Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Натанзон, Виттеновское решение иерархии
Гельфанда–Дикого, *Функц. анализ и его прил.*, 2003,
том 37, выпуск 1, 25–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa134>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 03:46:03

УДК 517.958+512.772.5

Виттеновское решение иерархии Гельфанда–Дикого*

© 2003. С. М. НАТАНЗОН

Посвящается И. М. Гельфанду

§1. Введение

Иерархию Гельфанда–Дикого (или, что тоже самое, n -КдФ-иерархию) обычно описывают в терминах формальных псевдодифференциальных операторов. Пусть $u_j = u_j(x)$ ($j = 0, \dots, n-2$) — функция от бесконечного числа переменных $x = (x_1, x_2, \dots)$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial = \partial_1$ и $L = \partial^n + u_{n-2}\partial^{n-2} + \dots + u_0$. Обозначим через $L^{i/n}$ псевдодифференциальный оператор, такой, что $(L^{i/n})^n = L^i$. Пусть $[L^{i/n}]_+$ — дифференциальная часть оператора $L^{i/n}$. Тогда иерархия Гельфанда–Дикого [5] — это система дифференциальных уравнений на функции $u_0, \dots, u_{n-2}$, которая следует из системы уравнений $\partial_i L = [[L^{i/n}]_+, L]$ ($i = 1, 2, \dots$).

Любое решение $u_0, \dots, u_{n-2}$ порождается некоторой функцией $v = v(x_1, x_2, \dots)$. Среди решений существует одно, обладающее замечательными свойствами: оно удовлетворяет струнному уравнению, порождает вакуумный вектор W -алгебры, имеет представление в виде матричного интеграла и т. д. [1].

Мы называем это решение W виттеновским, поскольку, согласно гипотезе Виттена, функция $W(x_1, x_2/2, x_3/3, \dots)$ является производящей функцией $F(x_1, x_2, x_3, \dots)$ для чисел пересечений Мамфорда–Мориты–Мюллера стабильных когомологических классов пространства модулей n -спинорных расслоений на римановых поверхностях с проколами [12]. Эта гипотеза доказана для поверхностей рода 0 [12] и для $n = 2$ [6, 10].

В этой статье мы находим рекуррентные соотношения между коэффициентами тейлоровского разложения функции W . Гипотеза Виттена сводится, таким образом, к утверждению, что эти же соотношения выполняются и для чисел пересечений n -спинорных классов Мамфорда–Мориты–Мюллера. Кроме того, эти соотношения дают алгоритм для построения тейлоровского разложения функции W и, следовательно, для вычисления n -спинорных чисел Мамфорда–Мориты–Мюллера в предположении, что гипотеза Виттена верна. Кроме того, мы доказываем, что

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0, \dots, 0) = W\left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_{n-1}}{n-1}, 0, 0, \dots\right),$$

и, следовательно, гипотеза Виттена верна для чисел $(c_D(\nu), \overline{M}'_{g,s})$ в обозначениях [12].

Другим косвенным подтверждением гипотезы Виттена является доказанное в настоящей статье представление решения W в виде суммы квазиоднородных

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ-01-01-00739, NWO 047.008.005 и INTAS-00-0259.

функций, $W = \sum_{g=0}^{\infty} W^g$, степеней $(1-g)(2+2/n)$. Это представление соответствует разложению $F = \sum_{g=0}^{\infty} F^g$ функции F по производящим функциям F^g , отвечающим поверхности рода g . Согласно [12], функции F^g тоже являются квазиоднородными функциями степеней $(1-g)(2+2/n)$.

Мы доказываем, что $W^0(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, \dots) = W(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, \dots)$ и, следовательно, $F^0(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, \dots) = F(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, \dots)$. Эта функция является полиномом. Простые формулы для его вычисления приводятся в [9].

Статья организована следующим образом. В §§2–4 мы, следуя [4, 8], представляем иерархию КП в виде системы дифференциальных уравнений специального вида. В §5 мы доказываем, что n -иерархия Гельфанда–Дикого эквивалентна системе дифференциальных уравнений вида

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} v = \sum_{m=1}^{\infty} N_{i_1 \dots i_k}^m \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_m \\ t_1 & \cdots & t_m \end{pmatrix} \partial_{s_1} \partial_1^{t_1} v \cdots \partial_{s_m} \partial_1^{t_m} v, \quad (1.1)$$

где $i_j, t_i \geq 1$, $s_i < n$ и $N_{i_1 \dots i_k}^m \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_m \\ t_1 & \cdots & t_m \end{pmatrix}$ — рациональные константы, значения которых можно явно найти, используя указанный в статье алгоритм построения системы (1.1). Последний параграф посвящен исследованию свойств виттеновского решения W системы (1.1).

Автор благодарит Б. А. Дубровина за полезные обсуждения.

§2. Комбинаторная лемма

Мы начнем с необходимой для дальнейшего комбинаторной леммы. Для натуральных $s, i_1, \dots, i_n$ и целых неотрицательных $j_1, \dots, j_n$ определим числа $P_s \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ рекуррентными формулами

$$P_s \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.1)$$

$$P_s \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = C_s^j \quad \text{для } j > 0, \quad (2.2)$$

$$P_s \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n!} C_s^{j_1 + \cdots + j_n} \frac{(j_1 + \cdots + j_n)!}{j_1! \cdots j_n!} - \sum_{q=1}^{n-1} P_s \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_q \\ j_1 & \cdots & j_q \end{pmatrix} \frac{1}{(n-q)!} C_{s-(i_1 + \cdots + i_q + j_1 + \cdots + j_q)}^{j_{q+1} + \cdots + j_n} \frac{(j_{q+1} + \cdots + j_n)!}{j_{q+1}! \cdots j_n!} \quad (2.3)$$

для $(j_1, \dots, j_n) \neq (0, \dots, 0)$.

Обозначим через $\begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{bmatrix}$ множество всех матриц, которые получаются из матрицы $\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ перестановкой столбцов. Пусть $\left\| \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \right\|$ — число таких матриц. Положим

$$P_s \begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{bmatrix} = \sum P_s \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix},$$

где сумма берется по всем матрицам $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ из множества $\begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{bmatrix}$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $m > 0$, $k > 0$ и $j_n \geq 1$ для $n \leq m$. Тогда

$$P_s \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_m & i_{m+1} & \dots & i_{m+k} \\ j_1 & \dots & j_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 0, & \text{если } s \geq i_1 + \dots + i_m + j_1 + \dots + j_m, \\ \frac{1}{k!} \left\| \begin{bmatrix} i_{m+1} & \dots & i_{m+k} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\| P_s \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & j_m \end{bmatrix}, & \text{если } s < i_1 + \dots + i_m + j_1 + \dots + j_m. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем лемму для $m = 1$, используя индукцию по k . Для $m = k = 1$

$$\begin{aligned} P_s \begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & 0 \end{bmatrix} &= P_s \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & 0 \end{pmatrix} + P_s \begin{pmatrix} i_2 & i_1 \\ 0 & j_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} C_s^{j_1} - P_s \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} \cdot C_{s-(i_1+j_1)}^0 + \frac{1}{2} C_s^{j_1} - P_s \begin{pmatrix} i_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot C_{s-i_2}^0 \\ &= C_s^{j_1} - C_s^{j_1} C_{s-(i_1+j_1)}^0 = \begin{cases} 0, & \text{если } s \geq i_1 + j_1, \\ C_s^{j_1} = P_s \begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \end{bmatrix}, & \text{если } s < i_1 + j_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Докажем теперь лемму для $m = 1$, $k = N$, считая, что она доказана для $m = 1$, $k < N$. Если $s \geq i_1 + j_1$, то

$$\begin{aligned} P_1 \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{k+1} \\ j_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{k!} C_s^{j_1} \left\| \begin{bmatrix} i_2 & \dots & i_{k+1} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\| - P_s \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} \cdot C_{s-(i_1+j_1)}^0 \cdot \frac{1}{k!} \left\| \begin{bmatrix} i_2 & \dots & i_{k+1} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\| = 0. \end{aligned}$$

Если $s < i_1 + j_1$, то

$$\begin{aligned} P_1 \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{k+1} \\ j_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{k!} C_s^{j_1} \left\| \begin{bmatrix} i_2 & \dots & i_{k+1} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\| - A \cdot C_{s-(i_1+j_1)}^0 \\ &= \frac{1}{k!} \left\| \begin{bmatrix} i_2 & \dots & i_{k+1} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\| P_s \begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, лемма доказана для $m = 1$.

Докажем теперь лемму для $m = N$, считая, что она доказана для $m < N$. Тогда

$$\begin{aligned}
& P_s \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_m & i_{m+1} & \dots & i_{m+k} \\ j_1 & \dots & j_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\
&= \sum_{\substack{(\alpha_1 \dots \alpha_m) \in [i_1 \dots i_m] \\ (\beta_1 \dots \beta_m) \in [j_1 \dots j_m]}} \left(\frac{1}{(m+k)!} C_s^{\beta_1 + \dots + \beta_m} \frac{(\beta_1 + \dots + \beta_m)!}{\beta_1! \dots \beta_m!} C_{m+k}^k \left\| \begin{bmatrix} i_{m+1} & \dots & i_{m+k} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\| \right. \\
&\quad \left. - \sum_{q=1}^m P_s \left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_q \\ \beta_1 & \dots & \beta_q \end{bmatrix} \right) \frac{1}{(m+k-q)!} C_{s-(\alpha_1 + \dots + \alpha_q + \beta_1 + \dots + \beta_q)}^{\beta_{q+1} + \dots + \beta_m} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{(\beta_{q+1} + \dots + \beta_m)!}{\beta_{q+1}! \dots \beta_m!} C_{m+k-q}^k \left\| \begin{bmatrix} i_{m+1} & \dots & i_{m+k} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\| \right) \\
&= P_s \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & j_m \end{bmatrix} \frac{1}{k!} \left\| \begin{bmatrix} i_{m+1} & \dots & i_{m+k} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\| \\
&\quad - P_s \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & j_m \end{bmatrix} C_{s-(i_1 + \dots + i_m + j_1 + \dots + j_m)}^0 \frac{1}{k!} \left\| \begin{bmatrix} i_{m+1} & \dots & i_{m+k} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\| \\
&= \begin{cases} 0, & \text{если } s \geq i_1 + \dots + i_m + j_1 + \dots + j_m, \\ P_s \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & j_m \end{bmatrix} \frac{1}{k!} \left\| \begin{bmatrix} i_{m+1} & \dots & i_{m+k} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\|, & \text{если } s < i_1 + \dots + i_m + j_1 + \dots + j_m. \end{cases} \quad \square
\end{aligned}$$

§3. Уравнения для функции Бейкера–Ахиезера

Следуя [7] и [2], определим КП-иерархию как систему дифференциальных уравнений

$$\partial_n \psi = L_n \psi, \quad (3.1)$$

где

$$L_n = \partial^n + \sum_{i=2}^n B_n^i(x) \partial^{n-i}$$

и ψ — функция вида

$$\psi(x, k) = \exp \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k^j \right) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i k^{-i} \right),$$

называемая функцией Бейкера–Ахиезера ($k \in \mathbb{C}$ принадлежит некоторой окрестности бесконечности ∞ и $x = (x_1, x_2, \dots)$ — финитная последовательность).

Прямым вычислением нетрудно доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 3.1. *Условием совместности системы (3.1) являются равенства*

$$B_s^t = - \sum_{i=1}^{t-1} C_s^i \partial^i \xi_{t-i} - \sum_{j=2}^{t-1} B_s^j \sum_{i=0}^{t-j-1} C_{s-j}^i \partial^i \xi_{t-i-j}, \quad (3.2)$$

$$\partial_n \xi_i = \sum_{j=1}^{n+i-1} C_n^j \partial^j \xi_{i+n-j} + \sum_{k=2}^n B_n^k \sum_{j=0}^{n-k} C_{n-k}^j \partial^j \xi_{i+n-j-k}. \quad \square \quad (3.3)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\ln \psi(x, k) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j k^j + \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j k^{-j},$$

где

$$\xi_j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1 + \dots + i_n = j} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_n}.$$

ЛЕММА 3.2. Пусть $2 \leq t \leq s$. Тогда

$$B_s^t = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum P_s \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \partial^{j_1} \eta_{i_1} \dots \partial^{j_n} \eta_{i_n},$$

где вторая сумма берется по всем матрицам $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}$, таким, что $i_m \geq 1$, $j_m \geq 1$ и $i_1 + \dots + i_n + j_1 + \dots + j_n = t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать лемму индукцией по t . Для $t = 2$, согласно равенству (3.2), $B_s^2 = -s \partial \xi_1 = -P_s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \partial \eta_1$. Докажем лемму для $t = N$, считая, что она доказана для $t < N$. Согласно (3.2),

$$\begin{aligned} B_s^t &= - \sum_{i=1}^{t-1} C_s^i \partial^i \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1 + \dots + i_n = t-i} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_n} \right) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{t-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1 + \dots + j_n = j} P_s \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \partial^{j_1} \eta_{i_1} \dots \partial^{j_n} \eta_{i_n} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{i=0}^{t-j-1} C_{s-j}^i \partial^i \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1 + \dots + i_n = t-i-j} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_n} \right) \right) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum \left(\frac{1}{n!} C_s^{j_1 + \dots + j_n} \frac{(j_1 + \dots + j_n)!}{j_1! \dots j_n!} - \sum_{q=1}^{n-1} P_s \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_q \\ j_1 & \dots & j_q \end{pmatrix} \frac{1}{(n-q)!} \right. \\ &\quad \left. \times C_{s-(i_1 + \dots + i_q + j_1 + \dots + j_q)}^{j_{q+1} \dots j_n} \frac{(j_{q+1} + \dots + j_n)!}{j_{q+1}! \dots j_n!} \right) \partial^{j_1} \eta_{i_1} \dots \partial^{j_n} \eta_{i_n} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum P_s \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \partial^{j_1} \eta_{i_1} \dots \partial^{j_n} \eta_{i_n}, \end{aligned}$$

где вторая сумма берется по всем матрицам $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}$, таким, что $i_1 + \dots + i_n + j_1 + \dots + j_n = t$, $i_m \geq 1$, $j_m \geq 0$. Согласно лемме 2.1, можно считать, что последняя сумма берется лишь по положительным $j_m > 0$. $\square$

ТЕОРЕМА 3.1. Имеет место равенство

$$\partial_s \eta_r = \sum_{n=1}^{\infty} \sum P_s \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \partial^{j_1} \eta_{i_1} \dots \partial^{j_n} \eta_{i_n},$$

где вторая сумма берется по всем матрицам $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}$, таким, что $i_m \geq 1$, $j_m \geq 1$ и $i_1 + \dots + i_n + j_1 + \dots + j_n = r + s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать индукцией по r . Согласно равенству (3.3) и лемме 3.2, при $r = 1$

$$\begin{aligned} \partial_s \eta_1 &= \partial_s \xi_1 = \sum_{j=1}^{\infty} C_s^j \partial^j \xi_{s+1-j} + \sum_{k=2}^s B_s^k \sum_{j=0}^{s-k} C_{s-k}^j \partial^j \xi_{1+s-j-k} \\ &= \sum_{j=1}^s C_s^j \partial^j \xi_{s+1-j} - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1+\dots+j_n=k} P_s \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \partial^{j_1} \eta_{i_1} \dots \partial^{j_n} \eta_{i_n} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{j=0}^{s-k} C_{s-k}^j \partial^j \xi_{1+s-j-k} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum P_s \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \partial^{j_1} \eta_{i_1} \dots \partial^{j_n} \eta_{i_n}, \end{aligned}$$

где вторая сумма берется по всем матрицам $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}$, таким, что $i_1 + \dots + i_n + j_1 + \dots + j_n = s + 1$, $i_m \geq 1$, $j_m \geq 0$. Согласно лемме 2.1, можно считать, что сумма берется лишь по положительным $j_m > 0$.

Таким образом, для $r = 1$ теорема доказана.

Докажем теперь теорему для $r = N$, считая, что она доказана для $r < N$. Согласно (3.3),

$$\partial_s \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1+\dots+i_n=r} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_n} \right) = \sum_{j=1}^{s+r-1} C_s^j \partial^j \xi_{s+r-j} + \sum_{k=2}^{\infty} B_s^k \sum_{j=0}^{s-k} C_{s-k}^j \partial^j \xi_{r+s-j-k}.$$

Таким образом, согласно леммам 3.2, 2.1 и предположению индукции,

$$\begin{aligned} \partial_s \eta_r &= \sum_{j=1}^{\infty} C_s^j \partial^j \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1+\dots+i_n=s+r-j} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_n} \right) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{i_1+\dots+j_n=k} P_s \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \partial^{j_1} \eta_{i_1} \dots \partial^{j_n} \eta_{i_n} \right) \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{s-k} C_{s-k}^j \partial^j \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1+\dots+i_n=r+s-j-k} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_n} \right) \\ &\quad - \partial_s \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1+\dots+i_n=r} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum P_s \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \partial^{j_1} \eta_{i_1} \dots \partial^{j_n} \eta_{i_n}, \end{aligned}$$

где вторая сумма берется по всем матрицам $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}$, таким, что $i_1 + \dots + i_n + j_1 + \dots + j_n = s + r$, $i_m \geq 1$, $j_m \geq 1$. □

§4. КП-иерархии

Согласно [2], функция Бейкера–Ахиезера ψ имеет вид

$$\psi(x, k) = \exp\left(\sum x_j k^j\right) \frac{\tau(x_1 - k^{-1}, x_2 - \frac{1}{2}k^{-2}, x_3 - \frac{1}{3}k^{-3}, \dots)}{\tau(x_1, x_2, x_3, \dots)}$$

для некоторой функции $\tau(x)$. Следуя [8], представим КП-иерархию как бесконечную систему дифференциальных уравнений на функцию $v(x) = -\ln \tau(x)$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j k^{-j} &= \ln \psi(x, k) - \sum_{j=1}^{\infty} x_j k^j = -v\left(x_1 - k^{-1}, x_2 - \frac{1}{2}k^{-2}, \dots\right) + v(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1 + \dots + i_n = j} \frac{(-1)^{n+1}}{n! i_1 \dots i_n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} v(x) k^{-j}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\eta_r = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1 + \dots + i_n = r} \frac{(-1)^{n+1}}{n! i_1 \dots i_n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} v. \quad (4.1)$$

ТЕОРЕМА 4.1 [4]. *Существуют универсальные рациональные коэффициенты*

$$R_r \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}, \quad R_{ij} \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix},$$

такие, что

$$\eta_r = \frac{1}{r} \partial_r v + \sum_{n=1}^{\infty} \sum R_r \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \partial_{s_1} \partial^{t_1} v \dots \partial_{s_n} \partial^{t_n} v, \quad (4.2)$$

$$\partial_i \partial_j v = \sum_{n=1}^{\infty} \sum R_{ij} \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \partial_{s_1} \partial^{t_1} v \dots \partial_{s_n} \partial^{t_n} v, \quad (4.3)$$

где вторые суммы берутся по всем матрицам $\begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}$, таким, что $s_m, t_m \geq 1$, и сумма $s_1 + \dots + s_n + t_1 + \dots + t_n$ равна r для (4.2) и $i + j$ для (4.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать теорему совместной индукцией по k и $i + j$. Для $i + j = 2$ она очевидна. Для $r = 1$ она следует из равенства (4.1). Докажем теорему для $i + j = N$ и $r = N - 1$, считая, что она верна при $i + j < N$ и $r < N - 1$. Ниже мы предполагаем, что $s_m, t_m \geq 1$ и $\sigma_n = s_1 + \dots + s_n + t_1 + \dots + t_n$. Тогда, согласно (4.1) и (4.3),

$$\begin{aligned} \eta_r &= \frac{1}{r} \partial_r v + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{s_1 + \dots + s_n = r} \frac{(-1)^{n+1}}{n! s_1 \dots s_n} \partial_{s_1} \dots \partial_{s_n} v(x) \\ &= \frac{1}{r} \partial_r v + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\sigma_n = r} R_r \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \partial_{s_1} \partial^{t_1} v \dots \partial_{s_n} \partial^{t_n} v. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно формулам (4.2), (4.3) и теореме 3.1,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{j} \partial_i \partial_j v &= \partial_i \eta_j - \partial_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\sigma_n=j} R_j \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_n \\ t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix} \partial_{s_1} \partial^{t_1} v \cdots \partial_{s_n} \partial^{t_n} v \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\sigma_n=i+j} P_i \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_n \\ t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix} \partial^{t_1} \eta_{s_1} \cdots \partial^{t_n} \eta_{s_n} \\
 &\quad - \partial_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\sigma_n=j} R_j \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_n \\ t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix} \partial^{t_1} \partial_{s_1} v \cdots \partial^{t_n} \partial_{s_n} v \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s_1+\cdots+s_n+n=i+j} P_i \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \partial \left(\frac{1}{s_1} \partial_{s_1} v \right) \cdots \partial \left(\frac{1}{s_n} \partial_{s_n} v \right) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\sigma_n=i+j, t_1+\cdots+t_n>n} R_{ij} \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_n \\ t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix} \partial_{s_1} \partial^{t_1} v \cdots \partial_{s_n} \partial^{t_n} v. \quad \square
 \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Множество решений системы (4.3) взаимно однозначно соответствует множеству решений системы (3.1). Таким образом, с точностью до константы формальное (т. е. в виде степенного ряда) решение системы (4.3) однозначно определяется произвольным бесконечным набором рядов от одной переменной $f_i(x_1) = \partial_i v|_{x_2=x_3=\cdots=0}$ ($i = 1, 2, \dots$).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Процедура, описанная при доказательстве теоремы 4.1, позволяет явно найти все рациональные константы $R_{ij} \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_m \\ t_1 & \cdots & t_m \end{pmatrix}$. Она отличается от процедуры, предложенной в [4], что дает нетривиальные комбинаторные тождества. Приведем первые из уравнений иерархии (4.3):

$$\begin{aligned}
 \partial_2^2 v &= \frac{4}{3} \partial_3 \partial v - \frac{1}{3} \partial^4 v + 2(\partial^2 v)^2, & \partial_3 \partial_2 v &= \frac{3}{2} \partial_4 \partial v - \frac{3}{2} \partial_2 \partial^3 v + 3 \partial_2 \partial v \partial^2 v, \\
 \partial_3^2 v &= \frac{9}{5} \partial_5 \partial v - \partial_3 \partial^3 v + \frac{1}{5} \partial^6 v + 3 \partial_3 \partial v \partial^2 v \\
 &\quad + \frac{9}{4} (\partial_2 \partial v)^2 - 3 \partial^4 v \partial^2 v - \frac{9}{4} (\partial^3 v)^2 + 3(\partial^2 v)^3.
 \end{aligned}$$

Первое из них — это дважды проинтегрированное по x_1 уравнение КП.

ТЕОРЕМА 4.2. Если $\sum_{i=1}^m (t_i + 1) \equiv 1 \pmod{2}$, то $R_{ij} \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_m \\ t_1 & \cdots & t_m \end{pmatrix} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения иерархии КП могут быть записаны в виде набора уравнений на одну функцию $\tau(x)$ [2]. Эти уравнения записываются с помощью «билинейных операторов Хироты». Напомним их определение. Если $f(x)$ — функция одной переменной, то для любого полинома (или степенного ряда) Q действие оператора Хироты $Q(D_x)f(x) \cdot f(x)$ определяется формулой

$$Q(D_x)f(x) \cdot f(x) = Q(\partial_y)[f(x+y)f(x-y)]_{y=0}.$$

Для функций многих переменных определение аналогично. Производящая функция для уравнений иерархии КП имеет вид

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j(-2y)p_{j+1}(\tilde{D}) \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i D_i\right) \tau \cdot \tau = 0, \quad (4.5)$$

где $y = (y_1, y_2, \dots)$ — вспомогательные независимые переменные, $\tilde{D} = (D_1, 2^{-1}D_2, 3^{-1}D_3, \dots)$, D_j — оператор Хироты по переменной x_j и p_j — полиномы Шура, определяемые из разложения

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} k^j p_j(x_1, \dots, x_j).$$

Мономы нечетной степени порождают тривиальные операторы Хироты. Поэтому если $\tau(x)$ — решение системы (4.5), то $\tilde{\tau}(x) = \tau(-x)$ — тоже решение системы (4.5). Кроме того, согласно [4], функция τ является решением системы (4.5), если и только если $v = -\ln(\tau)$ является решением системы (4.3). Таким образом, $v(x)$ является формальным решением системы (4.3), если и только если $\tilde{v}(x) = v(-x)$ является формальным решением системы (4.3). А это и означает выполнение утверждения теоремы 4.2. $\square$

§5. Иерархия Гельфанда–Дикого

Согласно [11], множество решений иерархии Гельфанда–Дикого взаимно однозначно соответствует множеству не зависящих от x_n решений иерархии КП. В этом случае, согласно теореме 4.1,

$$0 = \partial_m \partial_n v = \frac{mn}{m+n-1} \partial_{n+m-1} \partial v + \sum_{m=1}^{\infty} \sum R_{mn} \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix} \partial_{s_1} \partial^{t_1} v \dots \partial_{s_m} \partial^{t_m} v,$$

где $1 \leq s_j \leq n+m-2$, $t_j \geq 1$. Это позволяет рекуррентно выразить функции $\partial_k \partial v$ при $k > n$ через функции $\partial_r \partial v$, где $r < n$, т. е. найти соотношение

$$\partial \partial_{n+r} v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum N_{1(n+1)}^m \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix} \partial_{s_1} \partial^{t_1} v \dots \partial_{s_m} \partial^{t_m} v, \quad (5.1)$$

где $t_j \geq 1$, $s_j < n$, $\sum_{j=1}^m (s_j + t_j) = n + r + 1$.

ПРИМЕР. При $n = 2$ система (5.1) переходит иерархию КдФ.

Сопоставляя системы (5.1) и (4.3), находим систему

$$\partial_i \partial_j v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum N_{ij}^m \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix} \partial_{s_1} \partial^{t_1} v \dots \partial_{s_m} \partial^{t_m} v, \quad (5.2)$$

где $i, j \geq 1$, $1 \leq s_\alpha \leq n-1$, $t_\alpha \geq 1$, $\sum_{\alpha=1}^m (s_\alpha + t_\alpha) = i + j$ и $N_{ij}^m \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix}$ — некоторые универсальные рациональные коэффициенты.

ПРИМЕРЫ. 1. При $n = 3$ первое из уравнений системы (5.2) — это уравнение Буссинеска

$$\partial_2^2 v = -\frac{1}{3} \partial^4 v + 2(\partial^2 v)^2.$$

2. При $n = 4$ первые уравнения системы (5.2) имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_2^2 v &= \frac{4}{3} \partial_3 \partial v - \frac{1}{3} \partial^4 v + 2(\partial^2 v)^2, & \partial_3 \partial_2 v &= -\frac{3}{2} \partial_2 \partial^3 v + 3 \partial_2 \partial v \partial^2 v, \\ \partial_3^2 v &= -\frac{1}{4} \partial_3 \partial^3 v + \frac{1}{8} \partial^6 v + \frac{9}{8} (\partial_2 \partial v)^2 - \frac{9}{8} (\partial^3 v)^2 - \frac{9}{4} \partial^4 v \partial^2 v + 3(\partial^2 v)^3. \quad \square \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 5.1. Иерархия Гельфанда–Дикого эквивалентна бесконечной системе дифференциальных уравнений вида

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum N_{i_1 \cdots i_k}^m \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_m \\ t_1 & \cdots & t_m \end{pmatrix} \partial_{s_1} \partial^{t_1} v \cdots \partial_{s_m} \partial^{t_m} v, \quad (5.3)$$

где $k \geq 2$, $t_j \geq 1$, $s_j < n$, $\sum_{j=1}^k i_j = \sum_{j=1}^m (s_j + t_j)$, $\sum_{j=1}^m t_j \geq m + k - 2$ и $k + m + \sum_{j=1}^m t_j \equiv 0 \pmod{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $k = 2$ соотношение (5.3) следует из соотношения (5.2). При $k > 2$ соотношение (5.3) получается из соответствующих соотношений для $k - 1$ дифференцированием по ∂_{i_k} и подстановкой вместо производных $\partial_i \partial_{i_k} v$ правых частей формулы (5.2). В результате такой процедуры возникают мономы $\partial_{s_1} \partial^{t_1} \cdots \partial_{s_m} \partial^{t_m} v$, где $\sum_{j=1}^k i_j = \sum_{j=1}^m (s_j + t_j)$ и $\sum_{j=1}^m t_j \geq m + k - 2$. Условие $k + m + \sum_{j=1}^m t_j \equiv 0 \pmod{2}$ следует из теоремы 4.2. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Структура системы (5.3) такова, что ее формальное решение однозначно, с точностью до константы, определяется произвольным набором из $n - 1$ рядов от одной переменной $f_i(x_1) = \partial_i v|_{x_2=x_3=\dots=0}$ ($i = 1, \dots, n - 1$).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Коэффициенты $N_{i_1 \cdots i_k}^m \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_m \\ t_1 & \cdots & t_m \end{pmatrix}$ являются рациональными константами. Конструкции, описанные при доказательстве теорем 4.1 и 5.1, дают рекуррентные формулы для их вычисления.

§6. Виттеновское решение иерархии Гельфанда–Дикого

Следуя Виттену [12], рассмотрим пространство $M_{g,s}$ римановых поверхностей рода g с s проколами. Сопоставим каждому проколу пару чисел (k_i, m_i) , где $1 \leq k_i < n$, $m_i \geq 0$. Виттен [12] связывает с таким набором $\{(k_i, m_i) \mid i = 1, \dots, s\}$ число (коррелятор) $\langle \prod_{k,m} \tau_{k,m}^{d_{k,m}} \rangle_g$, где $d_{k,m}$ — число пар (k_i, m_i) , равных (k, m) . Число $\langle \prod_{k,m} t_{k,m}^{d_{k,m}} \rangle_g$ равно значению некоторого описанного Виттеном класса когомологий $_{CD}$ на одной из компонент связности компактификации пространства n -спинорных расслоений на поверхностях из $M_{g,s}$. Положим

$$F^g(t_{1,0}, t_{1,1}, \dots) = \sum_{d_{k,m}} \left\langle \prod_{k,m} \tau_{k,m}^{d_{k,m}} \right\rangle_g \prod_{k,m} \frac{t_{k,m}^{d_{k,m}}}{d_{k,m}!}.$$

Согласно гипотезе Виттена, формальный ряд $F = \sum_{g=0}^{\infty} F^g$ после перенормировки переменных переходит в формальное решение иерархии Гельфанда–Дикого,

удовлетворяющее струнному уравнению. В наших терминах гипотеза Виттена означает, что после замены $t_{k,m} \mapsto -(mn + k)x_{mn+k}$ функция f переходит в формальное решение v системы (5.3), удовлетворяющее уравнению

$$\begin{aligned} \partial v &= \frac{1}{2} \sum_{i+j=n} ij x_i x_j + \sum_{i=1}^{\infty} (i+n) x_{i+n} \partial_i v, \\ 0 &= v(0) = \partial_i v(0) \quad (i = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Единственное такое решение W мы и называем виттеновским решением иерархии Гельфанда–Дикого.

ТЕОРЕМА 6.1. *Виттеновское решение иерархии Гельфанда–Дикого имеет вид $W = \sum_{g=0}^{\infty} W^g$, где*

$$\begin{aligned} W^g(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i_1+\dots+i_k=(n+1)(2g-2+k)} \frac{(n-1)^{2g-2+k}}{k!} N_{i_1\dots i_k}^{2g-2+k} \binom{n-1 \dots n-1}{2 \dots 2} x_{i_1} \dots x_{i_k}, \end{aligned}$$

причем W^g — квазиоднородный ряд степени $(1-g)(2+2/n)$ по переменным x_i степени $1+1/n-i/n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совместность уравнений (5.3) и (6.1) следует из работы [1], где соответствующее решение представлено в виде матричного интеграла. В силу уравнения (6.1) $\partial \partial_i W|_{x_2=x_3=\dots=0} = \delta_{n-1,i}(n-1)x_1$. Эти условия и уравнения (5.3) однозначно определяют все функции $f_{i_1\dots i_k}(x_1) = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} W|_{x_2=x_3=\dots=0}$. Согласно теореме 5.1, если $f_{i_1\dots i_k}(0) \neq 0$, то $(i_1 + \dots + i_k) \equiv 0 \pmod{(n+1)}$ и

$$f_{i_1\dots i_k}(0) = (n-1)^m N_{i_1\dots i_k}^m \binom{n-1 \dots n-1}{2 \dots 2},$$

где $m = (i_1 + \dots + i_k)/(n+1)$. Согласно этой же теореме, $m \geq k-2$ и $k+m \equiv 0 \pmod{2}$. Отсюда следует, что $m = 2g+k-2$, где $g \geq 0$ — целое число. Таким образом, $W = \sum W^g$, где

$$\begin{aligned} W^g(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i_1+\dots+i_k=(n+1)(2g+k-2)} \frac{1}{k!} f_{i_1\dots i_k}(0) x_{i_1} \dots x_{i_k} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i_1+\dots+i_k=(n+1)(2g+k-2)} \frac{1}{k!} (n-1)^{2g-2+k} N_{i_1\dots i_k}^{2g-2+k} \binom{n-1 \dots n-1}{2 \dots 2} x_{i_1} \dots x_{i_k}. \end{aligned}$$

Квазиоднородность ряда W^g следует из равенства $i_1 + \dots + i_k = (n+1)(2g-2+k)$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Виттеновское решение иерархии Гельфанда–Дикого представляется в виде суммы квазиоднородных рядов W^g тех же весов и степеней, что и F^g .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [12], F^g является квазиоднородным рядом степени $(1-g)(2+2/n)$ по переменным $t_{k,m}$ веса $1+1/n-k-m/n$. $\square$

Докажем теперь утверждение, сформулированное (без доказательства) в [3].

ТЕОРЕМА 6.2. *Функции W и W^0 совпадают на множестве $L_0 = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0, 0, \dots)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу уравнения (6.1) $\partial^r \partial_\ell W = 0$ на множестве L_0 при $\ell < n-1$, $r > 1$ и при $\ell = n-1$, $r > 2$. С другой стороны, согласно (5.1),

$$\partial \partial_{n+\ell} W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum N_{1(n+\ell)}^m \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix} \partial_{s_1} \partial^{t_1} W \dots \partial_{s_m} \partial^{t_m} W,$$

где $\sum_{i=1}^m (s_i + t_i) = n + \ell + 1$. Таким образом, если $\ell < n$ и $\partial \partial_{n+\ell} \neq 0$, то все числа t_j не превосходят 2 и среди них не более одного больше 1. Но если среди чисел $1 \leq t_1, \dots, t_m \leq 2$ ровно одно равно 2, то $N_{1(n+\ell)}^m \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix} = 0$ ввиду теоремы 5.1. Таким образом,

$$\partial \partial_{n+\ell} W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum N_{1(n+\ell)}^m \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_m \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \partial_{s_1} \partial W \dots \partial_{s_m} \partial W.$$

С другой стороны, согласно (6.1), $\partial_\ell W = \partial \partial_{n+\ell} W$ и $\partial_s \partial W = s(n-s)x_{n-s}$ на множестве L_0 . Таким образом, из равенства $\sum_{i=1}^m (s_i + t_i) = n + \ell + 1$ следует, что $\partial_\ell W|_{L_0}$ — квазиоднородный полином степени $2 + 2/n - (1 + 1/n - \ell/n) = 1 + 1/n + \ell/n$. Следовательно, $W|_{L_0}$ — квазиоднородный полином степени $2 + 2/n$ и $W|_{L_0} = W^0|_{L_0}$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 6.2.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0, 0, \dots) = W\left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_{n-1}}{n-1}, 0, 0, \dots\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [12], $F^0(x_1, x_2, \dots) = W^0(x_1, x_2/2, x_3/3, \dots)$ и $F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0, 0, \dots) = F^0(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0, 0, \dots)$. Поэтому утверждение следствия 6.2 сразу вытекает из теоремы 6.1. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Adler M., van Moerbeke P. A matrix integral solution to two-dimensional W_p -gravity. Commun. Math. Phys., **147**, 25–56 (1992).
2. Date E., Kashiwara M., Jimbo M., Miwa T. Transformation groups for soliton equation. In: Proc. of RIMS Symposium on non-linear integrable system. World Science Publ. Co., Singapore, 1983, pp. 39–119.
3. Dijkgraaf R. Intersection theory, integrable hierarchies and topological field theory. In: New symmetry principles in quantum field theory (Cargese, 1991). NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., Vol. 295, Plenum, New York, 1992, pp. 95–158.
4. Дубровин Б. А., Натанзон С. М. Вещественные тэта-функциональные решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили. Изв. АН СССР, сер. матем., **52**, № 2, 267–286 (1988).
5. Гельфанд И. М., Дикий Л. А. Резольвента и гамильтоновы системы. Функц. анализ и его прил., **11**, вып. 2, 11–27 (1977).
6. Kontsevich M. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function. Commun. Math. Phys., **147**, 1–23 (1992).
7. Кривчер И. М. Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова–Шабата и их периодических решений. Докл. АН СССР, **227**, № 2, 291–294 (1976).
8. Natanson S. M. Real nonsingular finite zone solutions of solution equations. Amer. Math. Soc. Transl. (2), Vol. 170, 1995, pp. 153–183.

9. *Natanzon S. M.* Formulas for A_n and B_n -solutions of WDVV equations. *J. Geometry and Physics*, **39**, 323–336 (2001).
10. *Okounkov A., Pandharipande R.* Gromov–Witten theory, Hurwitz numbers, and matrix models, I. arXiv: math.AG/0101147.
11. *Sato M.* Soliton equations and universal Grassmann manifold. *Math. Lect. Notes Ser.*, Vol. 18, Sophia University, Tokyo, 1984.
12. *Witten E.* Algebraic geometry associated with matrix models of two-dimensional gravity. In: *Topological models in modern mathematics* (Stony Brook, NY, 1991), Publish or Perish, Houston, TX 1993, pp. 235–269.

Московский государственный университет
Независимый московский университет
e-mail: natanzon@mccme.ru

Поступило в редакцию
16 апреля 2001 г.