Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов, Об эффекте Ефимова в модели теории возмущений существенного спектра, *Функц. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 1, 81–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:42:27

ЛЕММА 2. Включение $x_{pq} \in \langle A_{pn}^{d_p} A_{qn}^{d_q} \mathbf{1} \mid q < n \rangle$, $1 \leq p \leq m$, $p < q$, имеет место тогда и только тогда, когда

$$\Sigma_{pq}^{d_p, d_q} = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{b_{pn}^2}{\sum_{r \in d_p} b_{rn} \sum_{s \in d_q} b_{sn}} = \infty.$$

Более того, в этом случае мы имеем $x_{pq} \eta \mathfrak{A}^m$.

Пусть обратный элемент к $I + x = I + \sum x_{kn} E_{kn} \in X^{\{p\}}$ имеет вид $(I + x)^{-1} = I + \sum x_{kn}^{-1} E_{kn} \in X^{\{p\}}$.

ЛЕММА 3. Включение $x_{pr}^{-1} \in \langle (x_{pk}^{-1} + a_{pk}) x_{rk} \mid m < k \rangle$, $p + 1 \leq r \leq m$, имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sigma_{pr}(\mu) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2b_{rk}} + a_{rk}^2}{\frac{1}{2b_{pk}} + \sum_{s=p+1, s \neq r}^m (\frac{1}{2b_{sk}} + a_{sk}^2) + \frac{1}{2b_{rk}}} = \infty.$$

Более того, в этом случае мы имеем $x_{pr}^{-1} \eta \mathfrak{A}^m$.

Частные случаи $m = 1, 2, 3$ разобраны в [11].

Автор выражает благодарность рецензенту за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Косяк А. В. Функци. анализ и его прил., **24**, вып. 3, 82–83 (1990).
2. Kosyak A. V. Selecta Math. Soviet., **11**, 241–291 (1992).
3. Kosyak A. V. Methods of Funct. Anal. Topology, **6**, No. 4, 43–56 (2000).
4. Kosyak A. V. J. Funct. Anal., **125**, 493–547 (1994).
5. Albeverio S., Hoegh-Krohn R. Composito Math., **36**, No. 1, 37–52 (1978).
6. Исмагилов Р. С. Функци. анализ и его прил., **15**, вып. 2, 73–74 (1981).
7. Albeverio S., Hoegh-Krohn R., Testard D. J. Funct. Anal., **41**, 378–396 (1981).
8. Albeverio S., Hoegh-Krohn R., Testard D., Vershik A. J. Funct. Anal., **51**, 115–131 (1983).
9. Dixmier J. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, 2^e édition. Gauthier-Villars, Paris, 1969.
10. Kosyak A. V. Ukr. Math. J., **54**, No. 2, 205–215 (2002).
11. Kosyak A. V. Methods Funct. Anal. Topology, **8**, No. 2, 33–49 (2002).

Институт математики
Академии наук Украины
e-mail: kosyak@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
26 апреля 2002 г.

УДК 517.984

Об эффекте Ефимова в модели теории возмущений существенного спектра*

© 2003. С. Н. ЛАКАЕВ, Т. Х. РАСУЛОВ

Одним из замечательных результатов спектрального анализа трехчастичного оператора Шрёдингера является эффект Ефимова: если в системе трех частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов, ни одна двухчастичная подсистема не имеет связанных состояний с отрицательной

*Работа частично поддержана Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) и Фондом фундаментальных исследований ГКНТ РУз.

энергией, но по крайней мере две из них имеют резонанс с нулевой энергией, то эта трехчастичная система имеет бесконечное число связанных состояний с отрицательной энергией, накапливающихся к нулю. Этот эффект впервые был обнаружен Ефимовым [1]. Строгое математическое доказательство существования эффекта Ефимова было проведено Яфаевым [2] и Соболевым [3].

Для системы трех решетчатых частиц существование эффекта Ефимова обнаружено в [4, 5], а строгое математическое доказательство изложено в [6, 7]. В то же время изучение систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц сводится к изучению спектральных свойств самосопряженных операторов, действующих в «обрезанном» подпространстве $\mathcal{H}_n$, состоящем из одночастичного, двухчастичного, ..., n -частичного подпространств фоковского пространства [8, 9].

В данной заметке рассматривается некоторый модельный оператор, соответствующий оператору энергии с несохраняющимся ограниченным числом частиц, действующий в подпространстве $\mathcal{H}_3$. При некоторых естественных условиях на параметры, задающие данный модельный оператор, описаны местоположение и структура существенного спектра и установлена конечность или бесконечность числа собственных значений (эффект Ефимова).

Пусть T^3 — трехмерный тор, $(T^3)^2 = T^3 \times T^3$ — декартово произведение, $L_2(T^3)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций, определенных на T^3 , $L_2^s((T^3)^2)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых симметричных на $(T^3)^2$ функций и $\mathbb{C}^1$ — одномерное комплексное пространство.

Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ — прямая сумма гильбертовых пространств, где $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}^1$, $\mathcal{H}_1 = L_2(T^3)$, $\mathcal{H}_2 = L_2^s((T^3)^2)$.

Рассмотрим операторную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где операторы $A_{ij}: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1, 2$, определяются по формулам

$$\begin{aligned} (A_{00}f_0)_0 &= u_0f_0, & (A_{01}f_1)_0 &= \int b(t)f_1(t)dt, & (A_{10}f_0)_1 &= b(x)f_0, \\ (A_{11}f_1)_1 &= u(x)f_1(x), & (A_{12}f_2)_1 &= \int b(t)f_2(x, t)dt, \\ (A_{21}f_1)_2 &= \frac{1}{2}(b(x)f_1(y) + b(y)f_1(x)), & (A_{22}f_2)_2 &= w(x, y)f_2(x, y). \end{aligned}$$

Здесь $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}$, u_0 — вещественное число, $b(x)$, $u(x)$ — вещественно-аналитические функции на T^3 и $w(x, y)$ — вещественно-аналитическая симметричная функция на $(T^3)^2$. Интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всему тору T^3 .

ЛЕММА 1. *Оператор A , определенный операторной матрицей (1) и действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, является ограниченным и самосопряженным.*

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. Для любого $x \in T^3$ определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus [m_w(x); M_w(x)]$ функцию

$$\Delta_1(x, z) = u(x) - z - \frac{1}{2} \int \frac{b^2(t)}{w(x, t) - z} dt,$$

где $M_w(x) = \max_{y \in T^3} w(x, y)$, $m_w(x) = \min_{y \in T^3} w(x, y)$.

Пусть σ_1 — множество точек $z \in \mathbb{C}$, для которых уравнение $\Delta_1(x, z) = 0$ имеет решение хотя бы для одного $x \in T^3$.

Введем обозначения

$$M_w = \max_{x, y \in T^3} w(x, y), \quad m_w = \min_{x, y \in T^3} w(x, y) \quad \text{и} \quad \Sigma = [m_w; M_w] \cup \sigma_1.$$

Обозначим через $\Delta(z)$ и $D(x, t; z)$ соответственно определитель и минор Фредгольма оператора $I - K$, где I — единичный оператор в $L_2(T^3)$, а K — интегральный оператор в $L_2(T^3)$, порожденный ядром

$$K(x, y; z) = \frac{b(x)b(y)}{2\Delta_1(x, z)(w(x, y) - z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma.$$

Определим регулярную в области $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ функцию

$$\Omega(z) = \left(u_0 - z - \int \frac{b^2(t) dt}{\Delta_1(t, z)} \right) \Delta(z) + \iint \frac{b(x)b(t)D(x, t; z)}{\Delta_1(t, z)} dx dt.$$

Пусть оператор $T(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, $z \neq u_0$, действует в гильбертовом пространстве $L_2(T^3)$ по формуле

$$T(z)f(x) = \int \left[K(x, t; z) + \frac{b(x)b(t)}{(u_0 - z)\Delta_1(x, z)} \right] f(t) dt.$$

Пусть оператор $T(u_0)$, $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ как операторная матрица

$$T(u_0) = \begin{pmatrix} T_{00}(u_0) & T_{01}(u_0) \\ T_{10}(u_0) & T_{11}(u_0) \end{pmatrix},$$

где операторы $T_{ij}(u_0): \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1$, определяются равенствами

$$(T_{00}(u_0)f_0)_0 = f_0, \quad (T_{01}(u_0)f_1)_0 = \int b(t)f_1(t) dt = 0,$$

$$(T_{10}(u_0)f_0)_1 = -\frac{b(x)}{\Delta_1(x, u_0)} f_0, \quad (T_{11}(u_0)f_1)_1 = \int K(x, t; u_0)f_1(t) dt.$$

ЛЕММА 2. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда оператор $T(z)$ имеет собственное значение, равное единице.

ЛЕММА 3. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда $\Omega(z) = 0$.

УСЛОВИЕ 1. Функция $w(x, y)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $(x_0, x_0) \in (T^3)^2$.

Пусть $E_{\min}$ и $E_{\max}$ — соответственно нижняя и верхняя грани множества σ_1 .

Следующая теорема описывает структуру и местоположение существенного спектра оператора A .

ТЕОРЕМА 1. Существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(A)$ оператора A совпадает с множеством Σ , т. е. $\sigma_{\text{ess}}(A) = \Sigma$. Кроме того,

1) если $\min_{x \in T^3} \Delta_1(x, m_w) \geq 0$, то существенный спектр оператора A состоит из отрезка $[m_w; M_w]$;

2) если $\min_{x \in T^3} \Delta_1(x, m_w) < 0$ и $\max_{x \in T^3} \Delta_1(x, m_w) \geq 0$, то существенный спектр оператора A совпадает с отрезком $[E_{\min}; M_w]$ и $E_{\min} < m_w$;

3) если $\max_{x \in T^3} \Delta_1(x, m_w) < 0$, то существенный спектр оператора A совпадает с множеством $[E_{\min}; E_{\max}] \cup [m_w; M_w]$ и $E_{\max} < m_w$.

УСЛОВИЕ 2. Матрицы, составленные из вторых частных производных функции $w(x, y)$ в точке $(x_0, x_0) \in (T^3)^2$, линейно зависимы, т. е. существуют положительно определенная матрица W и числа l_1, l_2 ($l_1 > 0, l_2 \neq 0$), такие, что

$$\left(\frac{\partial^2 w(x_0, x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^3 = \left(\frac{\partial^2 w(x_0, x_0)}{\partial y_i \partial y_j} \right)_{i,j=1}^3 = l_1 W, \quad \left(\frac{\partial^2 w(x_0, x_0)}{\partial x_i \partial y_j} \right)_{i,j=1}^3 = l_2 W.$$

УСЛОВИЕ 3. Функция $u(x)$ имеет единственный минимум в точке $x_0 \in T^3$ и

$$\max_{x \in T^3} \int \frac{b^2(t)}{w(x, t) - m_w} dt = \int \frac{b^2(t)}{w(x_0, t) - m_w} dt.$$

УСЛОВИЕ 4. Пусть $b(x_0) \neq 0, m_w \neq u_0$ и выполняется равенство

$$u(x_0) - m_w - \frac{1}{2} \int \frac{b^2(t) dt}{w(x_0, t) - m_w} = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условия 1–4 выполняются в случае, когда

$$u(x) = \varepsilon(x) + c, \quad w(x, y) = \varepsilon(x) + \varepsilon(x + y) + \varepsilon(y), \quad b^2(x) \equiv 2c \left(\int \frac{dt}{\varepsilon(t)} \right)^{-1},$$

где $c > 0, \varepsilon(x) = 3 - \cos x_1 - \cos x_2 - \cos x_3$ и $x = (x_1, x_2, x_3) \in T^3$.

Теперь сформулируем основные результаты работы:

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что выполнены условия 1–4. Тогда оператор A имеет бесконечное число собственных значений $E_1, \dots, E_n, \dots$, таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = m_w$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условие 1 и соотношение $\Delta_1(x_0, m_w) \neq 0$. Тогда часть дискретного спектра, лежащая ниже m_w , лишь конечна.

Авторы приносят глубокую благодарность рецензенту за ценные и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов В. Н. Ядерная физика, **12**, вып. 5, 1080–1091 (1970).
2. Яфаев Д. Р. Матем. сб., **9(136)**, № 4(8), 567–592 (1974).
3. Sobolev A. V. Commun. Math. Phys., **156**, 101–126 (1993).
4. Mattis D. C. Rev. Modern Phys., **58**, No. 2, 361–379 (1986).
5. Mogilner A. I. In: Applications of Self-Adjoint Extensions in Quantum Physics, 161–173 (1989).
6. Лакаев С. Н. ТМФ, **89**, № 1, 94–104 (1991).
7. Лакаев С. Н. Функц. анализ и его прил., **27**, вып. 3, 15–28 (1993).
8. Mogilner A. I. Adv. Soviet Math., Vol. 5, Amer. Math. Soc., Providence, 1991, pp. 139–194.
9. Minlos R., Spohn H. Amer. Math. Soc. Transl. (2), **177**, 159–193 (1996).