Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Панков, О нетривиальных решениях нелинейного уравнения Шрёдингера с магнитным полем, *Функц. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 1, 88–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa141>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:21:28

4. В заключении отметим, что спектральная теория операторов Шрёдингера с δ' -взаимодействием тесно связана со спектральной теорией неоднородно нагруженной струны, созданной М. Г. Крейном и И. С. Кацем [5–7]. Спектральная задача для неоднородной струны эквивалентна спектральной задаче для оператора Шрёдингера с δ' -взаимодействием с неотрицательной интенсивностью. Так, например, спектральная задача для однородной бесконечной струны с точечной массой m на ней сводится к уравнению $u'' + \lambda r(x)u(x) = 0$, где $r(x) = 1 + m\delta(x)$ — плотность струны. Это уравнение эквивалентно уравнению $u''(x) + \lambda u(x) = 0$ ($x \neq 0$) и условиям сопряжения $u(+0) = u(-0)$, $u'(+0) - u'(-0) = -\lambda m u(0)$. Подстановка $u' = \psi(x)$ сводит эту задачу к уравнению $-\psi''(x) = \lambda \psi(x)$ ($x \neq 0$) и условиям сопряжения $\psi'(+0) = \psi'(-0)$, $\psi(+0) - \psi(-0) = m\psi'(0)$, т. е. к задаче для оператора Шрёдингера с одноточечным δ' -взаимодействием интенсивности m .

Для включения общего δ' -взаимодействия в теорию струны необходимо в последней рассматривать и случай отрицательных масс. В созданной полной и законченной спектральной теории неоднородной струны свойство неотрицательности масс существенно как для метода, так и для формулировки основных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- 1.** *Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H.* Solvable models in quantum mechanics. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- 2.** *Triebel H.* Fractals and spectra. Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.
- 3.** *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. Наука, М., 1967.
- 4.** *Albeverio S., Nizhnik L. P.* Укр. матем. журн., **52** (5), 582–589 (2000).
- 5.** *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. Наука, М., 1967.
- 6.** *Кац И. С., Крейн М. Г.* Изв. вузов, матем., **3**, №2, 136–153 (1958).
- 7.** *Кац И. С.* Докл. АН СССР, **164**, №5, 975–978 (1965).

Институт математики НАН Украины
email: nizhnik@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
6 апреля 2002 г.

УДК 517.97

О нетривиальных решениях нелинейного уравнения Шрёдингера с магнитным полем

© 2003. А. А. Панков

0. Рассмотрим стационарное нелинейное магнитное уравнение Шрёдингера

$$\left(\frac{1}{i} \nabla + A(x) \right)^2 u + V(x)u = g(x, |u|)u, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Это уравнение описывает амплитуду стоячих волн $\psi(x, t) = \exp(i\omega t) \cdot u(x)$ для соответствующего эволюционного нелинейного уравнения Шрёдингера с магнитным полем. Мы интересуемся (комплексными) решениями уравнения (1), исче-

зающими на бесконечности. Для дальнейшего удобно записать уравнение (1) в несколько ином виде:

$$\left(\frac{1}{i}\nabla + A(x)\right)^2 u + V(x)u = \alpha f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

где $\alpha = \pm 1$. В сделанных далее предположениях $\alpha = +1$ отвечает случаю притягивающего самовзаимодействия, в то время как $\alpha = -1$ означает, что потенциал самовзаимодействия отталкивающий.

1. Всюду ниже предполагается, что V и A вещественны и выполнены следующие условия (i)–(v).

(i) *Левая часть формулы (2) определяет существенно самосопряженный полуограниченный снизу оператор на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Это условие выполнено, если, например, электрический потенциал V лежит в $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ и полуограничен снизу, а магнитный потенциал A локально липшицев [1]. Обозначим через H соответствующий самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R}^n)$, а через E область определения замкнутой квадратичной формы q_H , порожденной оператором H (E — гильбертово пространство с естественным скалярным произведением).

(ii) *Спектр $\sigma(H)$ оператора H дискретен.*

Если V полуограничен снизу, то из справедливости условия (ii) для $A = 0$ следует его справедливость для любого A (см. [2]). Другие достаточные условия дискретности спектра можно найти в [3], а необходимые и достаточные — в [4].

Пусть $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Каратеодори и $F(x, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть $f(x, u) = \nabla_u F(x, u)$. Положим $2^* = 2n/(n-2)$ при $n \geq 3$ и $2^* = +\infty$ в противном случае.

(iii) *Существуют такие константы $c > 0$ и $p \in (2, 2^*)$, что для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$*

$$|F(x, u)| \leq c(1 + |u|^p), \quad u \in \mathbb{C}.$$

(iv) $f(x, 0) = 0$ и

$$\lim_{u \rightarrow 0} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x, u)}{u} \right| = 0.$$

(v) *Существует такое $q > 2$, что для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $u \neq 0$*

$$0 < qF(x, u) \leq f(x, u) \cdot \bar{u}.$$

Типичный пример: $f(x, u) = |u|^{p-2}u$, $p \in (2, 2^*)$.

Отметим, что уравнение (1) инвариантно относительно естественного действия окружности S^1 . В более общем уравнении (2) мы не требуем такой инвариантности.

Очевидно, что $u = 0$ — решение уравнения (2). Поэтому в дальнейшем мы интересуемся только нетривиальными решениями.

2. Функционал

$$\Phi_\alpha(u) = \frac{\alpha}{2} q_H(u) - \int_{\mathbb{R}^n} F(x, u) \, dx$$

корректно определен на $E \subset H^1(\mathbb{R}^n)$ и принадлежит классу C^1 . Его критические точки — в точности слабые решения уравнения (2) в E . Отметим, что, в отличие

от ситуации с функционалом Φ_{+1} , отрицательное подпространство квадратичной части функционала Φ_{-1} бесконечномерно.

ЛЕММА. *Функционал Φ_α удовлетворяет условию Пале–Смейла, т. е. любая последовательность $u_k \in E$, такая, что $\Phi_\alpha(u_k)$ ограничено и $\nabla \Phi_\alpha(u_k) \rightarrow 0$, относительно компактна в E .*

ТЕОРЕМА 1. *Если $\alpha = +1$, то уравнение (2) имеет нетривиальное решение в E . Если $\alpha = -1$, то (2) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\inf \sigma(H) < 0$.*

Рассмотрим случай нечетной нелинейности: $f(x, -u) = -f(x, u)$ (эквивалентно, $F(x, -u) = F(x, u)$). Тогда появляются пары решений $\pm u$ (орбиты антиподального действия на E группы $\mathbb{Z}_2$).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть нелинейность f нечетна. Если $\alpha = +1$, то существует последовательность $\pm u_k \in E$ пар решений уравнения (2) с критическими значениями $c_k^{(+1)} = \Phi_{+1}(u_k) \rightarrow +\infty$. Если $\alpha = -1$, то число нетривиальных пар решений уравнения (2) не меньше числа отрицательных собственных значений оператора H .*

Если нелинейность имеет вид $f(x, u) = g(x, |u|)u$, то Φ_α инвариантен относительно действия окружности S^1 на E умножением. В этом случае утверждение теоремы 2 сохраняет силу с заменой $\mathbb{Z}_2$ -орбит (пар) решений S^1 -орбитами.

3. Прямое вычисление показывает, что для критической точки u

$$2\Phi_\alpha(u) = \int_{\mathbb{R}^n} [f(x, u) \cdot \bar{u} - 2F(x, u)] dx.$$

Следовательно, нетривиальные критические точки должны иметь положительные критические значения. В условиях теоремы 1 с $\alpha = +1$ нетривиальная критическая точка может быть найдена с помощью теоремы о горном перевале, если $\inf \sigma(H) > 0$, и теоремы о зацеплении в противном случае (см. [5, 6]). Если же $\alpha = -1$, то функционал Φ_α ограничен сверху. Так как Φ_α удовлетворяет условию Пале–Смейла, то он достигает своего максимального значения $\sup \Phi_\alpha \geq 0$. При этом $\sup \Phi_\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $\inf \sigma(H) \geq 0$.

В случае теоремы 2 воспользуемся вариантом идеи теоремы о фонтане [7]. Пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ — собственные значения оператора H с учетом кратности, а e_k , $k \in \mathbb{N}$, — соответствующие линейно независимые собственные функции. Обозначим через $E_k^{(+1)}$ и $E_k^{(-1)}$ замкнутые подпространства в E , порожденные функциями $\{e_1, \dots, e_k\}$ и $\{e_j\}_{j \geq k}$ соответственно. Отметим, что $E_k^{(+1)}$ конечномерно, а $E_k^{(-1)}$ имеет конечную коразмерность (основное техническое различие между случаями $\alpha = +1$ и $\alpha = -1$).

Можно показать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $r_k^{(\alpha)}$, что $\Phi_\alpha(u) \leq 0$ при $u \in E_k^{(\alpha)}$, $\|u\| \geq r_k^{(\alpha)}$. Пусть $B_k^{(\alpha)} = \{u \in E_k^{(\alpha)} : \|u\| \leq r_k^{(\alpha)}\}$. Обозначим через $\Gamma_k^{(\alpha)}$ множество всех гомеоморфизмов $\varphi: B_k^{(\alpha)} \rightarrow E$ вида $\varphi = \text{id} + \psi$, где ψ — компактное отображение, таких, что $\varphi = \text{id}$ на $\partial B_k^{(\alpha)}$ и $\varphi(-u) = -\varphi(u)$ (условие компактности излишне в случае $\alpha = +1$). Положим

$$c_k^{(\alpha)} = \inf_{\varphi \in \Gamma_k^{(\alpha)}} \sup_{u \in B_k^{(\alpha)}} \Phi_\alpha(\varphi(u)).$$

Можно показать, что $c_k^{(\alpha)}$ больше или равно 0 и является критическим значением функционала Φ_α . Очевидно также, что $\alpha c_k^{(\alpha)} \leq \alpha c_{k+1}^{(\alpha)}$. Оказывается, что $c_k^{(+1)} \rightarrow +\infty$, а $c_k^{(-1)} > 0$ в том и только том случае, когда $\lambda_k < 0$. (Для оценки снизу критических значений $c_k^{(\alpha)}$ используется вариант техники, предложенной в [8].) Наконец, если $c_k^{(\alpha)} = c_{k+1}^{(\alpha)} = c > 0$, то функционал Φ_α имеет бесконечно много критических точек на уровне c .

4. Насколько известно автору, имеется лишь несколько работ [9–12], посвященных уравнению (2). Во всех этих работах предполагается, что $H > 0$, а нелинейность притягивающая ($\alpha = +1$). При различных предположениях установлено существование нетривиального решения. При этом в [9, 12] не требуется дискретности спектра $\sigma(H)$, а в [10, 11] налагаются более сильные условия, чем дискретность спектра. Кроме того, в случае постоянных магнитного поля и потенциала V в [9] получены условия существования бесконечного числа решений. В работах [10, 11] изучается также квазиклассическое поведение решений.

Намного больше известно об уравнении (2) без магнитного поля ($A = 0$). Отметим здесь лишь результаты, непосредственно связанные с теоремами 1 и 2. (Во всех случаях имеется в виду только притягивающая нелинейность. Случай отталкивающей нелинейности, по-видимому, не рассматривался.) Существование нетривиального решения установлено в [13] в предположении, что $V(x) \geq 0$ и $V(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. В [14] условие на рост потенциала было несколько ослаблено и в случае нечетной нелинейности доказано существование бесконечного числа решений. Наконец, в [8] отмечено, что в этих результатах достаточно предполагать дискретность спектра оператора H . Кроме того, в [8] получены некоторые результаты о кратности решений в случае, когда H имеет конечное число (положительных) собственных значений ниже существенного спектра.

Автор признателен рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Leinfelder H., Simader C.* Math. Z., **176**, 1–19 (1981).
2. *Avron J., Herbst I., Simon B.* Duke Math. J., **45**, 847–883 (1978).
3. *Kondratiev V., Shubin M.* Comm. Partial Differential Equations, **27**, 477–525 (2002).
4. *Kondratiev V., Maz'ya V., Shubin M.* arXiv: math.SP/0206140, 2002.
5. *Rabinowitz P.* Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1986.
6. *Willem M.* Minimax theorems. Birkhäuser, Boston, 1996.
7. *Bartsch T.* Nonlin. Analysis, **20**, 1205–1216 (1993).
8. *Bartsch T., Pankov A., Wang Z.-Q.* Comm. Contemp. Math., **3**, 549–569 (2001).
9. *Esteban E. M., Lions P. L.* In: Partial differential equations and calculus of variations. V. I. Birkhäuser, Boston, 1989, pp. 401–449.
10. *Kurata K.* Nonlin. Analysis, **41**, 763–778 (2000).
11. *Cingolani S., Secchi S.* arXiv: math.AP/0107047, 2001.
12. *Schindler I., Tintarev K.* Rostock. Math. Kolloq., **56**, 49–54 (2002).
13. *Rabinowitz P.* Z. Angew. Math. Phys., **43**, 270–291 (1992).
14. *Bartsch T., Wang Z.-Q.* Comm. Partial Differential Equations, **20**, 1725–1741 (1995).