперграней, имеет не более чем k гиперграней (теорема 1). В частности, если фундаментальная камера дискретной группы G , порожденной отражениями, имеет конечный объем и ограничена k гипергранями,

а $H \subset G$ — подгруппа конечного индекса, порожденная отражениями, то фундаментальная камера группы H ограничена не менее чем k гипергранями.

2. Выпуклый многогранник с заданным кокстеровским разбиением будем обозначать через P , а фундаментальный многогранник разбиения — через F . Любую гиперплоскость, содержащую гипергрань какого-либо фундаментального многогранника, но не содержащую гиперграни многогранника P , будем называть *зеркалом разбиения*.

Пусть Θ — кокстеровское разбиение многогранника P . Двугранный угол многогранника P , образованный гипергранями α и β , называется *неразрезанным* (в разбиении Θ), если ни одно зеркало разбиения Θ не содержит $\alpha \cap \beta$.

ЛЕММА 1. Пусть $P \subset \mathbb{X}$ — выпуклый многогранник, ограниченный k гипергранями. Пусть α — гиперплоскость, делящая P на многогранники P_1 и P_2 , причем каждый из этих многогранников имеет не менее $k + 1$ гиперграней. Тогда α пересекает внутренность каждой гиперграни многогранника P (в частности, все двугранные углы многогранника P неразрезанны). Если, кроме того, P_1 — многогранник Кокстера, то и P — многогранник Кокстера.

ЛЕММА 2. Пусть α — гиперплоскость, пересекающая внутренность каждой гиперграни выпуклого многогранника $P \subset \mathbb{X}$. Пусть α делит P на многогранники P_1 и P_2 , причем P_1 — многогранник Кокстера. Тогда α не содержит вершин многогранника P .

ЛЕММА 3. Пусть P — выпуклый многогранник конечного объема в $\mathbb{H}^n$ или $\mathbb{E}^n$ либо выпуклый многогранник в $\mathbb{S}^n$, не содержащий диаметрально противоположных точек сферы. Пусть α — гиперплоскость, пересекающая внутренность каждой гиперграни многогранника P и не содержащая его вершин. Пусть α делит P на многогранники P_1 и P_2 . Тогда ни один из многогранников P_1, P_2 не является остроугольным.

Доказательство лемм 1–3 основано на том, что продолжения граней остроугольного многогранника в $\mathbb{X}$ пересекаются только в том случае, когда пересекаются сами грани (см. [1]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть P — гиперболический или евклидов выпуклый многогранник конечного объема, имеющий k гиперграней и допускающий кокстеровское разбиение Θ с фундаментальным многогранником F . Тогда F имеет не более k гиперграней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что это утверждение неверно. Среди многогранников в $\mathbb{H}^n$ (в $\mathbb{E}^n$), для которых утверждение теоремы неверно, выберем какой-нибудь многогранник P с минимальным числом гиперграней. Обозначим число гиперграней многогранника P через k_0 .

Рассмотрим множество M выпуклых многогранников, удовлетворяющих следующим двум условиям: 1) каждая гипергрань многогранника принадлежит либо зеркалу разбиения Θ , либо гиперграни многогранника P ; 2) многогранник имеет ровно k_0 гиперграней. Ясно, что M непусто и конечно. Выберем в M многогранник $P_{\min}$, минимальный по включению. Ограничение $\Theta_{\min}$ разбиения Θ на многогранник $P_{\min}$ является кокстеровским разбиением с фундаментальным многогранником F , причем $P_{\min}$ имеет k_0 гиперграней, а F — более чем k_0 гиперграней.

Из минимальности многогранника $P_{\min}$ в множестве M и предположения, что утверждение теоремы верно для всех многогранников в $\mathbb{H}^n$ (в $\mathbb{E}^n$), имеющих меньше чем k_0 гиперграней, следует, что все двугранные углы многогранника $P_{\min}$ неразрезанны. Из этого же следует, что любое зеркало разбиения

$\Theta_{\min}$ пересекает каждую из гиперграней многогранника $P_{\min}$. Следовательно, любое зеркало разбиения $\Theta_{\min}$ разбивает многогранник $P_{\min}$ на два многогранника, каждый из которых имеет ровно $k_0 + 1$ гиперграней; одна из гиперграней лежит на зеркале разбиения $\Theta_{\min}$, а остальные k_0 являются гипергранями многогранника $P_{\min}$.

Рассмотрим множество N многогранников, которые можно получить описанной выше процедурой, т. е. разрезанием многогранника $P_{\min}$ одним зеркалом разбиения $\Theta_{\min}$. Множество N непусто и конечно. Выберем в N многогранник P_1 , минимальный по включению.

Нетрудно проверить, что все двугранные углы многогранника P_1 неразрезаны и, следовательно, P_1 является многогранником Кокстера. Пусть β — зеркало разбиения $\Theta_{\min}$, разбивающее многогранник $P_{\min}$ на многогранники P_1 и P_2 . По лемме 2 зеркало β не содержит вершин многогранника $P_{\min}$. Тогда по лемме 3 многогранник P_1 не может быть остроугольным. Противоречие с тем, что P_1 является многогранником Кокстера, доказывает утверждение теоремы. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что в сферическом случае утверждение теоремы неверно: сферический двуугольник можно разрезать на два равных прямоугольных треугольника. Можно ввести дополнительное требование, чтобы многогранник P не содержал диаметрально противоположных точек сферы. Тогда утверждение станет непосредственным следствием того, что сферический остроугольный многогранник, не содержащий двух диаметрально противоположных точек сферы, является симплексом (см. [2]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Требование конечности объема является существенным. Например, группа, порожденная двумя отражениями, зеркала m_1 и m_2 которых расходятся в $\mathbb{H}^n$ (параллельны в $\mathbb{E}^n$), является подгруппой индекса 2 в группе, порожденной отражениями относительно m_1 , m_2 и h , где h — гиперплоскость, перпендикулярная m_1 и m_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $P \subset \mathbb{X}$ — многогранник Кокстера конечного объема, имеющий k гиперграней, а G_P — группа, порожденная отражениями относительно гиперграней P . Известны примеры многогранников P , для которых группа G_P может быть порождена менее чем k образующими. Однако во всех таких примерах не все образующие являются отражениями. Возникает гипотеза, что группа G_P не может быть порождена менее чем k отражениями. Если гипотеза верна, то из теоремы 1 можно вывести следующее утверждение:

Пусть G — дискретная группа в $\mathbb{H}^n$ или $\mathbb{E}^n$, порожденная отражениями, F — фундаментальная камера группы G , а $H \subset G$ — подгруппа конечного индекса, порожденная отражениями. Если объем многогранника F конечен и F ограничен k гипергранями, то H не может быть порождена менее чем k отражениями.

Авторы благодарны Э. Б. Винбергу за полезные обсуждения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Е. М. Матем. заметки, **8**, 521–527 (1970).
2. Coxeter H. S. M. Finite groups generated by reflections, and their subgroups generated by reflections. Proc. Cambridge Philos. Soc., **30**, 466–482 (1934).