Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Косяк, Критерий неприводимости квазирегулярных представлений группы финитных верхнетреугольных матриц, *Функц. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 1, 78–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 07:11:03

УДК 519.46

Критерий неприводимости квазирегулярных представлений группы финитных верхнетреугольных матриц

© 2003. А. В. Косяк

1. Пусть $G = B_0^{\mathbb{N}}$ — группа матриц вида $I + x$, где x — финитные верхнетреугольные матрицы бесконечного порядка, $\tilde{G} = B^{\mathbb{N}} = \{I + x = I + \sum_{1 \leq k < n} x_{kn} E_{kn}\}$ — группа произвольных верхнетреугольных матриц, где E_{kn} , $k, n \in \mathbb{N}$, — матричные единицы бесконечного порядка, и

$$\mu = \mu_{(b,0)} = \bigotimes_{k < n} (b_{kn}/\pi)^{1/2} \exp(-b_{kn} x_{kn}^2) dx_{kn}$$

— центрированная гауссовская произведение-мера на группе $B^{\mathbb{N}}$. Пусть $R_t(x) = xt^{-1}$ и $L_s(x) = sx$ — правое и левое действия группы G на $\tilde{G}$ и $\mu^{L_s}(\cdot) = \mu(L_s^{-1}(\cdot))$. Определим аналог правого регулярного представления $T^{R,\mu}$, $G \ni t \mapsto T_t^{R,\mu} \in U(L^2(\tilde{G}, d\mu))$, группы G по формуле $(T_t^{R,\mu} f)(x) = (d\mu(xt)/d\mu(x))^{1/2} f(xt)$, $f \in L^2(\tilde{G}, d\mu)$. Р. С. Исмаилов высказал в 1985 г. следующую гипотезу:

ГИПОТЕЗА 1. Аналог правого регулярного представления

$$T^{R,\mu}: G \rightarrow U(L^2(\tilde{G}, d\mu))$$

группы G неприводим тогда и только тогда, когда

- 1) $\mu^{L_s} \perp \mu$ для любого $s \in G \setminus \{e\}$,
- 2) мера μ является G -право-эргодичной.

Ясно, что гипотеза Исмаилова представляет интерес для произвольной бесконечномерной группы G и G -квазиинвариантной меры μ на топологической группе $\tilde{G}$, содержащей исходную группу G в качестве плотной подгруппы. В случае $G = B_0^{\mathbb{N}}$, $\tilde{G} = B^{\mathbb{N}}$ и $\mu = \mu_{(b,0)}$ гипотеза Исмаилова доказана автором в [1, 2]. Для произвольных произведение-мер на группе $B^{\mathbb{N}}$ с некоторым условием на моменты она доказана в [3]. Для групп диффеоморфизмов отрезка и окружности гипотеза доказана в [4]. Справедлива ли гипотеза Исмаилова в общем случае, неизвестно.

Аналог регулярного представления для бесконечномерных групп — групп токов — впервые был определен и исследован в [5–8]. Для произвольных бесконечномерных групп он определен в [4].

2. Рассмотрим G -пространство X , где G — некоторая группа. С каждым G -пространством X и G -квазиинвариантной мерой μ на X можно связать унитарное представление $G \ni t \mapsto \pi_t^{\alpha,\mu,X} \in U(L^2(X, d\mu))$ группы G по формуле $(\pi_t^{\alpha,\mu,X} f)(x) = (d\mu(\alpha_{t^{-1}}(x))/d\mu(x))^{1/2} f(\alpha_{t^{-1}}(x))$, $f \in L^2(X, d\mu)$, где $G \ni t \mapsto \alpha_t \in \text{Aut}(X)$ — действие группы G в пространстве X , а $\text{Aut}(X)$ — группа измеримых автоморфизмов пространства X .

Рассмотрим в $\text{Aut}(X)$ подгруппу $\alpha(G)' = \{g \in \text{Aut}(X) \mid \{g, \alpha_t\} = g\alpha_t g^{-1} \alpha_t^{-1} = e \text{ для любого } t \in G\}$. Необходимые условия неприводимости представления $\pi^{\alpha,\mu,X}$ имеют вид

- 1) $\mu^g \perp \mu$ для любого $g \in \alpha(G)' \setminus \{e\}$,

2) мера μ является G -эргодичной.

Учитывая описание коммутанта правого регулярного представления локально компактной группы (он порожден операторами левого регулярного представления [9]) и гипотезу 1, можно надеяться, что эти условия окажутся и достаточными.

ГИПОТЕЗА 2. Представление $\pi^{\alpha, \mu, X}: G \rightarrow U(L^2(X, d\mu))$ неприводимо тогда и только тогда, когда

1) $\mu^g \perp \mu$ для любого $g \in \alpha(G)' \setminus \{e\}$,

2) мера μ является G -эргодичной.

3. Примеры. Мы покажем, что гипотеза 2 справедлива для группы $G = B_0^{\mathbb{N}}$, некоторых G -пространств $X^{\{p\}}$, являющихся множествами классов смежности группы $\tilde{G} = B^{\mathbb{N}}$ по некоторым подгруппам, и гауссовских нецентрированных продакт-мер $\mu_{(b,a)}^{\{p\}} = \bigotimes_{k \in \{p\}} \bigotimes_{n=k+1}^{\infty} \mu_{(b_{kn}, a_{kn})}$ на $X^{\{p\}}$. Случай центрированных гауссовских продакт-мер $\mu_{(b,0)}^{\{p\}}$ см. в [10]. Доказательство проходит также для произвольных продакт-мер с некоторым условием на моменты. Гипотеза 2 справедлива также для группы $G = SL_0(\infty, \mathbb{R})$, некоторых G -пространств X , являющихся подпространствами пространства $\text{Mat}(\infty, \mathbb{R})$ вещественных матриц бесконечного порядка, и произвольных продакт-мер с некоторым условием на моменты (в том числе гауссовских). Этому будет посвящена отдельная статья.

Рассмотрим подгруппы

$$X^{\{p\}} = \left\{ I + x \in B^{\mathbb{N}} \mid I + x = I + \sum_{k \in \{p\}} \sum_{n=k+1}^{\infty} x_{kn} E_{kn} \right\},$$

$$X_{\{p\}} = \left\{ I + x \in B^{\mathbb{N}} \mid I + x = I + \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus \{p\}} \sum_{n=k+1}^{\infty} x_{kn} E_{kn} \right\}$$

группы $B^{\mathbb{N}}$, где $\{p\} = (p_1, p_2, \dots)$ — конечное подмножество натуральных чисел. Очевидно, что правое действие группы $G = B_0^{\mathbb{N}}$ корректно определено на левых классах смежности $X_{\{p\}} \setminus B^{\mathbb{N}}$ и что $X_{\{p\}} \setminus B^{\mathbb{N}} \simeq X^{\{p\}}$. В случае когда $X = X^{\{p\}}$, группа $\alpha(G)' \subset \text{Aut}(X)$, очевидно, содержит образ группы

$$B(\{p\}, \mathbb{R}) = \left\{ I + x \in B^{\mathbb{N}} \mid I + x = I + \sum_{k, n \in \{p\}, k < n} x_{kn} E_{kn} \right\}$$

относительно левого действия $L: B(\{p\}, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(X^{\{p\}})$. Положим $B(m, \mathbb{R}) = B((1, \dots, m), \mathbb{R})$.

Определим на группе $X^{\{p\}}$ гауссову нецентрированную продакт-меру: $d\mu^{\{p\}}(x) = d\mu_{(b,a)}^{\{p\}}(x) = \bigotimes_{k \in \{p\}} \bigotimes_{n=k+1}^{\infty} (b_{kn}/\pi)^{1/2} \exp(-b_{kn}(x_{kn} - a_{kn})^2) dx_{kn}$, где $b = (b_{kn})_{k < n}$, $b_{kn} > 0$, и $a = (a_{kn})_{k < n}$, $a_{kn} \in \mathbb{R}^1$. Положим $T^{R, \mu, \{p\}} = \pi^{R, \mu^{\{p\}}, X^{\{p\}}}$. Естественно назвать представления $T^{R, \mu, \{p\}}$ аналогом квазирегулярных представлений.

ТЕОРЕМА 1. Представление $T^{R, \mu, \{p\}}: B_0^{\mathbb{N}} \rightarrow U(L^2(X^{\{p\}}, d\mu_{(b,a)}^{\{p\}}))$ неприводимо тогда и только тогда, когда

1) $(\mu_{(b,a)}^{\{p\}})^{L_s} \perp \mu_{(b,a)}^{\{p\}}$ для любого $s \in B(\{p\}, \mathbb{R}) \setminus \{e\}$,

2) мера $\mu_{(b,a)}^{\{p\}}$ является $B_0^{\mathbb{N}}$ -право-эргодичной.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для продакт-мер условие 2) выполнено всегда. Для других мер это условие может не выполняться.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $\{p\} = n$, $n \in \mathbb{N}$, группа $B(\{p\}, \mathbb{R})$ становится тривиальной и условие 1) исчезает. Однако представление $T^{R,\mu,\{p\}}$ неприводимо и в этом случае.

ТЕОРЕМА 2. Два неприводимых представления $T^{R,\mu,\{p\}}$ и $T^{R,\mu',\{p'\}}$ эквивалентны, $T^{R,\mu,\{p\}} \sim T^{R,\mu',\{p'\}}$, тогда и только тогда, когда

1) $\{p\} = \{p'\}$,

2) $\mu^{\{p\}} \sim (\mu')^{\{p'\}}$.

Для мер $\mu_{(b,a)}^{(1,\dots,m)}$, $m \in \mathbb{N}$, справедлива

ЛЕММА 1. Следующие условия эквивалентны:

1) $(\mu_{(b,a)}^{(1,\dots,m)})^{L_t} \perp \mu_{(b,a)}^{(1,\dots,m)}$ для любого $t \in B(m, \mathbb{R}) \setminus \{e\}$,

2) $S_{pq}^L(\mu) = S_{pq}^{L_0}(\mu) + S_{pq}^{L_1}(\mu) = \infty$ для любых $p < q \leq m$, где

$$S_{pq}^{L_0}(\mu) = \frac{1}{4} \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{b_{pn}}{b_{qn}}, \quad S_{pq}^{L_1}(\mu) = \frac{1}{2} \sum_{n=q+1}^{\infty} b_{pn} a_{qn}^2.$$

Идея доказательства неприводимости для $\{p\} = (1, \dots, m)$. Обозначим через $\mathfrak{A}^m$ алгебру фон Неймана, порожденную представлением $T^{R,\mu,m} := T^{R,\mu,(1,\dots,m)}$, $\mathfrak{A}^m = (T_t^{R,\mu,m} \mid t \in B_0^{\mathbb{N}})''$. Пусть, кроме того, $\langle f_n \mid n = 1, 2, \dots \rangle$ обозначает замыкание линейного пространства, порожденного векторами $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, в гильбертовом пространстве H .

Пусть теперь выполнено условие 1) теоремы 1. По лемме 1 это равносильно расходимости рядов $S_{pq}^L(\mu)$ для любых $p < q \leq m$. Тогда, используя леммы 2 и 3 (см. ниже), можно показать, что операторы умножения на независимые переменные x_{kn} , $k < n$, $1 \leq k \leq m$, можно приблизить в сильном резольвентном смысле генераторами $A_{kn} = \frac{d}{dt} T_{I+tE_{kn}}^{R,\mu,m} \big|_{t=0}$, $k < n$, т.е. что оператор x_{kn} присоединен к алгебре фон-Неймана $\mathfrak{A}^m$ (см. [9], обозначение: $x_{kn} \eta \mathfrak{A}^m$). В этом случае оператор $A \in (\mathfrak{A}^m)'$ обязан быть оператором умножения на некоторую существенно ограниченную функцию $a: X^m \rightarrow \mathbb{C}$. Коммутация $[A, T_t^{R,\mu,m}] = 0$ для любого $t \in B_0^{\mathbb{N}}$ влечет за собой $a(xt) = a(x)$ для любого $t \in B_0^{\mathbb{N}}$; поэтому из эргодичности меры $\mu_{(b,a)}^{(1,\dots,m)}$ на пространстве $X^m = X^{(1,\dots,m)}$ заключаем, что $A = a = \text{const}$, и это доказывает теорему 1.

Положим $D_{kn} = \partial/\partial x_{kn} - b_{kn}(x_{kn} - a_{kn})$. Генераторы A_{kn} , $k < n$, имеют вид

$$A_{kn} = \sum_{r=1}^{k-1} x_{rk} D_{rn} + D_{kn}, \quad k \leq m, \quad A_{kn} = \sum_{r=1}^m x_{rk} D_{rn}, \quad k > m.$$

Пусть $\Delta_p = \{1, \dots, p\}$. Для любого подмножества $d_p \subset \Delta_p$, $1 \leq p \leq m$, положим $A_{pn}^{d_p} = \sum_{r \in d_p} x_{rp} D_{rn}$, $p < n$, $x_{rr} = 1$, $r \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 2. Включение $x_{pq} \in \langle A_{pn}^{d_p} A_{qn}^{d_q} \mathbf{1} \mid q < n \rangle$, $1 \leq p \leq m$, $p < q$, имеет место тогда и только тогда, когда

$$\Sigma_{pq}^{d_p, d_q} = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{b_{pn}^2}{\sum_{r \in d_p} b_{rn} \sum_{s \in d_q} b_{sn}} = \infty.$$

Более того, в этом случае мы имеем $x_{pq} \eta \mathfrak{A}^m$.

Пусть обратный элемент к $I + x = I + \sum x_{kn} E_{kn} \in X^{\{p\}}$ имеет вид $(I + x)^{-1} = I + \sum x_{kn}^{-1} E_{kn} \in X^{\{p\}}$.

ЛЕММА 3. Включение $x_{pr}^{-1} \in \langle (x_{pk}^{-1} + a_{pk}) x_{rk} \mid m < k \rangle$, $p + 1 \leq r \leq m$, имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sigma_{pr}(\mu) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2b_{rk}} + a_{rk}^2}{\frac{1}{2b_{pk}} + \sum_{s=p+1, s \neq r}^m (\frac{1}{2b_{sk}} + a_{sk}^2) + \frac{1}{2b_{rk}}} = \infty.$$

Более того, в этом случае мы имеем $x_{pr}^{-1} \eta \mathfrak{A}^m$.

Частные случаи $m = 1, 2, 3$ разобраны в [11].

Автор выражает благодарность рецензенту за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Косяк А. В. Функци. анализ и его прил., **24**, вып. 3, 82–83 (1990).
2. Kosyak A. V. Selecta Math. Soviet., **11**, 241–291 (1992).
3. Kosyak A. V. Methods of Funct. Anal. Topology, **6**, No. 4, 43–56 (2000).
4. Kosyak A. V. J. Funct. Anal., **125**, 493–547 (1994).
5. Albeverio S., Hoegh-Krohn R. Composito Math., **36**, No. 1, 37–52 (1978).
6. Исмаилов Р. С. Функци. анализ и его прил., **15**, вып. 2, 73–74 (1981).
7. Albeverio S., Hoegh-Krohn R., Testard D. J. Funct. Anal., **41**, 378–396 (1981).
8. Albeverio S., Hoegh-Krohn R., Testard D., Vershik A. J. Funct. Anal., **51**, 115–131 (1983).
9. Dixmier J. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, 2^e édition. Gauthier-Villars, Paris, 1969.
10. Kosyak A. V. Ukr. Math. J., **54**, No. 2, 205–215 (2002).
11. Kosyak A. V. Methods Funct. Anal. Topology, **8**, No. 2, 33–49 (2002).

Институт математики
Академии наук Украины
e-mail: kosyak@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
26 апреля 2002 г.

УДК 517.984

Об эффекте Ефимова в модели теории возмущений существенного спектра*

© 2003. С. Н. ЛАКАЕВ, Т. Х. РАСУЛОВ

Одним из замечательных результатов спектрального анализа трехчастичного оператора Шрёдингера является эффект Ефимова: если в системе трех частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов, ни одна двухчастичная подсистема не имеет связанных состояний с отрицательной

*Работа частично поддержана Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) и Фондом фундаментальных исследований ГКНТ РУз.