Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гомилко, О факторизации оператор-функций
в гильбертовом пространстве, *Функц. анализ и его
прил.*, 2003, том 37, выпуск 1, 19–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa133>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским
соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 15:53:18

УДК 517.9

О факторизации оператор-функций в гильбертовом пространстве

© 2003. А. М. Гомилко

1. Введение. Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, а $L = L(H)$ — алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в H . Через $\sigma(A)$ обозначаем спектр оператора $A \in L(H)$, A^* — сопряженный к A оператор, I — единичный оператор и $R(A, \lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \notin \sigma(A)$, — резольвента оператора A . Для оператора $A \in L$ через $W(A)$ обозначаем его числовой образ: $W(A) = \{(Af, f) : \|f\| = 1\}$.

Всюду далее $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — окружность единичного радиуса с началом в $\lambda = 0$, которая разбивает комплексную плоскость на области $G^+ = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$ и $G^- = \{\lambda : |\lambda| > 1\}$. Пусть $C(\Gamma, L)$ ($H_\alpha(\Gamma, L)$) — алгебра всех непрерывных (удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α) оператор-функций на Γ со значениями в L . Через $H_\alpha^+(\Gamma, L)$ ($H_\alpha^-(\Gamma, L)$) обозначаем подалгебру алгебры $H_\alpha(\Gamma, L)$, состоящую из оператор-функций, которые допускают голоморфные продолжения в G^+ (G^-). Через $\text{ind}_\Gamma a(\zeta)$ будем обозначать индекс функции $a(\zeta) \in C(\Gamma)$ ($a(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in \Gamma$).

Данная заметка посвящена обобщению следующего результата А. С. Маркуса и В. И. Мацаева [1]: если оператор-функция $A(\zeta)$ принадлежит $H_\alpha^+(\Gamma, L)$, $\alpha \in (0, 1)$, причем

$$\inf_{\zeta \in \Gamma, \|f\|=1} |(A(\zeta)f, f)| > 0 \quad (1)$$

и функция $(A(\lambda)f, f)$ ($f \neq 0$) имеет в круге G^+ ровно k корней, то имеет место факторизация

$$A(\lambda) = A_+(\lambda)P_k(\lambda), \quad P_k(\lambda) = \lambda^k I + \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^n B_n, \quad B_n \in L, \quad |\lambda| \leq 1, \quad (2)$$

где $A_+(\lambda) \in H_\alpha^+(\Gamma, L)$, причем $A_+(\lambda)$ обратим при $\lambda \in G^+ \cup \Gamma$, а $P_k(\lambda)$ обратим при $\lambda \in G^- \cup \Gamma$.

Замечание 1. При выполнении условия (1) индекс k функции $(A(\zeta)f, f)$, $|\zeta| = 1$, определяющий количество ее корней в G^+ , не зависит от выбора вектора $f \neq 0$ [2].

Доказательство утверждения (2) основано на следующей лемме.

ЛЕММА 1 [1]. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и оператор-функция $A(\zeta)$ принадлежит $H_\alpha(\Gamma, L)$. Если выполнено условие (1) и $k = \text{ind}_\Gamma (A(\zeta)f, f)$ ($f \neq 0$), то

$$A(\zeta) = \zeta^k A_+(\zeta)A_-(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad A_\pm(\zeta) \in H_\alpha^\pm(\Gamma, L),$$

причем $A_+(\lambda)$ ($A_-(\lambda)$) обратим при $\lambda \in G^+ \cup \Gamma$ ($\lambda \in G^- \cup \Gamma$) и $A_-(\infty) = I$.

Условие (1) имеет геометрический характер: оно формулируется в терминах выбранного скалярного произведения пространства H . Это условие равносильно следующему [2]: точка $\lambda = 0$ для любого $\zeta \in \Gamma$ не принадлежит замыканию числового образа $W(A(\zeta))$ оператора $A(\zeta)$:

$$0 \notin \overline{W(A(\zeta))} \quad \forall \zeta \in \Gamma. \quad (3)$$

В случае гильбертова пространства числовой образ оператора $A \in L$ является выпуклым множеством и $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$ [3]. Следовательно, выпуклая оболочка $\text{conv } \sigma(A)$ спектра оператора A принадлежит замыканию его числового образа (множество $\text{conv } \sigma(A)$ является замкнутым в силу компактности множества $\sigma(A)$, $A \in L$). Таким образом, при выполнении условия (1) получаем, что выполняется условие

$$0 \notin \text{conv } \sigma(A(\zeta)) \quad \forall \zeta \in \Gamma. \quad (4)$$

В данной статье показано, что при выполнении условия (4) для оператор-функции $A(\zeta) \in C(\Gamma, L)$ возможно введение понятие индекса $k = \text{ind}_\Gamma A(\zeta)$, и если, кроме того, $A(\zeta) \in H_\alpha^+(\Gamma, L)$, то справедлив аналог утверждения (2), а именно, $A(\zeta)$ допускает факторизацию вида

$$A(\lambda) = A_{1,+}(\lambda)P_k(\lambda)A_{2,+}(\lambda), \quad A_{j,+}(\lambda) \in H_\alpha^+(\Gamma, L), \quad j = 1, 2, \quad |\lambda| \leq 1, \quad (5)$$

причем $A_{j,+}(\lambda)$ обратимы при $|\lambda| \leq 1$.

Отметим, что при фиксированном $\zeta_0 \in \Gamma$ из (4) вытекает существование такого эквивалентного скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_0$ в H , в котором для $A(\zeta_0)$ выполняется условие (3) (см. [4, 5]). В общем случае для некоммутирующего семейства операторов $A(\zeta)$ из условия (4) не следует существования не зависящего от $\zeta \in \Gamma$ скалярного произведения, в котором бы выполнялось условие (3) для всех $\zeta \in \Gamma$. Соответствующий простой пример приведен в разд. 3. Этот же пример иллюстрирует точность утверждения (5), а именно, показывает, что условие (4) не гарантирует существования факторизации вида (2). Приведен также пример оператор-функции $A(\zeta)$, удовлетворяющей условию (4), для которой условие (3) не выполняется ни в каком скалярном произведении, однако $A(\lambda)$ допускает факторизацию (2).

2. Теорема о факторизации. Далее понадобится следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть оператор-функция $A(\zeta)$ принадлежит $H_\alpha(\Gamma, L)$, $0 < \alpha \leq 1$, причем замкнутое ограниченное множество $\Sigma = \overline{\bigcup_{\zeta \in \Gamma} \sigma(A(\zeta))}$ лежит в открытой левой полуплоскости $\text{Re } \lambda < 0$. Тогда

$$S(\zeta) := 2 \int_0^\infty \exp \{A(\zeta)t\} \exp \{(A^*(\zeta))t\} dt \in H_\alpha(\Gamma, L). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем такой положительно ориентированный замкнутый жорданов контур γ , что $\text{Re } \lambda \leq -r < 0$ для любого $\lambda \in \gamma$ и Σ лежит внутри γ . При этом для оператора $\exp \{A(\zeta)t\}$ справедливо представление [4]

$$\exp \{A(\zeta)t\} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \exp \{\lambda t\} R(A(\zeta), \lambda) d\lambda \quad \forall \zeta \in \Gamma \quad (7)$$

и выполняется оценка

$$\|R(A(\zeta), \lambda)\| \leq c \quad \forall \zeta \in \Gamma, \quad \lambda \in \gamma, \quad (8)$$

которая вытекает из непрерывности оператор-функции $R(A(\zeta), \lambda)$ как функции двух переменных $\zeta \in \Gamma$, $\lambda \in \gamma$.

Из (7), (8) получаем оценку

$$\|\exp\{A(\zeta)t\}\| \leq c_1 \exp\{-rt\}, \quad t > 0, \zeta \in \Gamma \quad (9)$$

с постоянной $c_1 = cl(\gamma)/(2\pi)$, где $l(\gamma)$ — длина кривой γ . Далее, из (7) следует равенство

$$\begin{aligned} & \exp\{A(\zeta_1)t\} - \exp\{A(\zeta_2)t\} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp\{\lambda t\} R(A(\zeta_1), \lambda) [A(\zeta_2) - A(\zeta_1)] R(A(\zeta_2), \lambda) d\lambda, \end{aligned}$$

на основании которого, с учетом (9), заключаем, что при $t > 0$, $\zeta \in \Gamma$ справедлива оценка

$$\|\exp\{A(\zeta_1)t\} - \exp\{A(\zeta_2)t\}\| \leq c_2 \exp\{-rt\} \|A(\zeta_1) - A(\zeta_2)\| \quad (10)$$

с постоянной $c_2 = cc_1$. Утверждение леммы вытекает из соотношения

$$\begin{aligned} S(\zeta_1) - S(\zeta_2) &= 2 \int_0^\infty \exp\{A(\zeta_1)t\} [\exp\{A^*(\zeta_1)t\} - \exp\{A^*(\zeta_2)t\}] dt \\ &\quad + 2 \int_0^\infty [\exp\{A(\zeta_1)t\} - \exp\{A(\zeta_2)t\}] \exp\{A^*(\zeta_2)t\} dt \end{aligned}$$

и оценок (9), (10), примененных к оператор-функциям $A(\zeta)$ и $A^*(\zeta)$.

ЛЕММА 3. Пусть оператор-функция $A(\zeta)$ принадлежит $C(\Gamma, L)$. Предположим, что выполнено условие (4). Тогда найдется такая скалярная функция $a(\zeta) \in H_1(\Gamma)$, что для некоторого $r_0 > 0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}(a(\zeta)\sigma(A(\zeta))) \leq -r_0 \quad \forall \zeta \in \Gamma. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из компактности окружности Γ и свойства полунепрерывности сверху спектра оператора из L (см. [3, с. 61]) нетрудно заключить, что найдется такое $r_0 > 0$, для которого

$$\operatorname{dist}(\operatorname{conv} \sigma(A(\zeta)), \{0\}) \geq r_0 \quad \forall \zeta \in \Gamma.$$

При этом в силу выпуклости множества $\operatorname{conv} \sigma(A(\zeta))$ для любого $\zeta \in \Gamma$ существует такое число $a_\zeta \in \mathbb{C}$, что справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(a_\zeta \operatorname{conv} \sigma(A(\zeta))) \leq -r_0.$$

Отсюда легко выводится существование требуемой функции $a(\zeta)$ (например, используя компактность окружности Γ , можно построить функцию $a(\zeta) \in H_1(\Gamma)$ в виде кусочно линейной функции относительно переменного $\zeta \in \Gamma$ — см. построения леммы 3 работы [2]). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть выполнены условия леммы 3 и $a_0(\zeta)$, $a_1(\zeta)$ — произвольные непрерывные функции от $\zeta \in \Gamma$, для которых выполняется утверждение (11). Тогда для любого $\varepsilon \in [0, 1]$ непрерывная функция $a_\varepsilon(\zeta) = (1 - \varepsilon)a_0(\zeta) + \varepsilon a_1(\zeta)$ не обращается в нуль при $\zeta \in \Gamma$. Таким образом, функции $a_0(\zeta)$, $a_1(\zeta)$ являются гомотопными и поэтому имеют равные индексы (см. [6, гл. 1]): $\operatorname{ind}_\Gamma a_0(\zeta) = \operatorname{ind}_\Gamma a_1(\zeta)$.

Лемма 3 и замечание 2 позволяют дать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть для оператор-функции $A(\zeta) \in C(\Gamma, L)$ выполнено условие (4). Индексом $\text{ind}_\Gamma A(\zeta)$ на Γ называется индекс функции $1/a(\zeta)$:

$$\text{ind}_\Gamma A(\zeta) := \text{ind}_\Gamma 1/a(\zeta) = -\text{ind}_\Gamma a(\zeta), \quad (12)$$

где $a(\zeta) \in C(\Gamma)$ — произвольная функция, для которой выполняется неравенство (11) с некоторым $r_0 > 0$.

Отметим, что данное определение тесно связано с понятием степени вращения многозначного отображения $\zeta \rightarrow \text{con} \sigma(A) \subset \mathbb{C}$, $\zeta \in \Gamma$ (см. [7]). Ясно, что при выполнении условия (1) справедливо равенство $\text{ind}_\Gamma A(\zeta) = \text{ind}_\Gamma (A(\zeta)f, f)$ для любого ненулевого вектора $f \in H$. Пусть $A(\zeta) \in C(\Gamma, L)$ удовлетворяет (4) и γ — замкнутый контур из доказательства леммы 2. Тогда если $a(\zeta) \in H_1(\Gamma)$ — функция из утверждения леммы 3, то можно определить многозначную логарифмическую оператор-функцию

$$\ln A(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\ln \lambda) R(a(\zeta)A(\zeta), \lambda) d\lambda - (\ln a(\zeta))I, \quad \zeta = e^{i\varphi},$$

где на γ выбрана однозначная ветвь логарифма $\ln \lambda$. При этом $A(\zeta) = e^{\ln A(\zeta)}$, $\zeta \in \Gamma$, и, как и в скалярном случае, получаем для индекса $k = \text{ind}_\Gamma A(\zeta)$ равенство

$$k = -\text{ind}_\Gamma a(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} [\ln A(e^{(\varphi+2\pi)i}) - \ln A(e^{i\varphi})], \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Аналогом леммы 1 в случае выполнения условия (4) является следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Пусть для оператор-функции $A(\zeta) \in H_\alpha(\Gamma, L)$, $\alpha \in (0, 1)$, выполняется условие (4) и, в соответствии с определением (12), $k = \text{ind}_\Gamma A(\zeta)$. Тогда $A(\zeta)$ допускает факторизацию

$$A(\zeta) = \zeta^k A_{1,+}(\zeta) A_{-}(\zeta) A_{2,+}(\zeta), \quad (13)$$

где $A_{j,+}(\zeta) \in H_\alpha^+(\Gamma, L)$, $j = 1, 2$, $A_{-}(\zeta) \in H_\alpha^-(\Gamma, L)$, причем $A_{j,+}(\lambda)$ обратимы при $\lambda \in G^+ \cup \Gamma$, а $A_{-}(\lambda)$ обратим при $\lambda \in G^- \cup \Gamma$ и $A_{-}(\infty) = I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a(\zeta) \in H_1(\Gamma)$ — функция из утверждения леммы 3. Тогда, согласно лемме 2, самосопряженная оператор-функция

$$S(\zeta) = 2 \int_0^\infty \exp \{ \tilde{A}(\zeta)t \} \exp \{ \tilde{A}^*(\zeta)t \} dt, \quad \tilde{A}(\zeta) = a(\zeta)A(\zeta),$$

принадлежит $H_\alpha(\Gamma, L)$. При этом справедливы соотношения [4]

$$\text{Re}(\tilde{A}(\zeta)S(\zeta)) = -I, \quad (S(\zeta)f, f) \geq \frac{1}{2\|\tilde{A}(\zeta)\|}, \quad \zeta \in \Gamma.$$

В частности, согласно [8] (можно воспользоваться также леммой 1), оператор-функция $S(\zeta)$ допускает факторизацию $S(\zeta) = S_+(\zeta)S_-(\zeta)$, где $S_+(\zeta) \in H_\alpha^+(\Gamma, L)$ ($S_-(\zeta) \in H_\alpha^-(\Gamma, L)$), причем $S_+(\zeta)$ ($S_-(\zeta)$) обратим при $\zeta \in G^+ \cup \Gamma$ ($\zeta \in G^- \cup \Gamma$) и $S_-(\infty) = I$. Тогда, применяя лемму 1 к $\tilde{A}(\zeta)S(\zeta)$, получаем, что

$$a(\zeta)A(\zeta)S_+(\zeta)S_-(\zeta) = M_+(\zeta)M_-(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad M_\pm(\zeta) \in H_\alpha^\pm(\Gamma, L), \quad (14)$$

где $M_+(\zeta)$ ($M_-(\zeta)$) обратим внутри (вне) Γ и $M_-(\infty) = I$. Далее, функция $1/a(\zeta)$ допускает факторизацию $1/a(\zeta) = \zeta^k a_+(\zeta)a_-(\zeta)$, $a_\pm(\zeta) \in H_\alpha^\pm(\Gamma)$, причем

$a_+(\zeta)$ ($a_-(\zeta)$) обратима при $\zeta \in G^+ \cup \Gamma$ ($\zeta \in G^- \cup \Gamma$) и $a_-(\infty) = 1$. Из (14) получаем факторизацию (13) с оператор-функциями

$$A_{1,+}(\zeta) = a_+(\zeta)M_+(\zeta), \quad A_-(\zeta) = a_-(\zeta)M_-(\zeta)S_-^{-1}(\zeta), \quad A_{2,+}(\zeta) = S_+^{-1}(\zeta).$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Пусть оператор-функция $A(\zeta)$ принадлежит $H_\alpha^+(\Gamma, L)$, $\alpha \in (0, 1)$, и для нее выполнено условие (4), причем $k = \text{ind}_\Gamma A(\zeta)$. Тогда $k \geq 0$ и $A(\zeta)$ допускает факторизацию (5), где

$$A_{j,+}(\lambda) \in H_\alpha^+(\Gamma, L), \quad j = 1, 2, \quad P_k(\lambda) = \lambda^k I + \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^n B_n, \quad B_n \in L, \quad (15)$$

причем $A_{j,+}(\lambda)$ обратим при $\lambda \in G^+ \cup \Gamma$, а пучок операторов $P_k(\lambda)$ обратим при $\lambda \in G^- \cup \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 имеем факторизацию (13). В частности, имеет место равенство $A_{1,+}^{-1}(\zeta)A(\zeta)A_{2,+}^{-1}(\zeta) = P_k(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, где $P_k(\zeta) = \zeta^k A_-(\zeta)$. Так как по условию $A(\zeta) \in H_\alpha^+(\Gamma, L)$, то отсюда заключаем, что $P_k(\zeta)$ продолжается аналитическим образом на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. С другой стороны, $A_-(\infty) = I$ и, значит, $k \geq 0$ и $P_k(\lambda)$ является полиномиальной оператор-функцией вида (15), причем $P_k(\lambda)$ обратим при $\lambda \in G^- \cup \Gamma$. Теорема доказана.

В условиях теоремы из факторизации (5) вытекает, что спектр оператор-функции $A(\lambda)$ (т.е. множество тех λ , при которых $A(\lambda)$ не является непрерывно обратимым оператором), расположенный в круге $G^+ \cup \Gamma$, совпадает со спектром пучка операторов $P_k(\lambda)$.

3. Примеры. В двумерном гильбертовом пространстве $H = \mathbb{C}^2$ рассмотрим голоморфную оператор-функцию

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 - 4\lambda & 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (16)$$

Вычисления показывают, что собственными значениями оператора $A(\zeta)$ являются числа $\mu_\pm(\zeta) = -2\zeta + 1 \pm i$ и множество $\text{conv } \sigma(A(\zeta))$ образует отрезок, соединяющий точки μ_+ и μ_- . При этом для функции $a(\zeta) = 1/\zeta$ выполняется равенство

$$\text{Re}\{a(\zeta)\mu_\pm(\zeta)\} = \text{Re}\{-2 + (1 \pm i)\zeta^{-1}\} \leq -2 + \sqrt{2} < 0, \quad |\zeta| = 1. \quad (17)$$

Оценка (17) показывает, что $\text{ind}_\Gamma A(\zeta) = \text{ind}_\Gamma \zeta = 1$ и $A(\zeta)$ удовлетворяет условиям теоремы с $k = 1$. Спектр оператор-функции $A(\lambda)$ состоит из простых собственных значений $\lambda = (1 \pm i)/2$, которые лежат в единичном круге. При этом каждому из этих собственных значений отвечает один и тот же собственный вектор $\vec{e} = \{0, 1\}^T$ (индекс T означает транспонирование). Таким образом, система нормированных собственных векторов оператор-функции $A(\lambda)$, $|\lambda| < 1$, не образует базиса в пространстве $\mathbb{C}^2$. Так как в конечномерном случае из факторизации (2) с $k = 1$ вытекает, что такая система должна образовывать базис, то приведенный пример показывает, что условие (4) не эквивалентно условию (1): не существует никакого скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в $\mathbb{C}^2$, при котором для

$A(\lambda)$ из (16) выполняется условие (1). При этом $A(\lambda)$ допускает факторизацию вида (5) с оператор-функциями $A_{1,+}(\lambda) = I$ и

$$A_{2,+}(\lambda) = \begin{pmatrix} -4 & 2\lambda - 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & \lambda - 1/2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Отметим, что собственным значениям $\lambda_1 = (1 - i)/2$, $\lambda_2 = (1 + i)/2$ линейного пучка операторов $P_1(\lambda)$ из (18) отвечают собственные векторы $\vec{e}_1 = \{-i, 1\}^T$, $\vec{e}_2 = \{i, 1\}^T$.

Из приведенного примера следует, что условие (1) не выполняется ни при каком скалярном произведении и для транспонированной к $A(\lambda)$ оператор-функции

$$A^T(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 - 4\lambda & -2 \\ 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, переходя в (5), (18) к транспонированным матрицам, получаем для $A^T(\lambda)$ факторизацию $A^T(\lambda) = A_{2,+}^T(\lambda)P_1^T(\lambda)$. Таким образом, факторизация вида (2) для оператор-функции из $H_\alpha^+(\Gamma, L)$ возможна и в случае, когда выполняется лишь условие (4) и не выполняется (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркус А. С., Мацаев В. И. К спектральной теории голоморфных оператор-функций в гильбертовом пространстве. Функц. анализ и его прил., **9**, вып. 1, 76–77 (1975).
2. Маркус А. С., Мацаев В. И. О спектральных свойствах голоморфных оператор-функций в гильбертовом пространстве. Матем. исследования, **9**, вып. 4, 79–90 (1974).
3. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. Мир, М., 1970.
4. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Наука, М., 1970.
5. Гомилко А. М., Радзиевский Г. В. О числовых образах семейства коммутирующих операторов. Матем. заметки, **62**, вып. 5, 787–791 (1997).
6. Красносельский М. А. Векторные поля на плоскости. ГИФМЛ, М., 1963.
7. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений. УМН, **35**, вып. 1, 59–126 (1980).
8. Gohberg I., Laiterer Yu. The factorization of operator-functions relative to a contour. II. The canonical factorization of operator-functions that are close to the identity operator. Math. Nachr., **54**, 41–74 (1972).

Институт гидромеханики
НАН Украины, Киев
e-mail: amg@ihm.kiev.ua

Поступило в редакцию
25 марта 2002 г.