Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Дубцов, Слабо внешние внутренние функции,
Функц. анализ и его прил., 2003, том 37, выпуск 2, 7–
15

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa144>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:55:23

УДК 517.55

Слабо внешние внутренние функции*

© 2003. Е. С. ДУБЦОВ

§1. Введение

Пусть $B = B_n$ обозначает открытый единичный шар из $\mathbb{C}^n$, а $S = \partial B$ — единичную сферу. Если $n = 1$, то для соответствующих объектов будут использоваться специальные символы, а именно, $\mathbb{D} = B_1$ — это открытый единичный круг и $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ — единичная окружность. Нормированные меры Лебега на шаре B и сфере S обозначаются через ν и σ соответственно. Пространство Харди $H^p = H^p(B)$ состоит из аналитических в шаре B функций f , для которых

$$\|f\|_p^p = \sup_{0 \leq r < 1} \int_S |f(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) < \infty.$$

Если не оговорено противное, то всюду предполагается, что $0 < p < 1$. В этом случае естественная метрика задается формулой

$$d(f, g) = \|f - g\|_p^p.$$

Эта метрика превращает H^p в F -пространство (полное метризуемое линейное топологическое пространство), которое не является локально выпуклым. Теорема Хана–Банаха не применима к пространству H^p . Более того, существуют слабо плотные замкнутые подпространства пространства H^p . Чтобы получить иллюстрацию последнего явления, напомним, что пространство $H^\infty(B)$ состоит из ограниченных аналитических в шаре функций. Рассмотрим непостоянную функцию $I \in H^\infty(B_n)$, такую, что $|I^*| = 1$ почти везде на сфере. Напомним, что такие функции называют *внутренними*. Если замкнутое подпространство $IH^p(B_n) \subset H^p(B_n)$ слабо плотно, то говорят, что функция I является *слабо внешней*. П. Дюрен, Б. Ромберг и А. Шилдс [1] обнаружили такие функции в круге $\mathbb{D}$. Позже Дж. Робертс [2] и Б. Коренблум получили полное описание слабо внешних внутренних функций в случае одной комплексной переменной.

В данной статье исследуется соответствующая задача о слабой плотности для нескольких комплексных переменных. Отметим, что в ответ на вопрос Дж. Шапиро в заметке [3] построена внутренняя функция I , такая, что она не имеет нулей в шаре и подпространство $IH^p(B_n)$ не является слабо плотным в $H^p(B_n)$, $n \geq 2$. В настоящей работе продолжается исследование таких функций. В частности, получены достаточные условия, при которых имеет место указанное явление. С другой стороны, естественно возникает задача о функциях с противоположным свойством. Такие объекты также существуют. А именно, ниже в теореме 3.10 будут построены слабо внешние внутренние функции в шаре B_n для всех $n \geq 2$. Также будут даны количественные условия, которые гарантируют, что внутренняя функция I является слабо внешней.

*Работа поддержана грантом PD02-1.1-7 для молодых кандидатов наук Министерства образования РФ и Администрацией Санкт-Петербурга.

Организация статьи. Во вспомогательном §2 объясняется, как свести изначальную задачу о *слабой* плотности к вопросу о плотности в некотором весовом пространстве Бергмана. Гладкие меры на сфере и слабо внешние внутренние функции изучаются в §3. В заключительном параграфе исследуются подпространства $IH^p(B_n)$, которые не являются слабо плотными.

§2. Банахова оболочка пространства $H^p(B_n)$

Весовое пространство Бергмана $A_\alpha(B_n)$, $\alpha > -1$, состоит из голоморфных в шаре B функций f , для которых

$$\|f\|_{A_\alpha} = \int_B |f(z)|(1 - |z|^2)^\alpha d\nu(z) < \infty.$$

Дюрен, Ромберг и Шилдс [1] явно вычислили двойственные пространства для $H^p(\mathbb{D})$ и $A_{1/p-2}(\mathbb{D})$ и установили, что сужающее отображение $\lambda \rightarrow \lambda|_{H^p}$ переводит пространство, двойственное к $A_{1/p-2}(\mathbb{D})$, в пространство, двойственное к $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p < 1$. К настоящему времени пространства, двойственные к $A_\alpha(B_n)$ и $H^p(B_n)$, вычислены для всех $n \geq 1$. Используя эту информацию, можно показать, что сужающее отображение $\lambda \rightarrow \lambda|_{H^p}$ переводит пространство, двойственное к $A_{n/p-n-1}(B_n)$, в пространство, двойственное к $H^p(B_n)$, для всех $n \geq 1$. Однако мы используем иной метод, принадлежащий Дж. Шапиро.

Сначала опишем абстрактную процедуру. Пусть E является p -нормированным F -пространством ($0 < p < 1$), на котором функционалы разделяют точки. Тогда абсолютно выпуклая оболочка единичного шара пространства E не содержит линейных подпространств; таким образом, его функционал Минковского является нормой на E . Эта норма индуцирует топологию, которая слабее изначальной, однако набор непрерывных линейных функционалов одинаков для обеих топологий.

Пополнение пространства E по построенной норме является банаховым пространством $\widehat{E}$, которое называют банаховой оболочкой пространства E . Таким образом, вложение $E \rightarrow \widehat{E}$ непрерывно и сужающее отображение $\lambda \rightarrow \lambda|_E$ переводит пространство, двойственное к $\widehat{E}$, в пространство, двойственное к E .

Пространство, двойственное к $H^p(B)$, разделяет точки, так как функционалы значения в точке $f \rightarrow f(z)$ являются непрерывными. Поэтому указанная процедура применима к пространству Харди. Положим $\alpha = \alpha(p) = n/p - n - 1$. Тогда отображение включения $H^p(B_n) \subset A_\alpha(B_n)$ является непрерывным (см., например, [4, гл. 2, теорема 1.3.3]). Таким образом, следующий результат описывает пространство $A_\alpha(B_n)$ как банахову оболочку пространства $H^p(B_n)$.

Предложение 2.1 (ср. [5, Theorems 2, 2']). Пусть $0 < p < 1$ и $\alpha = n/p - n - 1$. Тогда существует константа $R > 0$, такая, что H^p -замыкание абсолютно выпуклой оболочки шара $\{g \in H^p : \|g\|_p \leq R\}$ содержит множество $\{f \in H^p(B) : \|f\|_{A_\alpha} \leq 1\}$.

Доказательство. Зафиксируем $\beta > 0$ и рассмотрим ядра

$$K(z, \zeta) = \frac{\Gamma(n+1+\alpha+\beta)(1-|\zeta|^2)^\beta}{n!\Gamma(1+\alpha+\beta)(1-\langle z, \zeta \rangle)^{\alpha+\beta+n+1}}.$$

Хорошо известно, что

$$f(z) = \int_{B_n} K(z, \zeta)(1-|\zeta|^2)^\alpha f(\zeta) d\nu(\zeta)$$

для всех функций $f \in A_{\alpha+\beta}(B_n)$, а следовательно, для всех $f \in H^p(B_n)$. Указанное интегральное представление можно рассматривать как обобщенную выпуклую комбинацию функций $K(\cdot, \zeta)$, так как по предположению

$$\int_{B_n} |f(\zeta)|(1 - |\zeta|^2)^\alpha d\nu(\zeta) \leq 1.$$

Отметим, что $\|K(\cdot, \zeta)\|_p \leq R(\beta, p, n) = R < \infty$ для всех $\zeta \in B_n$ (см. [6, предложение 1.4.10]). Следовательно, приближение интеграла суммами Римана показывает, что каждая функция $f \in H^p$, для которой $\|f\|_{A_\alpha} \leq 1$, лежит в H^p -замыкании абсолютно выпуклой оболочки шара $\{g \in H^p : \|g\|_p \leq R\}$ (детали аналогичны рассуждениям в одномерном случае, который изложен в работах [5] и [7]). $\square$

§3. Слабо внешние внутренние функции

3.1. Достаточное условие. Так как пространство E и его банахова оболочка имеют одно и то же двойственное пространство, то некоторое подпространство слабо плотно в E тогда и только тогда, когда оно плотно в $\widehat{E}$. Таким образом, внутренняя функция I является слабо внешней тогда и только тогда, когда множество IH^p плотно в $\widehat{H}^p(B_n) = A_\alpha(B_n)$. Это наблюдение приводит к следующему достаточному условию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть I — внутренняя функция. Предположим, что $|I(z)| \geq C(1 - |z|)^N$ при всех $z \in B$ для некоторых констант $C, N > 0$. Тогда множество $IH^p(B_n)$ плотно в $A_\alpha(B_n)$ при $\alpha = n/p - n - 1$. Иными словами, I является слабо внешней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем столь большое $M \in \mathbb{N}$, что $I^{-1/M} \in A_\alpha(B)$. Выберем такие многочлены P_k , что $P_k \rightarrow I^{-1/M}$ в пространстве $A_\alpha(B)$. Иными словами, $P_k I^{1/M} \rightarrow 1$ в пространстве $A_\alpha(B)$. Следовательно, $A_\alpha(B)$ -замыкание множества $I^{1/M}H^p$ содержит все многочлены. Таким образом, множество $I^{1/M}H^p$ является плотным в $A_\alpha(B)$. Поэтому множество $I^{1/M}I^{1/M}H^p$ также является плотным. Окончательно получаем, что множество IH^p является плотным в пространстве $A_\alpha(B)$. $\square$

3.2. Гладкие сингулярные меры на окружности. Если I — внутренняя функция в круге, которая не имеет нулей, то она порождается некоторой положительной сингулярной мерой μ на окружности $\mathbb{T}$. А именно, предположим, что $I(0) > 0$; тогда

$$I(z) = I_\mu(z) = \exp \left(- \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Г. Шапиро доказал в работе [8], что указанное выше достаточное условие выполняется для гладких мер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Модулем непрерывности положительной меры $\mu \in M(\mathbb{T})$ называется функция

$$\omega(\mu; t) = \sup_{|I| \leq t} \mu(I) \quad (t > 0),$$

где $I \subset \mathbb{T}$ обозначает произвольную дугу, а $|I| = \sigma(I)$ — ее нормированная длина.

ТЕОРЕМА 3.3 (Шапиро [8]). Пусть μ — положительная сингулярная мера на окружности $\mathbb{T}$. Тогда $\omega(\mu; t) = O(t \log \frac{1}{t})$ в том и только том случае, когда

$$\min_{|z|=r} |I_\mu(z)| \geq C(1-r)^N \quad \text{при всех } 0 \leq r < 1$$

для некоторых констант $C, N > 0$.

3.2. Гладкие меры на сфере. Рассмотрим внутреннюю функцию I , которая не имеет нулей в шаре B_n , $n \geq 2$. Предположим, что $I(0) > 0$. Тогда

$$I(z) = I_\mu(z) = \exp\left(-\int_S \left[\frac{2}{(1-\langle z, \zeta \rangle)^n} - 1\right] d\mu(\zeta)\right), \quad z \in B,$$

где μ — некоторая положительная сингулярная *плюригармоническая* мера на единичной сфере S . Напомним, что мера называется плюригармонической, если ее интеграл Пуассона является плюригармонической функцией в шаре. Так как функция $\log |I_\mu|$ является плюригармонической, то имеет место равенство

$$-\log |I_\mu(z)| = \int_S P(z, \zeta) d\mu(\zeta),$$

где

$$P(z, \zeta) = \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^{2n}} \quad (z \in B, \zeta \in S)$$

обозначает классическое (вещественное) ядро Пуассона. Отметим, что классический интеграл Пуассона меры совпадает с ее инвариантным интегралом Пуассона тогда и только тогда, когда рассматриваемая мера является плюригармонической. С помощью этого наблюдения получаем еще одно интегральное представление

$$-\log |I_\mu(z)| = \int_S \mathcal{P}(z, \zeta) d\mu(\zeta),$$

где

$$\mathcal{P}(z, \zeta) = \left(\frac{1 - |z|^2}{|1 - \langle z, \zeta \rangle|^2}\right)^n \quad (z \in B, \zeta \in S)$$

обозначает инвариантное (комплексное) ядро Пуассона.

Таким образом, в плюригармоническом случае естественно использовать следующие два метода измерения гладкости мер на сфере.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. *Вещественным модулем непрерывности* положительной меры $\mu \in M(S)$ называют функцию

$$\omega_{\mathbb{R}}(\mu; t) = \sup_{\zeta \in S, \delta \leq t} \mu(E(\zeta, \delta)) \quad (t > 0),$$

где $E(\zeta, \delta) = \{\xi \in S : |\zeta - \xi| < \delta\}$.

Комплексным модулем непрерывности положительной меры $\mu \in M(S)$ называют функцию

$$\omega_{\mathbb{C}}(\mu; t) = \sup_{\zeta \in S, \delta \leq t} \mu(Q(\zeta, \delta)) \quad (t > 0),$$

где $Q(\zeta, \delta) = \{\xi \in S : |1 - \langle \zeta, \xi \rangle| < \delta\}$. Отметим, что $d(\zeta, \xi) = |1 - \langle \zeta, \xi \rangle|$ является квазиметрикой на сфере. Следовательно, множество $Q(\zeta, \delta)$ является квазишаром.

С другой стороны, напомним, что для каждой положительной плюригармонической меры μ определены срез-меры μ_ζ для всех $\zeta \in S$. Действительно, положим $u = P[\mu]$. Тогда срез $u_\zeta(\lambda) = u(\lambda\zeta)$, $\zeta \in S$, $\lambda \in \mathbb{D}$, является положительной гармонической функцией и $\|(u_\zeta)_r\|_{L^1(\mathbb{T})} = u(0) < \infty$ для всех $r \in (0, 1)$. Следовательно, имеет место равенство $u_\zeta = P[\mu_\zeta]$ ($P[\mu_\zeta]$ — интеграл Пуассона в круге $\mathbb{D}$) для некоторой положительной меры μ_ζ , $\|\mu_\zeta\|_{M(\mathbb{T})} = \|\mu\|_{M(S)}$. Поэтому существует еще один способ для измерения гладкости плюригармонических мер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. *Модулем непрерывности на срезах* положительной плюригармонической меры $\mu \in M(S)$ называется функция

$$\Omega(\mu; t) = \sup_{\zeta \in S, |I| \leq t} \mu_\zeta(I) \quad (t > 0),$$

где $I \subset \mathbb{T}$ обозначает произвольную дугу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. *Пусть μ — положительная сингулярная плюригармоническая мера на сфере S_n . Тогда следующие свойства равносильны:*

- (i) $|I_\mu(z)| \geq C(1 - |z|)^N$ для некоторых положительных констант C, N ;
- (ii) $\Omega(\mu; t) = O(t \log \frac{1}{t})$ при $t \rightarrow 0$;
- (iii) $\omega_{\mathbb{C}}(\mu; t) = O(t^n \log \frac{1}{t})$;
- (iv) $\omega_{\mathbb{R}}(\mu; t) = O(t^{2n-1} \log \frac{1}{t})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\xi \in S$ и $0 \leq r < 1$. Тогда

$$-\log |I_\mu(r\xi)| = \int_S \mathcal{P}(r\xi, \zeta) d\mu(\zeta).$$

Отметим, что

$$C|1 - r\lambda|^2 \geq (1 - r)^2 + |1 - \lambda|^2$$

для всех $r \in [0, 1]$ и всех $|\lambda| \leq 1$. Поэтому

$$\mathcal{P}(r\xi, \zeta) \leq C \left(\frac{1 - r}{(1 - r)^2 + |1 - \langle \xi, \zeta \rangle|^2} \right)^n.$$

Разобьем сферу на непересекающиеся множества вида

$$Q(\xi, 2^{k+1}(1 - r)) \setminus Q(\xi, 2^k(1 - r)).$$

Тогда последнее неравенство и свойство (iii) приводят к следующим оценкам:

$$\begin{aligned} -\log |I_\mu(r\xi)| &\leq C \left(1 + \log \frac{1}{1 - r} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (2^k(1 - r))^n \left(\frac{1 - r}{(1 - r)^2 + 2^{2k-2}(1 - r)^2} \right)^n \right] \right) \\ &\leq C \left(1 + \log \frac{1}{1 - r} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^k}{1 + 2^{2k-2}} \right)^n \right] \right) \leq C \left(1 + \log \frac{1}{1 - r} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, $|I_\mu(r\xi)| \geq e^{-C}(1 - r)^C$. Иными словами, свойство (i) выполнено.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Для доказательства будет видоизменено рассуждение, использованное при проверке комплексной импликации (iii) $\Rightarrow$ (i). А именно, пусть $\xi \in S$ и $0 \leq r < 1$. Тогда

$$-\log |I_\mu(r\xi)| = \int_S P(r\xi, \zeta) d\mu(\zeta).$$

Отметим, что

$$C|r\xi - \zeta|^2 \geq (1 - r)^2 + |\xi - \zeta|^2$$

для всех $r \in [0, 1]$ и всех $\xi, \zeta \in S$. Следовательно,

$$P(r\xi, \zeta) \leq \frac{C(1-r)}{((1-r)^2 + |\xi - \zeta|^2)^n}.$$

Используя диадическое разбиение, получаем оценки

$$\begin{aligned} -\log |I_\mu(r\xi)| &\leq C \left(1 + \log \frac{1}{1-r} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (2^k(1-r))^{2n-1} \frac{1-r}{((1-r)^2 + 2^{2k-2}(1-r)^2)^n} \right] \right) \\ &\leq C \left(1 + \log \frac{1}{1-r} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2kn-k}}{1+2^{(2k-2)n}} \right] \right) \leq C \left(1 + \log \frac{1}{1-r} \right). \end{aligned}$$

Иными словами, выполнено неравенство $|I_\mu(r\xi)| \geq e^{-C}(1-r)^C$. Таким образом, свойство (i) выполнено.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Это свойство является переформулировкой теоремы 3.3, так как $I_\mu(\lambda\zeta) = I_{\mu_\zeta}(\lambda)$ для $\zeta \in S$, $\lambda \in \mathbb{D}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Во-первых, напомним, что всякая плюригармоническая мера является интегралом своих срезов. Действительно, пусть $\mathbb{C}P^{n-1}$ обозначает проективное пространство. Рассмотрим каноническую проекцию $\text{pr}: \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ и положим $\hat{\sigma} = \text{pr}(\sigma)$. Зафиксируем положительную плюригармоническую меру $\rho \in M(S)$. Заметим, что срез $\rho_\lambda\zeta$, $\lambda \in \mathbb{T}$, получается вращением среза ρ_ζ . Таким образом, корректно определены срез-меры ρ_ξ для $\xi \in \mathbb{C}P^{n-1}$. Более того, если $f \in C(S)$, то из классических свойств интеграла Пуассона следует, что

$$\int_S f d\rho = \int_{\mathbb{C}P^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{T}} f_\xi d\rho_\xi \right) d\hat{\sigma}(\xi).$$

Теперь зафиксируем точку $\zeta \in S$ и рассмотрим квазишар $Q_t = Q(\zeta, t)$, $t > 0$. Множество Q_t приблизительно выглядит как $2n-1$ -мерный (евклидов) эллипсоид. Пересечение окружности $\mathbb{T}_\zeta = \{\lambda\zeta : \lambda \in \mathbb{T}\}$ и множества Q_t есть дуга I_t , для которой $|I_t| \approx t$. В направлении, ортогональном к окружности $\mathbb{T}_\zeta$, множество Q_t покрывается $(2n-2)$ -мерным (евклидовым) шаром радиуса $C\sqrt{t}$ (см. [6, разд. 5.1.3 и предложение 5.1.4]). По предположению имеем $\mu_\xi(I_t) = O(t \log \frac{1}{t})$. Следовательно, интегрирование относительно меры $\hat{\sigma}$ приводит к оценке $\mu(Q_t) = (\sqrt{t})^{2n-2} O(t \log \frac{1}{t}) = O(t^n \log \frac{1}{t})$, как и требовалось.

(ii) $\Rightarrow$ (iv). Вновь для доказательства будет видоизменено комплексное рассуждение, использованное при проверке свойства (ii) $\Rightarrow$ (iii). А именно, зафиксируем точку $\zeta \in S$ и рассмотрим множество $E_t = E(\zeta, t)$, $t > 0$. Множество E_t приблизительно выглядит как $(2n-1)$ -мерный (евклидов) шар. Пересечение окружности $\mathbb{T}_\zeta = \{\lambda\zeta : \lambda \in \mathbb{T}\}$ и множества E_t является дугой I_t , для которой $|I_t| \approx t$. В направлении, ортогональном к окружности $\mathbb{T}_\zeta$, множество E_t покрывается $(2n-2)$ -мерным шаром радиуса Ct . По предположению $\mu_\xi(I_t) = O(t \log \frac{1}{t})$. Следовательно, интегрирование относительно меры $\hat{\sigma}$ приводит к оценке $\mu(E_t) = t^{2n-2} O(t \log \frac{1}{t}) = O(t^{2n-1} \log \frac{1}{t})$, что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Возможно, импликации (iii) $\Rightarrow$ (ii), (iv) $\Rightarrow$ (ii) и равносильность свойств (iii) и (iv) представляют независимый интерес. С другой стороны, ниже сформулированы предложения, которые показывают, что аналоги теоремы 3.3 имеют место для всех мер на сфере.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Пусть μ — положительная мера на сфере S_n . Тогда неравенство $\mathcal{P}[\mu]((1-t)\xi) \leq C \log \frac{1}{t}$ выполнено для всех $\xi \in S$ в том и только том случае, когда $\omega_C(\mu; t) = O(t^n \log \frac{1}{t})$ при $t \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Пусть $\xi \in S$ и $1/2 \geq t > 0$. По определению квазишара $Q(\xi, t)$ неравенство $|1 - (1-t)\langle \xi, \zeta \rangle| \leq Ct$ выполнено для всех $\zeta \in Q(\xi, t)$. Поэтому получаем

$$\frac{\mu(Q(\xi, t))}{t^n} \leq C \mathcal{P}[\mu]((1-t)\xi) \leq C \log \frac{1}{t}.$$

Иными словами, $\omega_C(\mu; t) = O(t^n \log \frac{1}{t})$.

Доказательство импликации ($\Leftarrow$) повторяет рассуждение, использованное при проверке импликации (iii) $\Rightarrow$ (i) в предложении 3.6. $\square$

Доказательство следующего вещественного варианта предложения 3.8 проводится аналогично. Поэтому мы его опустим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. Пусть μ — положительная мера на сфере S_n . Тогда неравенство $P[\mu]((1-t)\xi) \leq C \log \frac{1}{t}$ выполнено для всех $\xi \in S$ в том и только том случае, когда $\omega_{\mathbb{R}}(\mu; t) = O(t^{2n-1} \log \frac{1}{t})$ при $t \rightarrow 0$.

3.4. Слабо внешние внутренние функции.

ТЕОРЕМА 3.10. Для каждого $n \geq 2$ существует внутренняя функция $I \in H^\infty(B_n)$, такая, что подпространство $IH^p(B_n)$ слабо плотно в пространстве Харди $H^p(B_n)$ при $0 < p < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Говорят, что $\rho \in M(\mathbb{T})$ является малой мерой Зигмунда, если

$$\lim_{|J_\pm| \rightarrow 0} \frac{\rho(J_+) - \rho(J_-)}{|J_\pm|} = 0,$$

где $J_+, J_- \subset \mathbb{T}$ обозначают замкнутые дуги равной длины, которые имеют ровно одну общую точку. Хорошо известно, что для всех малых мер Зигмунда выполнена оценка $\omega(\rho; t) = o(t \log \frac{1}{t})$.

В работе [9] (предложение 3.2) на сфере S построена положительная сингулярная плюригармоническая мера μ , срезы которой равномерно являются малыми мерами Зигмунда. Иными словами, выполнена оценка $\Omega(\mu; t) = o(t \log \frac{1}{t})$. Предложение 3.6 гарантирует, что $|I_\mu(z)| \geq C(1 - |z|)^N$ для некоторых положительных констант C и N . Наконец, функция I_μ является слабо внешней в силу предложения 3.1. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.11. Для получения сингулярной плюригармонической меры $\mu \in M(S)$ со свойством $\Omega(\mu; t) = O(t \log \frac{1}{t})$ можно непосредственно использовать конструкцию плюригармонического произведения Рисса (см. [9]). В одномерном случае подобные рассуждения изложены в работе [10], где исследованы произведения Рисса на единичной окружности.

§ 4. Подпространства, которые не являются слабо плотными

Пусть функция $I \in H^\infty(B)$ является внутренней и $I(z) = 0$ для некоторой точки $z \in B$. Тогда подпространство $IH^p(B)$ не будет слабо плотным в $H^p(B)$, так как функционал значения в точке $\lambda_z(f) = f(z)$ непрерывен на H^p . Поэтому ниже исследуются внутренние функции, которые не обращаются в нуль. А

именно, напомним, что

$$I_\mu(z) = \exp\left(-\int_S \left[\frac{2}{(1 - \langle z, \zeta \rangle)^n} - 1\right] d\mu(\zeta)\right), \quad z \in B.$$

Рассмотрим положительную сингулярную плюригармоническую меру μ . Следующее предложение показывает, что внутренняя функция I_μ не является слабо внешней, если существует хотя бы один достаточно «грубый» срез μ_ζ , $\zeta \in S$. Не умаляя общности, ниже будем предполагать, что $\zeta = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Рассмотрим замкнутое множество $K \subset \mathbb{T}$. Пусть $\bigcup_{m=1}^\infty J_m$ является каноническим разбиением множества $\mathbb{T} \setminus K$ на непересекающиеся открытые дуги. Говорят, что K является *множеством Карлесона*, если $\sigma(K) = 0$ и

$$\sum_{m=1}^\infty |J_m| \log \frac{1}{|J_m|} < \infty.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть μ — положительная сингулярная плюригармоническая мера. Предположим, что срез-мера $\mu_1 = \mu_{e_1}$ является сингулярной и $\mu_1(K) > 0$ для некоторого множества Карлесона $K \subset \mathbb{T}$. Тогда внутренняя функция I_μ не является слабо внешней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется показать, что подпространство $I_\mu H^p(B)$ не является слабо плотным в пространстве Харди $H^p(B)$ при $0 < p < 1$. Для этого будет построен нетривиальный непрерывный линейный функционал $\Lambda: H^p(B) \rightarrow \mathbb{C}$, такой, что $\Lambda(I_\mu F) = 0$ для всех $F \in H^p(B)$. Следующее рассуждение в одномерном случае восходит к работе Шапиро [11].

Рассмотрим последовательность $a = \{a_k\}_{k=0}^\infty \subset \mathbb{C}$. Для функции $G \in H^p(B)$ положим

$$\Lambda_a(G) = \sum_{k=0}^\infty \bar{a}_k \hat{g}(k),$$

где $g(z) = G(z, 0)$ при $z \in \mathbb{D}$, $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Хорошо известно, что срез-функция g лежит в некотором весовом пространстве Бергмана. Действительно, пусть ν_2 обозначает нормированную меру Лебега на круге. Тогда (см., например, [4, гл. 2, теорема 1.3.1])

$$\|g\|_{A_{n-2}^p}^p := (n-1) \int_{\mathbb{D}} |g(z)|^p (1 - |z|^2)^{n-2} d\nu_2(z) \leq \|G\|_{H^p}^p < \infty.$$

Теперь напомним, что коэффициенты Фурье функции из пространства A_{n-2}^p являются $O(k^{\beta(p,n)})$ для некоторого $\beta(p,n) < \infty$. Например, A_0^p — классическое пространство Бергмана; поэтому $\beta(p, 2) = 2/p - 1$ (детали изложены в монографии [12]). Иными словами, выполняется следующая оценка:

$$|\hat{g}(k)| \leq C(p, n) k^{\beta(p,n)} \|g\|_{A_{n-2}^p} \leq C(p, n) k^{\beta(p,n)} \|G\|_{H^p}.$$

Следовательно, линейный функционал Λ_a будет непрерывным на пространстве Харди $H^p(B)$, если $|a_k| = O(k^{-2-\beta(p,n)})$. Для завершения доказательства ниже будет построена последовательность a с этим свойством, такая, что $\Lambda_a(I_\mu F) = 0$ для всех $F \in H^p(B)$.

Определим меру $\rho \in M(\mathbb{T})$ с помощью равенства $\rho(E) = \mu_1(E \cap K)$. Тогда $I_\rho \in H^\infty(\mathbb{D})$ является одномерной сингулярной внутренней функцией. Более того, для

каждого числа $m \in \mathbb{N}$ найдется внешняя функция $f \in H^2(\mathbb{T})$, такая, что $\bar{f}I_\rho \in C^m(\mathbb{T})$ (см. [11, предложение В]). Пусть $P_+ : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow H^2(\mathbb{T})$ — ортогональный проектор. Положим $h(\lambda) = P_+[\bar{\lambda}f(\lambda)I_\rho(\lambda)]$. Так как $\bar{\lambda}f(\lambda)I_\rho(\lambda) \in C^m(\mathbb{T})$, то $h \in C^m(\mathbb{T})$. Следовательно, выполнена оценка $\hat{h}(k) = O(k^{-m})$.

Наконец, положим $a_k = \hat{h}(k)$.

1. Зафиксируем столь большое число m , что $|a_k| = O(k^{-2-\beta(p,n)})$. Тогда функционал Λ_a непрерывен на пространстве $H^p(B)$.

2. Функционал Λ_a не является тривиальным. Действительно, предположим, что $a_k = 0$ для всех $k \geq 0$. Тогда $\lambda f(\lambda)\bar{I}_\rho(\lambda) \in H^2(\mathbb{D})$. Иными словами, функция I_ρ делит функцию f . Поэтому функция f не является внешней — противоречие.

3. Положим $I_1(\lambda) = I_{\mu_1}(\lambda) = I_\mu(\lambda, 0)$ при $\lambda \in \mathbb{D}$. По определению меры ρ произведение $\bar{I}_\rho I_1 = I_0$ является одномерной сингулярной внутренней функцией.

Пусть P является голоморфным полиномом в $\mathbb{C}^n$. Введем вспомогательное обозначение $Q(\lambda) = P(\lambda, 0)$ для $\lambda \in \mathbb{C}$. Пусть $\sigma = \sigma_1$ обозначает нормированную меру Лебега на окружности $\mathbb{T}$. Тогда

$$\Lambda_a(I_\mu P) = \sum_{k \geq 0} \bar{a}_k (I_1 Q)^\wedge(k) = \int_{\mathbb{T}} \bar{h} I_1 Q d\sigma = \int_{\mathbb{T}} \lambda (f(\lambda) I_0(\lambda) Q(\lambda)) d\sigma(\lambda) = 0.$$

Наконец, так как многочлены плотны в пространстве Харди $H^p(B)$, то функционал Λ_a вырождается в ноль на множестве $I_\mu H^p(B)$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Отметим, что множество мер, изучаемое в предложении 4.2, непусто. Действительно, в работе [3] построена положительная сингулярная плюригармоническая мера μ , такая, что ее срез μ_1 является мерой Дирака.

ЛИТЕРАТУРА

1. Duren P. L., Romberg B. W., Shields A. L. Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$. J. Reine Angew. Math., **238**, 32–60 (1969).
2. Roberts J. W. Cyclic inner functions in the Bergman spaces and weak outer functions in H^p ($0 < p < 1$). Ill. J. Math., **29**, 25–38 (1985).
3. Doubtsov E. An inner function which is not weak outer. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **334**, 957–960 (2002).
4. Александров А. Б. Теория функций в шаре. В кн.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 8, ВИНТИ, М., 1985, с. 115–190.
5. Shapiro J. H. Mackey topologies, reproducing kernels, and diagonal maps on the Hardy and Bergman spaces. Duke Math. J., **43**, No. 1, 187–202 (1976).
6. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. Мир, М., 1984.
7. Shapiro J. H. Remarks on F -spaces of analytic functions. In: Lect. Notes in Math., Vol. 604, Springer-Verlag, Berlin, 1977, pp. 107–124.
8. Shapiro H. S. Weakly invertible elements in certain function spaces, and generators in ℓ^1 . Michigan Math. J., **11**, 161–165 (1964).
9. Doubtsov E. Little Bloch functions, symmetric pluriharmonic measures and Zygmund's dichotomy. J. Funct. Anal., **170**, No. 2, 286–306 (2000).
10. Duren P. L. Smoothness of functions generated by Riesz products. Proc. Amer. Math. Soc., **16**, No. 6, 1263–1268 (1965).
11. Шапиро Г. Некоторые замечания о весовой полиномиальной аппроксимации голоморфных функций. Матем. сб., **73(115)**, № 3, 320–330 (1967).
12. Zhu K. Operator Theory in Function Spaces. Marcel Dekker, New York, 1990.