Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. П. Нижник, Оператор Шрёдингера с δ' -
взаимодействием, *Функци. анализ и его прил.*, 2003,
том 37, выпуск 1, 85–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa140>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским
соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:15:53

УДК 517.9

Оператор Шрёдингера с δ' -взаимодействием

© 2003. Л. П. Нижник

1. Одномерный оператор Шрёдингера $L_{X,\alpha}$ с точечным δ' -взаимодействием на конечном множестве $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ точек с интенсивностями $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ определяется дифференциальным выражением $-d^2/dx^2$ на функциях $\psi(x)$ из соболевского пространства $W_2^2(\mathbb{R}^1 \setminus X)$, удовлетворяющих в точках множества X условиям сопряжения:

$$\psi'(x_k + 0) = \psi'(x_k - 0), \quad \psi(x_k + 0) - \psi(x_k - 0) = \alpha_k \psi'(x_k). \quad (1)$$

Этот оператор $L_{X,\alpha}$ является самосопряженным в $L_2(\mathbb{R}^1)$. Его непрерывный спектр состоит из положительной полуоси, а на отрицательной полуоси он может иметь не более n собственных значений [1].

ТЕОРЕМА 1. Пусть все интенсивности δ' -взаимодействий α_k меньше 0 ($k = 1, \dots, n$). Тогда у самосопряженного оператора Шрёдингера $L_{X,\alpha}$ на отрицательной полуоси имеется ровно n различных собственных значений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi(x)$ — собственная функция оператора $L_{X,\alpha}$ с собственным значением $-\lambda^2$ ($\lambda > 0$). Определим адмитанс $z(x, \lambda)$ равенством $z = \lambda\psi(x)/\psi'(x)$. Слева от точек множества X , где $\psi = ce^{\lambda x}$, имеем $z(x, \lambda) = 1$. Справа от точек множества X (т.е. при $x \geq x_n$) $z(x, \lambda) = -1$. В точках $x \in X$ адмитанс терпит разрыв: $z(x_k + 0, \lambda) - z(x_k - 0, \lambda) = \alpha_k \lambda$. Введем последовательность $z_k(\lambda) = z(x_k + 0, \lambda)$. Ясно, что $z_1(\lambda) = 1 + \alpha_1 \lambda$, а $z_{k+1}(\lambda) = [z_k(\lambda) + \text{th}(\lambda d_k)]/[1 + z_k(\lambda) \text{th}(\lambda d_k)] + \alpha_{k+1} \lambda$, где $d_k = x_{k+1} - x_k$ — расстояние между соседними точками δ' -взаимодействий. Характеристическое уравнение на собственные значения имеет вид $z_n(\lambda) = -1$. Индукцией по k можно показать, что у функций $z_k(\lambda)$ на положительной полуоси имеется $k - 1$ простых полюсов, в окрестности которых $z'_k(\lambda)$ меньше 0, а уравнение $z_k(\lambda) = -1$ имеет ровно k разных решений. При $k = n$ это дает утверждение теоремы.

2. Пусть Γ — замкнутое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^1$ лебеговой меры нуль ($|\Gamma| = 0$). В пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$ определен симметрический минимальный оператор $L_{\min}$, $L_{\min}\varphi(x) = -\varphi''(x)$ на функциях $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1 \setminus \Gamma)$. Самосопряженные расширения оператора $L_{\min}$ можно рассматривать как одномерные операторы Шрёдингера с взаимодействием на Γ . Случай, когда Γ состоит из конечного числа точек, хорошо изучены [1]. Имеется ряд работ, посвященных оператору Шрёдингера с фрактальным потенциалом [2]. Для рассмотрения более общих взаимодействий на Γ будем предполагать, что на Γ задана мера Радона μ [2]. Пусть $W_2^2(\mathbb{R}^1 \setminus \Gamma)$ — соболевское пространство на открытом множестве $\mathbb{R}^1 \setminus \Gamma$. При $x \in \mathbb{R}^1 \setminus \Gamma$ функции $u(x)$ из $W_2^2(\mathbb{R}^1 \setminus \Gamma)$ имеют производные $u'(x)$, $u''(x)$, принадлежащие $L_2(\mathbb{R}^1)$. Рассмотрим пространство $W_2^2(\mathbb{R}^1 \setminus \Gamma, \mu)$ как часть

пространства $W_2^2(\mathbb{R}^1 \setminus \Gamma)$, состоящую из всех функций, допускающих для любых $x, s \in \mathbb{R}^1 \setminus \Gamma$ представление

$$\begin{aligned} u(x) &= u(s) + \int_s^x u'(\xi) d\xi + \int_s^x f(\xi) \mu(d\xi), \\ u'(x) &= u'(s) + \int_s^x u''(\xi) d\xi + \int_s^x g(\xi) \mu(d\xi), \end{aligned} \quad (2)$$

где функции f и g определены на Γ и абсолютно интегрируемы по мере μ . Для этих функций введем обозначения $f(x) = du(x)/d\mu$, $g(x) = du'(x)/d\mu$ и будем называть их производными по мере μ (или скачками) функций u и u' в точках $x \in \Gamma$. Исходя из (2), можно определить регуляризованные следы $u(x)$ и $u'(x)$ на Γ с помощью равенств

$$u_r(x) = \frac{1}{2}[u(x+0) + u(x-0)], \quad u'_r(x) = \frac{1}{2}[u'(x+0) + u'(x-0)], \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

поскольку указанные в (3) пределы для правых частей из (2) существуют. Таким образом, каждой функции $u(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^1 \setminus \Gamma, \mu)$ соответствуют четыре функции u_r , u'_r , $du/d\mu$, $du'/d\mu$ — ее граничные данные на Γ .

Для функций $u, v \in W_2^2(\mathbb{R}^1 \setminus \Gamma, \mu)$ справедлива формула Лейбница $d(uv)/d\mu = (du/d\mu)v_r + u_r(dv/d\mu)$, а также первая и вторая формулы Грина

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^1} u''(x)v(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^1} u'(x)v'(x) dx \\ &+ \int_{\Gamma} \left[\frac{du'(x)}{d\mu} v_r(x) + u'_r(x) \frac{dv(x)}{d\mu} \right] \mu(dx), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^1} [u(x)v''(x) - u''(x)v(x)] dx &= \int_{\Gamma} \left[\frac{du'(x)}{d\mu} v_r(x) + u'_r(x) \frac{dv(x)}{d\mu} \right. \\ &\left. - u_r(x) \frac{dv'(x)}{d\mu} - \frac{du(x)}{d\mu} v'_r(x) \right] \mu(dx). \end{aligned} \quad (5)$$

Формулы Грина позволяют определить самосопряженные граничные условия на Γ . Граничные условия вида

$$\frac{du'(x)}{d\mu} = 0, \quad \frac{du(x)}{d\mu} = \alpha(x)u'_r(x), \quad x \in \Gamma, \quad (6)$$

выделяют оператор Шрёдингера $L_{\Gamma, \alpha}$ с δ' -взаимодействием на Γ интенсивности $\alpha(x)$ по мере μ . Областью определения оператора $L_{\Gamma, \alpha}$ служат все функции из $W_2^2(\mathbb{R}^1 \setminus \Gamma, \mu)$, удовлетворяющие условиям (6). Закон действия задается равенством $L_{\Gamma, \alpha} u(x) = -u''(x)$. Если функция $\alpha(x)$ является вещественной и абсолютно интегрируемой на Γ по мере μ , то оператор $L_{\Gamma, \alpha}$ является самосопряженным в $L_2(\mathbb{R}^1)$.

ТЕОРЕМА 2. *Оператор Шрёдингера $L_{\Gamma, \alpha}$ с δ' -взаимодействием на канторовом множестве $\Gamma \subset [0, 1]$ со стандартной мерой Хаусдорфа μ [2] и с постоянной интенсивностью $\alpha < 0$ является самосопряженным оператором в $L_2(\mathbb{R}^1)$, непрерывный спектр которого составляет положительную полуось, а на отрицательной полуоси имеется бесконечное число его собственных значений с единственной предельной точкой $-\infty$.*

Для качественного анализа спектра оператора $L_{\Gamma, \alpha}$ можно применить метод расщепления [3]. Чтобы установить, что у оператора $L_{\Gamma, \alpha}$ имеется бесконечное число отрицательных собственных значений, достаточно построить последовательность пробных финитных функций $\phi_k(x)$ ($\|\phi_k(x)\| = 1$), на которых $(L_{\Gamma, \alpha} \phi_k, \phi_k)$ стремится к $-\infty$. Пробные функции $\phi_k(x)$ определим равенством $\phi_k(x) = \int_0^x \rho_k(s) ds + \alpha \int_0^x \rho_k(s) \mu(ds)$, где $\rho_k(x)$ — финитные на интервале $I_k = [0, 3^{-k}]$ функции, нечетные относительно середины интервала I_k и принимающие максимальное постоянное значение m_k на интервале $[2 \cdot 3^{-k-2}, 3^{-k-1}]$. Поскольку $\phi'(x) = \rho(x)$, то в силу (4) при $k \rightarrow \infty$

$$(L_{X, \alpha} \phi_k, \phi_k) = \int_{I_k} \rho^2(x) dx + \alpha \int_{I_k} \rho^2(x) \mu(dx) \leq m_k^2(|I_k| + 2\alpha\mu(I_{k+2})) \rightarrow -\infty,$$

поскольку $|I_k| = 3^{-k}$, $\mu(I_{k+2}) = 2^{-(k+2)}$, $m_k \rightarrow \infty$, а $\alpha < 0$.

3. Пусть точки $(x_1, \dots, x_n) = X$ равномерно распределены на фиксированном интервале $[a, b]$, а интенсивности δ' -взаимодействия в этих точках постоянны и равны α/n , где α — фиксированное действительное число. Будем рассматривать случай, когда $n \rightarrow \infty$. Обозначим оператор Шрёдингера $L_{X, \alpha/n}$ с δ' -взаимодействием на X через $L_{[a, b], \alpha}^{(n)}$. Если существует самосопряженный оператор L , такой, что в смысле сильной резольвентной сходимости $L_{[a, b], \alpha}^{(n)} \rightarrow L$ при $n \rightarrow \infty$, то оператор L будем называть оператором Шрёдингера с δ' -взаимодействием на интервале $[a, b]$ интенсивности α и обозначать $L = L_{[a, b], \alpha}$.

ТЕОРЕМА 3. *Оператор Шрёдингера $L_{[a, b], \alpha}$ с δ' -взаимодействием интенсивности α на интервале $[a, b]$ существует, является самосопряженным оператором в $L_2(\mathbb{R}^1)$ и определяется дифференциальным выражением*

$$-\frac{d}{dx} p^{-1}(x) \frac{d}{dx}, \quad \text{где } p(x) = 1 + \frac{\alpha}{b-a} \chi_{[a, b]}(x),$$

а χ — характеристическая функция интервала $[a, b]$.

Другими словами, оператор $L_{[a, b], \alpha}$ определяется равенством $L_{[a, b], \alpha} \psi(x) = -p^{-1}(x) \psi''(x)$ на функциях ψ , принадлежащих соболевскому пространству W_2^2 на (a, b) и на $\mathbb{R}^1 \setminus [a, b]$ и удовлетворяющих на концах интервала условиям сопряжения: $\psi(a+0) = \psi(a-0)$, $\psi(b+0) = \psi(b-0)$, $\psi'(a+0) = (1 + \alpha/(b-a))\psi'(a-0)$, $\psi'(b-0) = (1 + \alpha/(b-a))\psi'(b+0)$.

Доказательство основывается на изучении поведения при $n \rightarrow \infty$ фундаментальной системы решений уравнения $-\psi''(x) = z\psi(x)$, $x \notin X$, удовлетворяющих условиям сопряжения вида (1), через которую выражается ядро резольвенты.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Спектральный анализ оператора Шрёдингера $L_{[a, b], \alpha}$ можно провести в явном виде. В частности, при $\alpha = -2(b-a)$ у оператора $L_{[a, b], \alpha}$ имеется бесконечное число отрицательных собственных значений $-\lambda_k^2$, где $\lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2(b-a)}$, $k = 1, 2, \dots$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что сами операторы Шрёдингера с точечными δ' -взаимодействиями являются пределом по сильной резольвентной сходимости операторов Шрёдингера с регулярными потенциалами [4].

4. В заключении отметим, что спектральная теория операторов Шрёдингера с δ' -взаимодействием тесно связана со спектральной теорией неоднородно нагруженной струны, созданной М. Г. Крейном и И. С. Кацем [5–7]. Спектральная задача для неоднородной струны эквивалентна спектральной задаче для оператора Шрёдингера с δ' -взаимодействием с неотрицательной интенсивностью. Так, например, спектральная задача для однородной бесконечной струны с точечной массой m на ней сводится к уравнению $u'' + \lambda r(x)u(x) = 0$, где $r(x) = 1 + m\delta(x)$ — плотность струны. Это уравнение эквивалентно уравнению $u''(x) + \lambda u(x) = 0$ ($x \neq 0$) и условиям сопряжения $u(+0) = u(-0)$, $u'(+0) - u'(-0) = -\lambda m u(0)$. Подстановка $u' = \psi(x)$ сводит эту задачу к уравнению $-\psi''(x) = \lambda \psi(x)$ ($x \neq 0$) и условиям сопряжения $\psi'(+0) = \psi'(-0)$, $\psi(+0) - \psi(-0) = m\psi'(0)$, т. е. к задаче для оператора Шрёдингера с одноточечным δ' -взаимодействием интенсивности m .

Для включения общего δ' -взаимодействия в теорию струны необходимо в последней рассматривать и случай отрицательных масс. В созданной полной и законченной спектральной теории неоднородной струны свойство неотрицательности масс существенно как для метода, так и для формулировки основных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- 1.** *Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H.* Solvable models in quantum mechanics. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- 2.** *Triebel H.* Fractals and spectra. Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.
- 3.** *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. Наука, М., 1967.
- 4.** *Albeverio S., Nizhnik L. P.* Укр. матем. журн., **52** (5), 582–589 (2000).
- 5.** *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. Наука, М., 1967.
- 6.** *Кац И. С., Крейн М. Г.* Изв. вузов, матем., **3**, №2, 136–153 (1958).
- 7.** *Кац И. С.* Докл. АН СССР, **164**, №5, 975–978 (1965).

Институт математики НАН Украины
email: nizhnik@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
6 апреля 2002 г.

УДК 517.97

О нетривиальных решениях нелинейного уравнения Шрёдингера с магнитным полем

© 2003. А. А. Панков

0. Рассмотрим стационарное нелинейное магнитное уравнение Шрёдингера

$$\left(\frac{1}{i}\nabla + A(x)\right)^2 u + V(x)u = g(x, |u|)u, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Это уравнение описывает амплитуду стоячих волн $\psi(x, t) = \exp(i\omega t) \cdot u(x)$ для соответствующего эволюционного нелинейного уравнения Шрёдингера с магнитным полем. Мы интересуемся (комплексными) решениями уравнения (1), исче-