Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Шадрин, Полиномиальные числа Гурвица и пересечения на $\overline{\mathcal{M}}_{0,k}$, *Функц. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 1, 92–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa142>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 13:58:32

УДК 512.772.5

Полиномиальные числа Гурвица и пересечения на $\overline{\mathcal{M}}_{0,k}^*$

© 2003. С. В. ШАДРИН

1. Рассмотрим многочлен P степени n . Пусть $\Sigma = \{x_1, \dots, x_m\}$ — конечное подмножество в $\mathbb{CP}^1$, содержащее все критические значения многочлена P , в том числе и бесконечность (будем считать, что $x_1 = \infty$). *Паспортом точки* $x_i \in \Sigma$ (относительно многочлена P) называется набор натуральных чисел $A_i(P) = (a_1^i, \dots, a_{l_i}^i)$, такой, что $P^{-1}(x_i) = a_1^i y_1^i + \dots + a_{l_i}^i y_{l_i}^i$, где $y_1^i, \dots, y_{l_i}^i$ — различные точки сферы $\mathbb{CP}^1$.

В частности, паспорт $A_1(P)$ точки $x_1 = \infty$ равен (n) . Если точка x_i — регулярное значение многочлена P , то $A_i(P) = (1, \dots, 1)$. Если x_i — простое критическое значение многочлена P , то $A_i(P) = (2, 1, \dots, 1)$.

2. Припишем каждой точке $x_i \in \Sigma$ какой-нибудь паспорт $A_i = (a_1^i, \dots, a_{l_i}^i)$. Пусть $A_1 = (n)$, $\sum_{j=1}^{l_i} a_j^i = n$ для любого i и $\sum_{i=1}^m (n - l_i) = 2n - 2$. Эти условия необходимы для существования многочлена P , все критические значения которого лежат в Σ , такого, что $A_i(P) = A_i$ для любого $i = 1, \dots, m$.

Число Гурвица h называется число таких многочленов P . При этом мы рассматриваем многочлены с точностью до действия группы $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ в прообразе; каждый многочлен учитывается с весом $1/c$, где c — число автоморфизмов многочлена.

Для этого числа в [5] найдена несложная комбинаторная формула. Мы же хотим выразить это число через числа пересечений на $\overline{\mathcal{M}}_{0,k}$. Для задачи вычисления чисел Гурвица наша формула не даст ничего нового, но подобные формулы имеют самостоятельный интерес и бывают очень полезны (см. [1, 6]).

3. Через $\overline{\mathcal{M}}_{0,k}$ обозначается пространство стабильных кривых рода 0 с k отмеченными точками. Через $\psi(y)$ обозначается первый класс Черна расслоения над $\overline{\mathcal{M}}_{0,k}$ со слоем, равным кокасательной прямой в отмеченной точке y .

Мы будем рассматривать пересечения на пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{0, \sum_{i=1}^m l_i}$, причем отмеченные точки обозначим через y_j^i , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, l_i$.

Обозначим через $\pi_{p,q,k}: \overline{\mathcal{M}}_{0, \sum_{i=1}^m l_i} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{2+l_p}$ проекцию, забывающую все отмеченные точки, кроме $y_1^1, y_1^p, \dots, y_{l_p}^p$ и y_k^q . Обозначим через D_U , $U \subset \{y_j^i\}$, класс когомологий, двойственный дивизору, общая точка которого представлена двухкомпонентной кривой, такой, что все точки из множества U лежат на одной компоненте, а все точки из множества $\{y_j^i\} \setminus U$ — на другой компоненте.

Определим классы $\Psi_p(b_j^i)_{j=1, \dots, l_i}^{i=2, \dots, p-1, p+1, \dots, m}$ с помощью рекуррентных соотношений. Если $(b_j^i) = 0$, то $\Psi_p(b_j^i) = 1$. Пусть набор чисел $\widehat{b}_j^i$ отличается от b_j^i только при $i = q$, $j = k$, где $\widehat{b}_k^q = b_k^q + 1$. Тогда

$$\Psi_p(\widehat{b}_j^i) = \widehat{b}_k^q \pi_{p,q,k}^* \psi(y_k^q) \Psi_p(b_j^i) - \sum_U a_U \Psi_p((b_U)_j^i) D_{U \cup \{y_k^q\}}, \quad (1)$$

где суммирование ведется по всем $U \subset \{y_j^i\} \setminus \{y_1^1, y_1^p, \dots, y_{l_p}^p, y_k^q\}$, $a_U = \sum_{y_j^i \in U} b_j^i$, $(b_U)_j^i = b_j^i$, если $y_j^i \notin U \cup \{y_k^q\}$, и $(b_U)_j^i = 0$, если $y_j^i \in U$, а $(b_U)_k^q = a_U + b_k^q$. Корректность такого определения не вполне тривиально следует из теоремы Ки-ла [4]. Мы будем использовать лишь классы $\Psi_p = \Psi_p(a_j^i - 1)$, т.е. есть классы, определенные по набору чисел $(a_j^i - 1)_{j=1, \dots, l_i}^{i=2, \dots, p-1, p+1, \dots, m}$.

4. Сформулируем теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть $m \geq 3$. Тогда имеет место следующая формула:

$$h = \frac{n^{m-3}}{\prod_{i=1}^m \text{aut}(A_i)} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0, \Sigma_{i=1}^m l_m}} \psi(y_1^1)^{m-3} \prod_{p=2}^m \Psi_p. \quad (2)$$

5. Покажем, как можно проверить, что эта формула верна в простейших случаях.

Случай 1. Пусть $m = n$, $A_1 = (n)$, $A_2 = \dots = A_m = (2, 1, \dots, 1)$. Иначе говоря, мы рассматриваем случай, когда все критические значения простые.

Можно доказать, что Ψ_p в этом случае двойствен подмногообразию, общая точка которого состоит из $(n-1)$ -компонентной кривой, причем y_1^1 и y_1^p лежат на одной компоненте, с которой пересекаются оставшиеся $n-2$ компонент, а на каждой из этих компонент лежит ровно одна из точек y_1^i и ровно одна из точек y_j^p .

У каждого такого подмногообразия имеется $n-2$ неприводимых компонент. Соответственно интегральная часть формулы равна $(n-2)!^{n-1}$, и $h = n^{n-3}$.

Случай 2. Пусть $m = 3$, $A_1 = (n)$, $A_2 = (a_1^2, a_2^2)$, $A_3 = (2, 1, \dots, 1)$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \pi_{2,3,1}^* \psi(y_1^3), \\ \Psi_3 &= (a_1^2 - 1)! (a_2^2 - 1)! \pi_{3,2,1}^* \psi(y_1^2)^{a_1^2-1} \pi_{3,2,2}^* \psi(y_2^2)^{a_2^2-1} \\ &\quad - ((n-2)! - (a_1^2 - 1)! (a_2^2 - 1)!) D_{\{y_1^2, y_2^2\}} \pi_{3,2,1}^* \psi(y_1^2)^{n-3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что Ψ_2 двойствен дивизору, общая точка которого представлена двухкомпонентной кривой, такой, что y_1^1 и y_1^2 лежат на одной компоненте, а y_2^2 и y_1^3 — на другой. Ограничение класса Ψ_3 на этот дивизор равно

$$(a_1^2 - 1)! (a_2^2 - 1)! \psi(y_1^2)^{a_1^2-1} \psi(y_2^2)^{a_2^2-1}.$$

Далее, стандартными вычислениями [4] мы получаем, что $h = 1/\text{aut}(A_2)$.

6. Изложим схему доказательства теоремы.

Рассмотрим Σ как точку из $\mathcal{M}_{0,m}$. Соответственно вместо многочленов мы рассмотрим пары (P, Σ) , где P — многочлен, $\Sigma \in \mathcal{M}_{0,m}$ и все паспорта фиксированны.

Отображение $ll: (P, \Sigma) \mapsto \Sigma$ — это конечнолистное накрытие над $\mathcal{M}_{0,m}$, а число h — кратность этого отображения.

Существует компактификация Харриса–Мамфорда $\overline{H}$ пространства пар (P, Σ) (см. [2]), такая, что отображение ll продолжается до разветвленного накрытия $ll: \overline{H} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,m}$.

Тогда, так как $\int_{\mathcal{M}_{0,m}} \psi(x_1)^{m-3} = 1$, то $h = \int_{\overline{H}} (ll^* \psi(x_1))^{m-3}$.

Пронумеруем все прообразы всех точек из Σ . Рассмотрим отображение $st: \overline{H} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0, \sum_{i=1}^m l_i}$, сопоставляющее точке (P, Σ) кривую-прообраз многочлена P с отмеченными всеми прообразами всех точек из Σ .

Согласно лемме из [3], $n \cdot st^* \psi(y_1^1) = ll^* \psi(x_1)$ (если y_1^1 — это прообраз точки x_1 кратности n). Следовательно, $h = \int_{\overline{H}} (n \cdot st^* \psi(y_1^1))^{m-3} / (\prod_{i=1}^m \text{aut}(A_i))$ (здесь мы еще делим на количество возможных нумераций всех прообразов всех точек из Σ).

Для получения формулы (2) осталось только вычислить класс $st_* \overline{H}$. Это можно сделать, правильно интерпретировав в терминах пересечений условия, что некоторые отмеченные точки являются критическими точками некоторого многочлена с заданными порядками ветвления и что значения этого многочлена в некоторых отмеченных точках совпадают.

7. Автор выражает благодарность С. К. Ландо, С. М. Натанзону и М. З. Шапиро за полезные обсуждения. Полное доказательство теоремы см. в [7].

ЛИТЕРАТУРА

- 1.** Ekedahl T., Lando S., Shapiro M., Vainshtein A. Invent. Math., **146**, 297–327 (2001).
- 2.** Harris J., Mumford D. Invent. Math., **67**, 23–86 (1982). **3.** Ionel E. Invent. Math., **148**, No. 3, 627–658 (2002). **4.** Keel S. Trans. Amer. Math. Soc., **330**, No. 2, 545–574 (1992).
- 5.** Ландо С. К., Звонкин Д. А. Функци. анализ и его прил., **33**, вып. 3, 21–34 (1999).
- 6.** Okounkov A., Pandharipande R. arXiv: math.AG/0101147. **7.** Shadrin S. V. arXiv: math.AG/0209282.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Независимый московский университет
e-mail: shadrin@mccme.ru

Поступило в редакцию
12 апреля 2002 г.