Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Белавин, М. Джимбо, Центральные элементы эллиптической алгебры Янга–Бакстера в корнях из единицы, *Функц. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 2, 1–6

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa143>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:04:10

Центральные элементы эллиптической алгебры Янга–Бакстера в корнях из единицы*

© 2003. А. А. Белавин, М. Джимбо

1. Пусть, как обычно, $R(u)$ обозначает R -матрицу, которая действует на $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ и удовлетворяет уравнениям Янга–Бакстера

$$R_{12}(u_1 - u_2)R_{13}(u_1 - u_3)R_{23}(u_2 - u_3) = R_{23}(u_2 - u_3)R_{13}(u_1 - u_3)R_{12}(u_1 - u_2), \quad (1)$$

где $R_{12}(u) = R(u) \otimes I$, $R_{23}(u) = I \otimes R(u)$ и т. д. Здесь и далее индекс указывает компоненту произведения, на которой операторы действуют нетривиально.

Тогда алгеброй Янга–Бакстера $\mathcal{A}$ мы будем называть алгебру, генераторы $L_i^j(u)$ которой, рассматриваемые как матричные элементы $n \times n$ -матрицы $L(u)$, удовлетворяют системе уравнений

$$R_{12}(u - v)L_1(u)L_2(v) = L_2(v)L_1(u)R_{12}(u - v), \quad (2)$$

где $L_1(u) = L(u) \otimes I$ и $L_2(u) = I \otimes L(u)$.

Простейшие и наиболее известные решения уравнений (1) возникают для $n = 2$ и соответствуют 6- и 8-вершинным моделям [1]. В последнем случае элементы R -матрицы могут быть записаны в терминах якобиевых эллиптических тета-функций с полупериодами K и K' следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{\varepsilon\varepsilon}^{\varepsilon\varepsilon}(u) &= \rho\Theta(\lambda)\Theta(\lambda u)H(\lambda(u+1)), & R_{\varepsilon\varepsilon'}^{\varepsilon\varepsilon'}(u) &= \rho\Theta(\lambda)H(\lambda u)\Theta(\lambda(u+1)), \\ R_{\varepsilon'\varepsilon}^{\varepsilon\varepsilon}(u) &= \rho H(\lambda)H(\lambda u)H(\lambda(u+1)), & R_{\varepsilon'\varepsilon'}^{\varepsilon\varepsilon'}(u) &= \rho H(\lambda)\Theta(\lambda u)\Theta(\lambda(u+1)), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varepsilon, \varepsilon' = \pm$ ($\varepsilon \neq \varepsilon'$) нумеруют базисные векторы $e_{\pm}$, $V = \mathbb{C}^2$. Кроссинг-параметр λ играет важную роль в структуре алгебры $\mathcal{A}$, ее представлений и связанных с ней интегрируемых моделей. Что касается масштабного параметра ρ , то он не является существенным, как видно из (2).

В этой статье мы остановимся на вопросе о центре алгебры Янга–Бакстера для 8-вершинной модели, когда $p = \lambda/2K$ является рациональным числом. Мы будем называть эту ситуацию случаем «корня из единицы». Мы предполагаем, что $p = 2m/N$, где m , N — взаимно простые положительные целые числа, $N \geq 3$ и нечетно.

Хорошо известно, что при тригонометрическом вырождении, т. е. для $K' = 0$ и для λ в общем положении, центр алгебры $\mathcal{A}$ генерируется квантовым детерминантом. Также хорошо известно, что в корнях из единицы центр расширяется. В этом случае Тарасовым [2] дано явное выражение для добавочных центральных элементов.

*Эта работа поддержана грантами INTAS-00-00055 и РФФИ-01-02-16686.

В терминах матричных элементов $L_{\varepsilon\varepsilon'}(u)$ матрицы $L(u)$ это выражение записывается в виде

$$\langle L_{\varepsilon\varepsilon'} \rangle(u) = L_{\varepsilon\varepsilon'}(u + N - 1) L_{\varepsilon\varepsilon'}(u + N - 2) \cdots L_{\varepsilon\varepsilon'}(u). \quad (4)$$

Формула (4) имеет следующий эллиптический аналог. Фиксируем $u_0 \in \mathbb{C}/Z$, где $Z = \mathbb{Q}K + \mathbb{Q}K'$, и положим для $a, b \in \mathbb{Z}$

$$L_{\varepsilon\varepsilon'; a, b}(u; u_0) = \phi_{a, a+\varepsilon}^*(u_0) L_{\varepsilon\varepsilon'}(u) \phi_{b, b+\varepsilon'}(u_0),$$

где $\phi_{ab}(u)$, $\phi_{ab}^*(u)$ — это сплетающие векторы Бакстера, данные ниже в (17), (18). Тогда элементы

$$\Lambda_{\varepsilon\varepsilon'}(u; u_0) = \frac{1}{N} \sum_{a=0}^{N-1} L_{\varepsilon\varepsilon'; a, b}(u + N - 1; u_0) L_{\varepsilon\varepsilon'; a+\varepsilon, b+\varepsilon'}(u + N - 2; u_0) \cdots L_{\varepsilon\varepsilon'; a+(N-1)\varepsilon, b+(N-1)\varepsilon'}(u; u_0) \quad (5)$$

не зависят от $b \in \mathbb{Z}$ и являются центральными в $\mathcal{A}$. Для различных выборов параметра u_0 матрицы $\Lambda(u; u_0) = (\Lambda_{\varepsilon, \varepsilon'}(u; u_0))$ и $\Lambda(u; u'_0)$ связаны сопряжением с помощью числовой матрицы.

Формула (5) является прямым обобщением формулы Тарасова (4), и мы не претендуем на какую-либо оригинальность. Но поскольку мы не смогли обнаружить формулу (5) в литературе, мы даем ее вывод в данной статье.

2. Далее мы выбираем в качестве кроссинг-параметра

$$\lambda = \frac{4m}{N} K, \quad (6)$$

где m, N — взаимно простые положительные целые, N больше или равно 3 и нечетно. Фиксируем базисы e_+ , e_- в $V = \mathbb{C}^2$ и e_+^* , e_-^* в дуальном пространстве V^* так, что $e_{\varepsilon}^* e_{\varepsilon'} = \delta_{\varepsilon\varepsilon'}$. Метод конструирования центральных элементов является модификацией описанного в [2]. Его идея состоит в следующем. Пусть V_i ($i = 0, \dots, N$) обозначают копии V . Положим

$$\begin{aligned} L_{1\dots N}(u) &= L_1(u + N - 1) \cdots L_N(u), \\ R_{1\dots N, 0}(u) &= R_{10}(u + N - 1) \cdots R_{N0}(u). \end{aligned} \quad (7)$$

Как $L_{1\dots N}(u)$, так и $R_{1\dots N, 0}(u)$ являются операторами в $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$, матричные элементы которых принадлежат $\mathcal{A}$ и $\text{End}(V_0)$ соответственно. Из вида R -матрицы (3) с учетом (1) и (2) следует, что для любого λ операторы $R_{1\dots N, 0}(u)$ и $L_{1\dots N}(u)$ оставляют инвариантным подпространство $W_0 \subset V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ размерности $N + 1$. Более того, если λ удовлетворяет (6), то W_0 содержится в большем инвариантном подпространстве W , таком, что факторпространство $\overline{W} = W/W_0$ двумерно.

Рассмотрим ограничение операторов $L_{1\dots N}(u)$ и $R_{1\dots N, 0}(u)$ на $\overline{W}$ и обозначим соответствующие операторы через $\Lambda(u) \in \text{End}(\overline{W}) \otimes \mathcal{A}$ и $\bar{R}(u) \in \text{End}(\overline{W}) \otimes \text{End}(V_0)$. Имеем

$$\bar{R}(u - v) \Lambda(u) L_0(v) = L_0(v) \Lambda(u) \bar{R}(u - v). \quad (8)$$

Используя затем результаты из [3], мы покажем, что

$$\bar{R}(u) = f(u) I \otimes I, \quad (9)$$

где $f(u)$ — скалярный сомножитель, не равный нулю. Тогда из (8) мы получаем

$$[\Lambda(u), L_0(v)] = 0, \quad (10)$$

Это означает, что матричные элементы матрицы $\Lambda(u)$ являются центральными элементами в $\mathcal{A}$. Пространство $\overline{W}$ имеет базис $\{\Psi_\varepsilon(u_0)\}_{\varepsilon=\pm}$, который получается посредством N -кратного слияния сплетающих векторов Бакстера. Записав $\Lambda(u)$ в этом базисе, мы приходим к формуле (5).

3. В этом и следующем разделах мы напомним некоторые аспекты процедуры слияния.

Из (1) и (2) имеем

$$\begin{aligned} R_{i,i+1}(1)R_{1\dots N,0}(u) &= R_{1\dots N,0}^{i,i+1}(u)R_{i,i+1}(1), \\ R_{i,i+1}(1)L_{1\dots N}(u) &= L_{1\dots N}^{i,i+1}(u)R_{i,i+1}(1), \end{aligned} \quad (11)$$

где $R_{1\dots N,0}^{i,i+1}(u)$ и $L_{1\dots N}^{i,i+1}(u)$ — операторы, отличающиеся от $R_{1\dots N,0}(u)$ и $L_{1\dots N}(u)$ перестановкой i -го и $(i+1)$ -го факторов. Взяв $u = 1$ в (3), мы увидим, что $R_{i,i+1}(1)$ имеет ядро, которое может быть разложено по векторам

$$e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_{i-1}} \otimes (e_+ \otimes e_- - e_- \otimes e_+) \otimes e_{\alpha_{i+1}} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_N},$$

где $\alpha_k = \pm 1$. Подпространство

$$W_0 = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Ker } R_{i,i+1}(1) \subset V_1 \otimes \cdots \otimes V_N \quad (12)$$

инвариантно относительно действия $R_{1\dots N,0}(u)$ и $L_{1\dots N}(u)$. Подпространство симметрических тензоров в $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ изоморфно $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N / W_0$. Мы имеем $Pv \equiv v \pmod{W_0}$ ($v \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$) для любой перестановки тензорных компонент P .

Введем оператор

$$S = S^{(1)}S^{(2)} \dots S^{(N-1)}, \quad S^{(j)} = R_{j,j+1}(j) \cdots R_{23}(2)R_{12}(1). \quad (13)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$SR_{1\dots N,0}(u) = R_{N\dots 1,0}(u)S, \quad SL_{1\dots N}(u) = L_{N\dots 1}(u)S, \quad (14)$$

где $R_{N\dots 1,0}(u)$ и $L_{N\dots 1}(u)$ отличаются от $R_{1\dots N,0}(u)$ и $L_{1\dots N}(u)$ тем, что сомножители переставлены в обратном порядке. Поэтому

$$W = \text{Ker } S \quad (15)$$

также инвариантно относительно $R_{1\dots N,0}(u)$ и $L_{1\dots N}(u)$. Используя уравнение (1), для любого данного i можно переупорядочить сомножители оператора S таким образом, что $R_{i,i+1}(1)$ окажется в самом правом положении. Значит, $W_0 \subset W$.

4. Покажем, что $\overline{W} = W/W_0$ является двумерным, если эллиптический модуль имеет общее значение. В тригонометрическом пределе это доказывается следующим образом. Выбирая подходящий базис, легко увидеть, что оператор S коммутирует с действием $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, где q — примитивный корень N -й степени из единицы. Можно проверить, что $\text{Im } S$ является нетривиальным подмодулем для специализации стандартного $(N+1)$ -мерного представления. Из теории представлений группы $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ при $q^N = 1$ мы заключаем, что $\dim \text{Im } S = N - 1$ и, значит,

$\dim \text{Ker } S/W_0 = 2$. Из этого, в свою очередь, следует, что $\dim W/W_0 \leq 2$ в эллиптическом случае, если модуль имеет общее положение. Мы показываем, что на самом деле имеет место равенство, построением двух линейно независимых элементов из $\bar{W}$. Для этой цели мы используем сплетающие векторы Бакстера $\phi_{a,b}(u) \in V$, определенные в (17), (18). Их главные свойства суммированы в приложении.

Положим

$$\begin{aligned}\Psi_{\varepsilon,a}(u) &= \phi_{a,a+\varepsilon}(u+N-1) \otimes \phi_{a+\varepsilon,a+2\varepsilon}(u+N-2) \otimes \cdots \otimes \phi_{a+(N-1)\varepsilon,a+N\varepsilon}(u), \\ \Psi_{\varepsilon,a}^*(u) &= \phi_{a,a+\varepsilon}^*(u+N-1) \otimes \phi_{a+\varepsilon,a+2\varepsilon}^*(u+N-2) \otimes \cdots \otimes \phi_{a+(N-1)\varepsilon,a+N\varepsilon}^*(u).\end{aligned}$$

Мы будем использовать следующие свойства:

- (i) $S\Psi_{\varepsilon,a}(u) = 0$;
- (ii) $\Psi_{\varepsilon,a}^*(u)\Psi_{\varepsilon',b}(u) = \delta_{\varepsilon,\varepsilon'} (a,b \in \mathbb{Z}, \varepsilon, \varepsilon' = \pm)$;
- (iii) $\Psi_{\varepsilon,a}(u) \equiv \Psi_{\varepsilon,b}(u) \pmod{W_0} (a,b \in \mathbb{Z}, \varepsilon, \varepsilon' = \pm)$;
- (iv) вектор $\Psi_{\varepsilon}^*(u) = \frac{1}{N} \sum_{a=0}^{N-1} \Psi_{\varepsilon,a}^*(u)$ ортогонален к W_0 .

Утверждение (i) является следствием соотношений (19)–(21) из приложения. Ортогональность (ii) вытекает из (20)–(21). Чтобы получить (iii), мы используем выражение (17), $\phi_{a,a+\varepsilon}(u) = \phi(a-\varepsilon u)$, $\phi(u) = \phi(u+N)$. Отсюда следует, что

$$\Psi_{\varepsilon,a+2\varepsilon}(u) = C\Psi_{\varepsilon,a}(u) \equiv \Psi_{\varepsilon,a}(u) \pmod{W_0},$$

где C — циклическая перестановка тензорных компонент. Ввиду того что N нечетно, это эквивалентно (iii). Аналогично можно доказать (iv).

Из (ii) и (iv) очевидно, что два вектора в $\bar{W} = W/W_0$

$$\Psi_{\varepsilon}(u) = \Psi_{\varepsilon,a}(u) \pmod{W_0} \quad (\varepsilon = \pm)$$

линейно независимы при любом $u \in \mathbb{C} \setminus Z$.

5. Пусть $\bar{R}(u)$ и $\Lambda(u)$ обозначают ограничения операторов $R_{1\dots N,0}(u)$ и $L_{1\dots N}(u)$ на $\bar{W}$. Фиксируя $u_0 \in \mathbb{C} \setminus Z$, мы получаем в базисе $\{\Psi_{\varepsilon}(u_0)\}_{\varepsilon=\pm}$

$$L_{1\dots N}(u)\Psi_{\varepsilon'}(u_0) = \sum_{\varepsilon=\pm} \Psi_{\varepsilon}(u_0)\Lambda_{\varepsilon\varepsilon'}(u;u_0) \pmod{W_0},$$

где

$$\Lambda_{\varepsilon\varepsilon'}(u;u_0) = \Psi_{\varepsilon}^*(u_0)L_{1\dots N}(u)\Psi_{\varepsilon'}(u_0).$$

Правая часть дает выражение (5).

Чтобы закончить доказательство центральности (формула (10)), остается установить равенство (9). Для этого достаточно доказать, что

$$R_{1\dots N,0}(u-v)\Psi_{\varepsilon,a}(u) \otimes \phi_{a,a+\varepsilon'}(v) = f(u-v)\Psi_{\varepsilon,a}(u) \otimes \phi_{a,a+\varepsilon'}(v) \pmod{W_0}. \quad (16)$$

В принятых нами обозначениях векторы $\phi_{N,a,a+N\varepsilon}(u)$, определенные формулой (2.3.8) в [3], совпадают с $P_{1\dots N}\Psi_{\varepsilon,a}$, где $P_{1\dots N}$ обозначает симметризатор в $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$. Учтывая, что $R_{1\dots N,0}(u)P_{1\dots N} = R_{1\dots N,0}(u)$, и используя теорему 2.3.3 из [3], мы получаем

$$\begin{aligned}& R_{1\dots N,0}(u-v)\Psi_{\varepsilon,a}(u) \otimes \phi_{a,a+\varepsilon'}(v) \\ &= P_{1\dots N}R_{1\dots N,0}(u-v)\phi_{N,a,a+N\varepsilon}(u) \otimes \phi_{a,a+\varepsilon'}(v) \\ &= \tilde{f}(u-v) \sum_{\varepsilon''=\pm} \mathscr{W}_{N1}(a+\varepsilon'', a+\varepsilon', a, a|u-v) \\ & \quad \times \phi_{N,a-(N-1)\varepsilon'+\varepsilon'', a+\varepsilon'}(u) \otimes \phi_{a,a+\varepsilon''}(v) \pmod{W_0},\end{aligned}$$

где $\tilde{f}(u)$ — не равная нулю скалярная функция (см. конец стр. 45 в [3]) и $\mathscr{W}_{N1}(a, b, c, d|u)$ — больцмановские веса высших SOS-моделей. Мы использовали также их периодичность при сдвиге на N аргументов a, b, c, d . Из явной формулы (2.1.20) в [3] мы имеем

$$\mathscr{W}_{N1}(a + \varepsilon'', a + \varepsilon', a, a|u) = \delta_{\varepsilon\varepsilon''}g(u),$$

где $g(u)$ — другая ненулевая скалярная функция.

Возвращаясь к обозначениям $\Psi_{\varepsilon,a}(u)$ и полагая $f(u) = \tilde{f}(u)g(u)$, мы получаем

$$R_{1\dots N,0}(u-v)\Psi_{\varepsilon,a}(u) \otimes \phi_{a,a+\varepsilon'}(v) = f(u-v)\Psi_{\varepsilon',a}(v) \otimes \phi_{a,a+\varepsilon'}(v) \mod W_0.$$

С учетом (iii) мы приходим к (16).

Благодарности. Один из авторов (А. Б.) благодарен Высшей школе математических наук университета Токио, где эта работа была выполнена, за гостеприимство.

Приложение. Здесь мы приводим известные формулы, касающиеся сплетающих векторов Бакстера.

Следуя обозначениям [3, р. 46–47], мы выбираем $s^+ = s^- = \xi + K/\lambda$, где λ определено, как в (6), и ξ — общий комплексный параметр. Для $a \in \mathbb{Z}$ и $\varepsilon = \pm 1$ сплетающие векторы Бакстера определяются формулами

$$\phi_{a,a+\varepsilon}(u) = \phi(a - \varepsilon u), \quad \phi(u) = H_1(\lambda(\xi + u))e_+ + \Theta_1(\lambda(\xi + u))e_-, \quad (17)$$

где $H_1(u) = H(u + K)$, $\Theta_1(u) = \Theta(u + K)$. Дуальные векторы определяются соотношением $\phi_{a+\varepsilon,a}^*(u)\phi_{a+\varepsilon',a}(u) = \delta_{\varepsilon\varepsilon'}$. Явно мы имеем

$$\begin{aligned} \phi_{a+\varepsilon,a}^*(u) &= \frac{\varepsilon}{\Delta_a(u)} \phi^*(a - \varepsilon - \varepsilon u), \\ \phi^*(u) &= -\Theta_1(\lambda(\xi + u))e_+^* + H_1(\lambda(\xi + u))e_-^*. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь

$$\Delta_a(u) = [1 + u] \frac{[\xi + a + \frac{2K}{\lambda}]}{\zeta[\frac{K}{\lambda}]}, \quad [u] = H(\lambda u)\Theta(\lambda u)$$

и ζ — ненулевое комплексное число, зависящее только от K'/K . Замечая, что $[u + N] = [u]$, $[N] = 0$, мы получаем

$$\phi(u + N) = \phi(u), \quad \phi^*(u + N) = \phi^*(u).$$

Мы будем считать, что $\phi_{a,b}(u) = \phi_{a,b}^*(u) = 0$, когда не выполнено соотношение $b = a \pm 1 \mod N$. Другими словами, мы имеем дело с циклической, а не ограниченной SOS-моделью.

Сплетающие векторы удовлетворяют известным соотношениям Бакстера

$$R(u-v)\phi_{d,c}(u) \otimes \phi_{c,b}(v) = \sum_d \mathscr{W}_{11}(a, b, c, d|u-v)\phi_{a,b}(u) \otimes \phi_{d,a}(v), \quad (19)$$

где $\mathscr{W}_{11}(a, b, c, d|u)$ обозначает больцмановские веса SOS-модели, определяемые соотношениями (2.1.4a)–(2.1.4c) из [3].

Выполняются также соотношения

$$\phi_{a\pm\varepsilon,a}^*(u)\phi_{b\pm\varepsilon,b}(u) = \frac{[\xi + \frac{a+b}{2}]}{[\xi + a]} \frac{[u + 1 \mp \frac{a-b}{2}]}{[u + 1]}, \quad (20)$$

$$\phi_{a\mp\varepsilon,a}^*(u)\phi_{b\pm\varepsilon,b}(u) = \frac{[\frac{a-b}{2}]}{[\xi + a]} \frac{[u + 1 \pm (\xi + \frac{a+b}{2})]}{[u + 1]}. \quad (21)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бакстер Р.* Точно решаемые модели статистической физики. Мир, М., 1985.
2. *Tarasov V.* Cyclic monodromy matrices for the R -matrix of the six-vertex model and the chiral Potts model with fixed boundary conditions. Int. J. Mod. Phys. A, **7**, Suppl. 1B, 963–975 (1992).
3. *Date E., Jimbo M., Kuniba A., Miwa T., Okado M.* Exactly solvable SOS models II: Proof of the star-triangle relation and combinatorial identities. Adv. Stud. Pure Math., **16**, 17–122 (1988).

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
e-mail: belavin@itp.ac.ru

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo
e-mail: jimbo@ms.u-tokyo.ac.jp

Поступило в редакцию
8 сентября 2002 г.