Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Досиев, Гомологические размерности алгебры
целых функций от элементов нильпотентной алгеб-
ры Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 2003, том 37, вы-
пуск 1, 73–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa137>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским
соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:58:51

Гомологические размерности алгебры целых функций от элементов нильпотентной алгебры Ли

© 2003. А. А. Досиев

Данная статья посвящена гомологическим характеристикам оболочки Аренса–Майкла (см. [1, гл. 5, п. 2.21]) $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ конечномерной нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Алгебра Фреше $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ интерпретируется как алгебра целых функций от элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. [2]). Некоммутативные версии алгебры голоморфных функций от элементов произвольной алгебры Ли на полидиске рассмотрены в [2, 3]. Если D — полидиск в $\mathbb{C}^n$ ($n = \dim(\mathfrak{g})$), то алгебра $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D)$ голоморфных функций от элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на полидиске D определялась как некоторое (см. [2]) мультинормированное пополнение алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Если $D = \mathbb{C}^n$, то $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D)$ сводится к оболочке Аренса–Майкла $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис в нильпотентной алгебре Ли $\mathfrak{g}$, согласованный с нижним центральным рядом $\mathfrak{g}^{(s)}$ ($s \geq 1$) этой алгебры, т.е. присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ приводится к строго треугольному виду относительно этого базиса. Такой базис мы назовем *треугольным базисом* в $\mathfrak{g}$. Каждому элементу $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D)$ можно сопоставить единственным способом формальный степенной ряд $\sum_J a_J e^J$, где $J = (j_1, \dots, j_n)$ — мультииндекс и $e^J = e_1^{j_1} \dots e_n^{j_n}$ (см. [3]). Мы говорим, что множество $\{e^J\}$ является *однородным базисом* в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D)$, если для каждого f указанный ряд однородно сходится к f , т.е. f может быть представлен в виде абсолютно сходящегося ряда $\sum_k f_k$, где $f_k = \sum_{|J|=k} a_J e^J$, $|J| = \sum_{i=1}^n p_i j_i$, $p_i = \max\{s : e_i \in \mathfrak{g}^{(s)}\}$. Если любой $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D)$ представляется в виде безусловно (соответственно абсолютно) сходящегося степенного ряда $\sum_J a_J e^J$, то мы говорим, что множество $\{e^J\}$ является *безусловным* (соответственно *абсолютным*) *базисом* в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D)$. В [3] доказано существование однородного базиса в алгебре $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D)$ для нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, допускающей положительную целочисленную градуировку подпространств.

С целью вычисления гомологических характеристик алгебр $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D)$ мы рассмотрим, как и в чисто алгебраическом случае (см. [4, гл. 13]), вопросы существования свободной резольвенты Кошуля для тривиального модуля над пополнениями алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ и бимодульной резольвенты Кошуля этих алгебр. Мы покажем, что если для некоторого треугольного базиса e алгебры Ли $\mathfrak{g}$ множество упорядоченных мономов $\{e^J\}$ является делимым (см. ниже) базисом в некотором локально выпуклом пополнении $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, то комплекс Кошуля, порожденный тривиальным $\mathcal{A}$ -модулем, допустим (т.е. $\mathbb{C}$ -расщепим). Кроме того, если $\mathfrak{g}^{(3)} = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = \{0\}$, то алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ имеет $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ -бимодульную резольвенту Кошуля. Таким образом, естественное вложение $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ является абсолютной локализацией в смысле Дж. Тейлора [5], если ступень нильпотентности алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равна двум.

Комплекс Кошуля. Категория всех комплексных хаусдорфовых полных локально выпуклых пространств (соответственно алгебр с единицей и с совместно непрерывной операцией умножения) обозначается через **LCS** (соответственно

LCA). Пусть $\mathcal{A} \in \mathbf{LCA}$ и $\mathfrak{X}$ — левый локально выпуклый $\mathcal{A}$ -модуль, т.е. $\mathfrak{X} \in \mathbf{LCS}$ и отображение внешнего умножения $\mathcal{A} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ совместно непрерывно. Категория всех левых (соответственно правых, двусторонних) $\mathcal{A}$ -модулей обозначается через $\mathcal{A}\text{-mod}$ (соответственно $\text{mod-}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\text{-mod-}\mathcal{A}$). Проективной гомологической размерностью $\text{dh}\mathfrak{X}$ модуля $\mathfrak{X}$ называется длина его самой короткой проективной резольвенты. Гомологическая биразмерность $\text{db}\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{A}$ есть проективная гомологическая размерность алгебры $\mathcal{A}$ как $\mathcal{A}$ -бимодуля [6, гл. 3]. Левая проективная глобальная гомологическая размерность $\text{dg}\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{A}$ определяется как $\sup\{\text{dh}_{\mathcal{A}}\mathfrak{X} : \mathfrak{X} \in \mathcal{A}\text{-mod}\}$. Левая проективная малая (соответственно средняя) размерность $\text{ds}\mathcal{A}$ (соответственно $\text{dm}\mathcal{A}$) есть верхняя грань величин $\text{dh}_{\mathcal{A}}\mathfrak{X}$, взятая по всем конечномерным (соответственно неприводимым) модулям $\mathfrak{X}$ [6, гл. 3]. Пусть теперь $\mathfrak{X} \in \mathcal{A}\text{-mod}$ и $\mathfrak{Y} \in \text{mod-}\mathcal{A}$. Мы используем обозначение $\mathfrak{Y} \perp \mathfrak{X}$ (см. [5] и [6, гл. 3, п. 3.8]), если все производные функторы от функтора тензорного (над $\mathcal{A}$) произведения $\mathfrak{Y} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} ?$, примененные к модулю $\mathfrak{X}$, являются нулевыми.

Пусть $\mathfrak{X} \in \mathbf{LCS}$, $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ — пространство всех непрерывных линейных операторов, действующих в $\mathfrak{X}$, и пусть $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ — представление конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathfrak{X}$, т.е. $\mathfrak{X}$ есть $\mathfrak{g}$ -модуль. Определим образ $\text{Im}(\alpha)$ представления α как алгебраическую сумму $\sum_{u \in \mathfrak{g}} \text{im}(\alpha(u))$. Если I — идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то нетрудно показать, что $\text{Im}(\alpha|_I)$, где $\alpha|_I$ — сужение представления α на I , есть $\mathfrak{g}$ -подмодуль в $\mathfrak{X}$. Тогда α индуцирует факторпредставление $\alpha_I : \mathfrak{g}/I \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{X}/\text{Im}(\alpha|_I))$, $\alpha_I(u \sim) = \alpha(u) \sim$, где $u \sim$ — класс элемента $u \pmod{I}$, а $\alpha(u) \sim$ — оператор в факторпространстве $\mathfrak{X}/\text{Im}(\alpha|_I)$, индуцированный оператором $\alpha(u)$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли с треугольным базисом $e = (e_1, \dots, e_n)$. Положим $l_i = e_{n-i+1}$, $T_i \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $T_i x = \alpha(l_i)x$, $1 \leq i \leq n$, и пусть $D_k = \sum_{i=1}^k \text{im}(T_i)$. Ясно, что подпространство I_k , порожденное элементами $l_1, \dots, l_k$, является идеалом в $\mathfrak{g}$ и $D_k = \text{Im}(\alpha|_{I_k})$. В частности, $\text{Im}(\alpha) = D_n$. Пусть $\mathfrak{X}_{-1} = \mathfrak{X}/D_n$, и пусть $\varepsilon : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}_{-1}$ — факторотображение. Рассмотрим индуцированные операторы $\bar{T}_i = \alpha_{I_k}(l_i \sim) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}/D_k)$, $i \geq k+1$, и цепной комплекс Кошуля $\text{Kos}(\mathfrak{X}, \alpha) : 0 \leftarrow \mathfrak{X} \xleftarrow{d_0} \mathfrak{X} \otimes \mathfrak{g} \xleftarrow{d_1} \dots \xleftarrow{d_{m-1}} \mathfrak{X} \otimes \wedge^m \mathfrak{g} \xleftarrow{d_m} \dots$ с дифференциалом $d_m(x \otimes \underline{u}) = \sum_{i=1}^m (-1)^i \alpha(u_i)x \otimes \underline{u}_i + \sum_{i < j} (-1)^{i+j-1} x \otimes [u_i, u_j] \wedge \underline{u}_{ij}$, где $\underline{u} = u_1 \wedge \dots \wedge u_{m+1} \in \wedge^{m+1} \mathfrak{g}$, а $\underline{u}_i$ (соответственно $\underline{u}_{ij}$) — вектор из пространства $\wedge^m \mathfrak{g}$ (соответственно $\wedge^{m-1} \mathfrak{g}$), полученный из $\underline{u}$ путем удаления вектора u_i (соответственно векторов u_i, u_j). Пополненный комплекс Кошуля $0 \leftarrow \mathfrak{X}_{-1} \xleftarrow{\varepsilon} \text{Kos}(\mathfrak{X}, \alpha)$ с пополняющим отображением ε обозначим через $\text{Kos}^+(\mathfrak{X}, \alpha)$.

ЛЕММА 1. Пусть все $\bar{T}_{k+1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}/D_k)$ обладают непрерывными левыми обратными операторами. Тогда комплекс $\text{Kos}^+(\mathfrak{X}, \alpha)$ допустим.

Отмеченные пополнения. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли, $\Delta(\mathfrak{g}) = \{\lambda \in \mathfrak{g}^* : \lambda(\mathfrak{g}^{(2)}) = \{0\}\}$ — пространство всех левых характеров алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $\varepsilon_{\mathfrak{g}} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$ — канонический характер (мультипликативный линейный функционал) алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, продолжающий тривиальный характер алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Хорошо известно [4, гл. 13], что противоположная алгебра $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\text{op}}$ отождествляется с обертывающей алгеброй $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\text{op}})$ противоположной алгебры Ли $\mathfrak{g}^{\text{op}}$.

Кроме того, между алгебрами $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ и $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\text{op}}$ существует изоморфизм, который задается с помощью главного антиавтоморфизма $\kappa_{\mathfrak{g}}: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\kappa_{\mathfrak{g}}(x) = -x$, $x \in \mathfrak{g}$. Рассмотрим теперь алгебру $\mathcal{A} \in \mathbf{LCA}$, которая является пополнением алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Мы скажем, что $\mathcal{A}$ является *отмеченным пополнением* обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, если канонический характер $\varepsilon_{\mathfrak{g}}$ и главный антиавтоморфизм $\kappa_{\mathfrak{g}}$ непрерывны относительно индуцированной из $\mathcal{A}$ топологии. Таким образом, если $\mathcal{A}$ есть отмеченное пополнение алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, то $\varepsilon_{\mathfrak{g}}$ продолжается до непрерывного характера $\varepsilon_{\mathfrak{g}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\text{op}}$ с точностью до топологического изоморфизма алгебр, продолжающего $\kappa_{\mathfrak{g}}$. При этом одномерное пространство $\mathbb{C}$ наделяется структурой $\mathcal{A}$ -бимодуля посредством характера $\varepsilon_{\mathfrak{g}}$, и этот бимодуль называется тривиальным модулем и обозначается через $\mathbb{C}(\varepsilon_{\mathfrak{g}})$. Мы также пишем $f(0)$ вместо $\varepsilon_{\mathfrak{g}}(f)$ для любого $f \in \mathcal{A}$. Нетрудно показать, что для произвольной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ все алгебры $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D)$ (в частности, $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$) являются отмеченными пополнениями алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Заметим, что пространство всех непрерывных характеров алгебры $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ отождествляется с $\Delta(\mathfrak{g})$, так как $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ — оболочка Аренса–Майкла алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Если $\lambda \in \Delta(\mathfrak{g})$ и $\mathfrak{g} - \lambda$ — подалгебра Ли в $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, состоящая из элементов вида $u - \lambda(u)$, $u \in \mathfrak{g}$, то $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{g}-\lambda}$ с точностью до топологического изоморфизма алгебр. Поэтому $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ — отмеченное пополнение алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g} - \lambda)$. Продолжение тривиального характера алгебры Ли $\mathfrak{g} - \lambda$ на пополнение $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ отождествляется с λ , а соответствующий тривиальный модуль есть $\mathbb{C}(\lambda)$.

Делимый базис. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли и $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис в $\mathfrak{g}$. Для каждого i рассмотрим оператор $\nabla_{e_i} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$, действующий по правилу $\nabla_{e_i}(e_1^{j_1} \dots e_n^{j_n}) = \delta_{ij} e_1^{j_1} \dots e_i^{j_i-1} \dots e_n^{j_n}$, где $\delta_{ij} = 1$ при $j_i \geq 1$ и $\delta_{ij} = 0$ при $j_i = 0$. Мы назовем ∇_{e_i} *операторами деления* в $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ относительно базиса e . Рассмотрим подпространство $\mathcal{U}_i^e \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, состоящее из тех полиномов $\sum_J a_J e^J$, для которых $a_J = 0$ всякий раз, когда $j_{i+k} \geq 1$ для некоторого k , $k \geq 1$, где $J = (j_1, \dots, j_n)$, $1 \leq i \leq n$. Очевидно, что $\mathcal{U}_1^e \subseteq \mathcal{U}_2^e \subseteq \dots \subseteq \mathcal{U}_n^e = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ и $\mathcal{U}_i^e$ является инвариантным подпространством относительно оператора деления ∇_{e_i} для каждого i .

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли, e — ее треугольный базис и $\mathcal{A} \in \mathbf{LCA}$ — алгебра, которая является пополнением алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Множество $\{e^J\}$ всех упорядоченных мономов в $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ называется *делимым базисом* в $\mathcal{A}$, если оно является однородным базисом в $\mathcal{A}$ и все операторы деления $\nabla_{e_i} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_i^e)$, $1 \leq i \leq n$, непрерывны относительно топологии, индуцированной из $\mathcal{A}$.

Проективная малая размерность. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли и $\mathcal{A}$ — отмеченное пополнение алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Тогда алгебра $\mathcal{A}$ наделяется структурой $\mathfrak{g}$ -модуля (соответственно $\mathfrak{g}^{\text{op}}$ -модуля) посредством левого (соответственно правого) представления $L_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A})$, $L_{\mathfrak{g}}(u)f = uf$ (соответственно $R_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A})$, $R_{\mathfrak{g}}(u)f = fu$), $u \in \mathfrak{g}$, $f \in \mathcal{A}$. Очевидно, что комплекс Кошуля $\text{Kos}(\mathcal{A}, L_{\mathfrak{g}})$ (соответственно $\text{Kos}(\mathcal{A}, R_{\mathfrak{g}})$), порожденный этим модулем, является комплексом в $\text{mod-}\mathcal{A}$ (соответственно $\mathcal{A}\text{-mod}$) и состоит из свободных модулей. Кроме того, этот комплекс пополняется при помощи непрерывного характера $\varepsilon_{\mathfrak{g}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}(\varepsilon_{\mathfrak{g}})$. Используя лемму 1, можно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли и $\mathcal{A}$ — отмеченное пополнение алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ с делимым базисом. Тогда комплекс Кошуля $\text{Kos}(\mathcal{A}, L_{\mathfrak{g}})$

(соответственно $\text{Kos}(\mathcal{A}, R_{\mathfrak{g}})$) является свободной резольвентой правого (соответственно левого) $\mathcal{A}$ -модуля $\mathbb{C}(\varepsilon_{\mathfrak{g}})$. В частности, $\text{ds}(\mathcal{A}) = \text{ds}(\mathcal{A}^{\text{op}}) \geq \dim(\mathfrak{g})$.

Спектр Тейлора. Напомним (см. [7–9]), что спектр Тейлора $\sigma(\alpha)$ представления α конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ (в этом случае $\mathfrak{X} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}\text{-mod}$) определяется как множество тех $\lambda \in \Delta(\mathfrak{g})$, для которых комплекс Кошуля $\text{Kos}(\mathfrak{X}, \alpha - \lambda)$ не точен. Из теоремы 2 мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли, $\mathcal{A}$ — отмеченное пополнение алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ с делимым базисом и $\alpha: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ — непрерывное представление алгебры $\mathcal{A}$ в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$. Тогда $0 \notin \sigma(\alpha|_{\mathfrak{g}})$ в том и только в том случае, когда $\mathbb{C}(\varepsilon_{\mathfrak{g}}) \perp \mathfrak{X}$.

Нильпотентная алгебра Ли степени 2. Пусть $\mathfrak{g}^{(3)} = \{0\}$ и $e = (e_1, \dots, e_n)$ — треугольный базис в $\mathfrak{g}$, такой, что $e_{m+1}, \dots, e_n$ является базисом в $\mathfrak{g}^{(2)}$. Мы скажем, что e является *существенным базисом* в $\mathfrak{g}$, если для каждого j , $j \geq m+1$, существует пара (i, k) , $1 \leq i, k \leq m$, такая, что $[e_i, e_k] = c_j e_j$ для некоторого ненулевого $c_j \in \mathbb{C}$. Очевидно, что такие базисы существуют в произвольной нильпотентной алгебре Ли степени 2.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная нильпотентная алгебра Ли степени 2 и e — ее существенный базис. Тогда множество всех упорядоченных мономов $\{e^J\}$ является абсолютным (и, в частности, безусловным) базисом в алгебре $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — существенный базис в нильпотентной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ степени 2, и пусть $\partial_{e_i} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$, $\partial_{e_i}(e_1^{j_1} \dots e_n^{j_n}) = j_i e_1^{j_1} \dots e_i^{j_i-1} \dots e_n^{j_n}$, — операторы частных производных. Тогда эти операторы допускают непрерывные продолжения $\partial_{e_i} \in \mathcal{L}(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}})$, $1 \leq i \leq n$. В частности, если $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ и $f = \sum_J a_J e^J$ — разложение элемента f в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ в абсолютно сходящийся степенной ряд, то для коэффициентов этого ряда справедлива классическая формула Тейлора $a_J = (J!)^{-1}(\partial_e^J f)(0)$, где $\partial_e^J = \partial_{e_1}^{j_1} \dots \partial_{e_n}^{j_n}$, $J = (j_1, \dots, j_n)$.

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли и $d: \mathcal{O}_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}}$, $d(u) = (u, u)$, $u \in \mathfrak{g}$, — непрерывный гомоморфизм алгебр (диагональное отображение). Пространство $\mathcal{O}_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}} (= \mathcal{O}_{\mathfrak{g}} \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathfrak{g}})$ наделяется структурой правого $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ -модуля посредством гомоморфизма d ; точнее, $f * h = fd(h)$, $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}}$, $h \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная нильпотентная алгебра Ли степени 2. Тогда правый $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ -модуль $\mathcal{O}_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}}$ является свободным $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ -модулем.

Используя теоремы 3 и 4, можно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. Пусть e — существенный базис в нильпотентной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ степени 2. Тогда множество $\{e^J\}$ всех упорядоченных мономов является делимым базисом в отмеченном пополнении $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. В частности, если $\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ — банахово представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\lambda \in \Delta(\mathfrak{g})$, то $\lambda \notin \sigma(\alpha)$ в том и только в том случае, когда $\mathbb{C}(\lambda) \perp \mathfrak{X}$, где $\mathbb{C}(\lambda)$ — тривиальный модуль над $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$.

Алгебра Гейзенберга. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Гейзенберга, т.е. $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли с одномерным коммутантом, $\lambda \in \Delta(\mathfrak{g})$ и $D_r(\lambda)$ — полидиск в $\mathbb{C}^n$ ($n = \dim(\mathfrak{g})$) с центром в точке λ мультирадиуса r ($r > 0$). Рассмотрим алгебру $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_r(\lambda)) (= \mathcal{O}_{\mathfrak{g}-\lambda}(D_r(0)))$ голоморфных функций от элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на полидиске $D_r(\lambda)$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Гейзенберга и e — ее треугольный базис. Тогда множество $\{e^J\}$ всех упорядоченных мономов является делимым базисом в отмеченном пополнении $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_r(\lambda))$ универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Из теорем 2, 3 и 8 можно получить такое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть $\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ — банахово представление алгебры Гейзенберга $\mathfrak{g}$ и $\lambda \in \Delta(\mathfrak{g})$. Если $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_r(\lambda)) \perp \mathfrak{X}$ для некоторого полидиска $D_r(\lambda)$, то $\lambda \notin \sigma(\alpha)$.

Бимодульная резольвента. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли, $\mathfrak{X} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}\text{-mod}$, $\mathfrak{Y} \in \text{mod-}\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$. Пространство $\mathfrak{Y} \hat{\otimes} \mathfrak{X}$ превращается в $\mathfrak{g}$ -модуль посредством представления $\iota_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{Y} \hat{\otimes} \mathfrak{X})$, $\iota_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}(u)y \otimes x = y \otimes (u \cdot x) - (y \cdot u) \otimes x$, $y \in \mathfrak{Y}$, $x \in \mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$, то положим $\iota_{\mathfrak{g}} = \iota_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}$. Рассмотрим в категории $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}\text{-mod-}\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ пополненный комплекс Кошуля $\text{Kos}^+(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}} \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}, \iota_{\mathfrak{g}})$ с пополняющим отображением $\pi: \mathcal{O}_{\mathfrak{g}} \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$, $\pi(f \otimes g) = fg$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная нильпотентная алгебра Ли степени 2. Тогда комплекс $\text{Kos}^+(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}} \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}, \iota_{\mathfrak{g}})$ допустим, а значит, $\text{Kos}(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}} \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}, \iota_{\mathfrak{g}})$ является $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ -бимодульной свободной резольвентой алгебры $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$.

Из теорем 2, 10 и 7 мы получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 11. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная нильпотентная алгебра Ли степени 2. Тогда $\text{ds}(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}) = \text{dm}(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}) = \text{dg}(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}) = \text{db}(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}) = \dim(\mathfrak{g})$.

СЛЕДСТВИЕ 12. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная нильпотентная алгебра Ли степени 2 и $\mathfrak{X} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}\text{-mod}$, $\mathfrak{Y} \in \text{mod-}\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$. Тогда $\mathfrak{Y} \perp \mathfrak{X}$ в том и только в том случае, когда комплекс Кошуля $\text{Kos}(\mathfrak{Y} \hat{\otimes} \mathfrak{X}, \iota_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}})$ точен.

Автор глубоко признателен Ю. В. Туровскому за постановку задачи и за ценные советы и А. Я. Хелемскому, А. С. Файнштейну и Д. Белтице за внимание к работе. Автор также благодарит А. Ю. Пирковского за всестороннее обсуждение результатов заметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хелемский А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. Наука, М., 1989.
2. Досиев А. А. Функц. анализ и его прил., **34**, вып. 4, 82–84 (2000).
3. Досиев А. А. Записки науч. сем. ПОМИ, **299**, 72–121 (2002).
4. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. ИЛ, М., 1960.
5. Taylor J. L. Adv. in Math., **9**, 183–252 (1972).
6. Хелемский А. Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. Изд-во МГУ, М., 1986.
7. Fainshtein A. S. J. Operator Theory, **29**, 3–27 (1993).
8. Досиев А. А. Функц. анализ и его прил., **35**, вып. 4, 80–84 (2001).
9. Dosiev A. A. Spectra of infinite parametrized Banach complexes. J. Operator Theory (в печати).