Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Лиувиллева каноническая форма согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа и интегрируемые иерархии, *Функци. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 2, 28–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa146>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 05:34:51

Лиувиллева каноническая форма согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа и интегрируемые иерархии*

© 2003. О. И. Мохов

§1. Введение

В настоящей работе мы, прежде всего, решаем задачу о приведении к наиболее простому и удобному для наших дальнейших целей «каноническому» виду произвольной пары согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа, порождаемых метриками постоянной римановой кривизны (согласованных скобок Мохова–Ферапонтова [1]), для того чтобы эффективно построить отвечающие любым этим парам согласованных скобок Пуассона интегрируемые иерархии. Как показано в [2, 3] (см. также [4]), согласованные скобки Мохова–Ферапонтова описываются совместной нелинейной системой уравнений, интегрируемой методом обратной задачи рассеяния (в случае согласованных скобок Дубровина–Новикова [5], т. е. согласованных локальных скобок Пуассона гидродинамического типа, соответствующая система проинтегрирована ранее в [6–8], см. также [4]), но задача эффективного построения в этом случае соответствующих интегрируемых иерархий, что является главной целью данной работы, требует иного подхода к описанию этих согласованных скобок. В данной статье по любому решению интегрируемой системы уравнений, описывающей рассматриваемые согласованные скобки, т. е. для любой пары этих согласованных скобок, построены в явном виде интегрируемые бигамильтоновы системы гидродинамического типа, обладающие этой парой согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа. В случае согласованных скобок Дубровина–Новикова [5] эта задача была рассмотрена и полностью решена ранее в работах автора [9, 10].

В [1] были введены и изучены нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа, имеющие следующий вид (скобки Мохова–Ферапонтова):

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k + K u_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} u_x^j \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx, \quad (1.1)$$

где $I[u]$ и $J[u]$ — произвольные функционалы на пространстве функций (полей) $u^i(x)$, $1 \leq i \leq N$, одной независимой переменной x , $u = (u^1, \dots, u^N)$ — локальные координаты на некотором заданном гладком N -мерном многообразии M , коэффициенты $g^{ij}(u)$ и $b_k^{ij}(u)$ скобки (1.1) — гладкие функции локальных координат и K — произвольная константа. Вид скобки (1.1) инвариантен отно-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта (Германия), а также Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00803) и фонда INTAS (грант № 99-1782).

сительно локальных замен координат. Скобка вида (1.1) называется *невыврожденной*, если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$. Если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, то скобка (1.1) является скобкой Пуассона тогда и только тогда, когда $g^{ij}(u)$ — произвольная псевдориманова контравариантная метрика постоянной римановой кривизны K и $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u)\Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ — риманова связность, порождаемая метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивиты) [1] (отметим, что при локальных заменах координат коэффициенты $g^{ij}(u)$ и $b_k^{ij}(u)$ скобки (1.1) преобразуются как соответствующие дифференциально-геометрические объекты — контравариантная метрика $g^{ij}(u)$ и связность $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u)\Gamma_{sk}^j(u)$ соответственно, а K — инвариант). При $K = 0$ получаем локальные скобки Пуассона гидродинамического типа (скобки Дубровина–Новикова [5]).

Напомним, что скобки Пуассона называются *согласованными*, если их произвольная линейная комбинация также является скобкой Пуассона (Магри [11]).

§2. Согласованные нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа

ЛЕММА 2.1. *В задаче об описании произвольной пары согласованных нелокальных скобок Пуассона вида (1.1) одну из этих двух скобок Пуассона всегда можно считать локальной без ограничения общности.*

Действительно, если две согласованные нелокальные скобки Пуассона вида (1.1) $\{I, J\}_0$ (с соответствующей константой K_0 в нелокальной части) и $\{I, J\}_1$ (с константой K_1) линейно независимы, то в пучке этих скобок Пуассона, т.е. среди скобок Пуассона $\lambda_0\{I, J\}_0 + \lambda_1\{I, J\}_1$, где λ_0 и λ_1 — произвольные константы, обязательно есть ненулевая локальная скобка Пуассона $\{I, J\} = \lambda'_0\{I, J\}_0 + \lambda'_1\{I, J\}_1$, где λ'_0 , λ'_1 — произвольные константы, удовлетворяющие соотношению $\lambda'_0 K_0 + \lambda'_1 K_1 = 0$, которую и можно взять в качестве одной из образующих всего рассматриваемого пучка согласованных скобок Пуассона (очевидно, что если эта локальная скобка Пуассона $\{I, J\}$ нулевая, то скобки Пуассона $\{I, J\}_0$ и $\{I, J\}_1$ являются линейно зависимыми: $\lambda'_0\{I, J\}_0 + \lambda'_1\{I, J\}_1 \equiv 0$).

Рассмотрим задачу о согласованности нелокальной и локальной скобок Пуассона гидродинамического типа

$$\{I, J\}_1 = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g_1^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_{1,k}^{ij}(u(x)) u_x^k + K_1 u_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} u_x^j \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx \quad (2.1)$$

и

$$\{I, J\}_2 = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g_2^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_{2,k}^{ij}(u(x)) u_x^k \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx, \quad (2.2)$$

т.е. условие, что при всех значениях константы λ скобка

$$\{I, J\} = \{I, J\}_1 + \lambda \{I, J\}_2 \quad (2.3)$$

является скобкой Пуассона (таким образом, формула (2.3) определяет *пучок согласованных скобок Пуассона*).

Мы далее предполагаем, что локальная скобка $\{I, J\}_2$ является невырожденной, т.е. $\det g_2^{ij}(u) \neq 0$, но не налагаем никаких дополнительных условий на

скобку $\{I, J\}_1$, т.е., вообще говоря, она может быть и вырожденной. Скобка (2.3) может быть вырожденной; поэтому нам потребуются общие соотношения на коэффициенты скобки вида (1.1), эквивалентные условию, что эта скобка является скобкой Пуассона. Эти общие соотношения (без предположения невырожденности) были получены в работе автора [12] (см. также [13]):

$$g^{ij}(u) = g^{ji}(u), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = b_k^{ij}(u) + b_k^{ji}(u), \quad (2.5)$$

$$g^{is}(u)b_s^{jr}(u) = g^{js}(u)b_s^{ir}(u), \quad (2.6)$$

$$g^{is}(u) \left(\frac{\partial b_s^{jr}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_k^{jr}}{\partial u^s} \right) + b_s^{ij}(u)b_k^{sr}(u) - b_s^{ir}(u)b_k^{sj}(u) = K(g^{ir}(u)\delta_k^j - g^{ij}(u)\delta_k^r), \quad (2.7)$$

$$\sum_{(i,j,r)} \left[b_p^{si}(u) \left(\frac{\partial b_k^{jr}}{\partial u^s} - \frac{\partial b_s^{jr}}{\partial u^k} \right) + K(b_k^{ij}(u) - b_k^{ji}(u))\delta_p^r \right. \\ \left. + b_k^{si}(u) \left(\frac{\partial b_p^{jr}}{\partial u^s} - \frac{\partial b_s^{jr}}{\partial u^p} \right) + K(b_p^{ij}(u) - b_p^{ji}(u))\delta_k^r \right] = 0, \quad (2.8)$$

где $\sum_{(i,j,r)}$ означает суммирование по всем циклическим перестановкам индексов i, j, r .

§ 3. Каноническая форма согласованных пар скобок

По теореме Дубровина–Новикова [5] для невырожденной локальной скобки Пуассона гидродинамического типа $\{I, J\}_2$ всегда существуют локальные координаты $u^1, \dots, u^N$ (плоские координаты метрики $g_2^{ij}(u)$), в которых эта скобка постоянна, т.е. $g_2^{ij}(u) = \eta^{ij} = \text{const}$, $b_{2,k}^{ij}(u) = \Gamma_{2,jk}^i(u) = 0$. Таким образом, мы можем выбрать плоские координаты метрики $g_2^{ij}(u)$ и в дальнейшем считать, что скобка Пуассона $\{I, J\}_2$ постоянна и имеет вид

$$\{I, J\}_2 = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \eta^{ij} \frac{d}{dx} \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx, \quad (3.1)$$

где $\eta^{ij} = \eta^{ji}$, $\eta^{ij} = \text{const}$, $\det \eta^{ij} \neq 0$. В дальнейшем мы будем также использовать в рассматриваемых плоских координатах ковариантную метрику η_{ij} , обратную к контравариантной метрике η^{ij} , $\eta^{is}\eta_{sj} = \delta_j^i$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Произвольная нелокальная скобка Пуассона $\{I, J\}_1$ вида (2.1) (возможно, вырожденная) согласована с постоянной скобкой Пуассона (3.1) тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$\{I, J\}_1 = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(\left[\eta^{is} \frac{\partial H^j}{\partial u^s} + \eta^{js} \frac{\partial H^i}{\partial u^s} - K_1 u^i u^j \right] \frac{d}{dx} \right. \\ \left. + \left[\eta^{is} \frac{\partial^2 H^j}{\partial u^s \partial u^k} - K_1 \delta_k^i u^j \right] u_x^k + K_1 u_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} u_x^j \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx, \quad (3.2)$$

где $H^i(u)$, $1 \leq i \leq N$, — гладкие функции, определенные в некоторой области локальных координат.

В плоском случае согласованных скобок Дубровина–Новикова ($K_1 = 0$) соответствующее утверждение было сформулировано автором в [14, 15] (см. также условия на плоские пучки метрик в [16]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношений (2.4)–(2.8) следует, что в рассматриваемых локальных координатах условия согласованности скобок Пуассона $\{I, J\}_1$ и $\{I, J\}_2$ или, другими словами, условия, что скобка

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left((g_1^{ij}(u(x)) + \lambda \eta^{ij}) \frac{d}{dx} + b_{1,k}^{ij}(u(x)) u_x^k + K_1 u_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} u_x^j \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx \quad (3.3)$$

является скобкой Пуассона для всех значений параметра λ , имеют вид

$$\eta^{is} b_{1,s}^{jr}(u) = \eta^{js} b_{1,s}^{ir}(u), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial b_{1,s}^{jr}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_{1,k}^{jr}}{\partial u^s} = K_1 (\delta_s^r \delta_k^j - \delta_s^j \delta_k^r). \quad (3.5)$$

Определим функции $A_k^{ij}(u)$ соотношениями

$$A_k^{ij}(u) = b_{1,k}^{ij}(u) - K_1 \delta_k^j u^i. \quad (3.6)$$

Из формулы (3.5) следует, что

$$\frac{\partial A_s^{jr}}{\partial u^k} - \frac{\partial A_k^{jr}}{\partial u^s} = 0,$$

т. е. по лемме Пуанкаре локально существуют функции $P^{ij}(u)$, такие, что

$$A_k^{ij}(u) = \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^k},$$

и из (3.6) находим необходимое выражение для коэффициента $b_{1,k}^{ij}(u)$:

$$b_{1,k}^{ij}(u) = \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^k} + K_1 \delta_k^j u^i.$$

Найдем выражение для метрики $g_1^{ij}(u)$. Из соотношения (2.5) для скобки Пуассона $\{I, J\}_1$ получаем

$$\frac{\partial g_1^{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial P^{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial P^{ji}}{\partial u^k} + K_1 \delta_k^j u^i + K_1 \delta_k^i u^j$$

и, следовательно, учитывая соотношение (2.4),

$$g_1^{ij}(u) = P^{ij}(u) + P^{ji}(u) + K_1 u^i u^j + c^{ij}, \quad c^{ij} = \text{const}, \quad c^{ij} = c^{ji}.$$

Таким образом, доказано, что коэффициенты скобки Пуассона $\{I, J\}_1$ имеют так называемый лиувиллев вид (подробнее о важном свойстве лиувиллевости см. §5):

$$g_1^{ij}(u) = R^{ij}(u) + R^{ji}(u) + K_1 u^i u^j,$$

$$b_{1,k}^{ij}(u) = \frac{\partial R^{ij}}{\partial u^k} + K_1 u^i \delta_k^j,$$

где

$$R^{ij}(u) = P^{ij}(u) + \frac{1}{2} c^{ij}.$$

Кроме того, из соотношения (3.4) дополнительно получаем

$$\eta_{pj} b_{1,l}^{jr}(u) = \eta_{li} b_{1,p}^{ir}(u),$$

т. е.

$$\frac{\partial(\eta_{ps} R^{sr}(u))}{\partial u^l} + K_1 \eta_{ps} u^s \delta_l^r = \frac{\partial(\eta_{ls} R^{sr}(u))}{\partial u^p} + K_1 \eta_{ls} u^s \delta_p^r.$$

Последняя формула эквивалентна соотношению

$$\frac{\partial(\eta_{ps} R^{sr}(u) + K_1 \eta_{ps} u^s u^r)}{\partial u^l} = \frac{\partial(\eta_{ls} R^{sr}(u) + K_1 \eta_{ls} u^s u^r)}{\partial u^p}.$$

Следовательно, по лемме Пуанкаре локально существуют функции $H^r(u)$, $1 \leq r \leq N$, такие, что

$$\eta_{ps} R^{sr}(u) + K_1 \eta_{ps} u^s u^r = \frac{\partial H^r}{\partial u^p}.$$

Таким образом, доказано, что

$$R^{sr}(u) = \eta^{sp} \frac{\partial H^r}{\partial u^p} - K_1 u^s u^r,$$

а коэффициенты скобки Пуассона $\{I, J\}_1$ имеют вид

$$g_1^{ij}(u) = \eta^{is} \frac{\partial H^j}{\partial u^s} + \eta^{js} \frac{\partial H^i}{\partial u^s} - K_1 u^i u^j, \quad (3.7)$$

$$b_{1,k}^{ij}(u) = \eta^{is} \frac{\partial^2 H^j}{\partial u^s \partial u^k} - K_1 \delta_k^i u^j. \quad (3.8)$$

Поскольку в этом случае, как легко проверить, все соотношения согласованности (3.4) и (3.5) выполнены, важная для всей нашей дальнейшей конструкции теорема 3.1 доказана.

§ 4. Интегрируемые уравнения для канонических согласованных пар скобок

ТЕОРЕМА 4.1. *Нелокальная скобка вида (3.2) (возможно, вырожденная) является скобкой Пуассона тогда и только тогда, когда выполнены следующие уравнения:*

$$\frac{\partial^2 H^i}{\partial u^k \partial u^s} \eta^{sp} \frac{\partial^2 H^j}{\partial u^p \partial u^l} = \frac{\partial^2 H^j}{\partial u^k \partial u^s} \eta^{sp} \frac{\partial^2 H^i}{\partial u^p \partial u^l}, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \left(\eta^{ir} \frac{\partial H^s}{\partial u^r} + \eta^{sr} \frac{\partial H^i}{\partial u^r} - K_1 u^i u^s \right) \eta^{jp} \frac{\partial^2 H^k}{\partial u^p \partial u^s} \\ = \left(\eta^{jr} \frac{\partial H^s}{\partial u^r} + \eta^{sr} \frac{\partial H^j}{\partial u^r} - K_1 u^j u^s \right) \eta^{ip} \frac{\partial^2 H^k}{\partial u^p \partial u^s}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

В плоском случае ($K_1 = 0$) соответствующая теорема получена автором в [15], где была сформулирована также и гипотеза об интегрируемости системы (4.1), (4.2) при $K_1 = 0$ методом обратной задачи рассеяния, доказанная впоследствии в работах автора [4, 6, 7] (см. также [8], где найдена пара Лакса для этой системы

в плоском случае). Соответствующие общие условия на плоские пучки метрик указаны в [16].

Для нелокальной скобки вида (3.2) соотношения (2.4), (2.5), (2.8) выполняются тождественно. Соотношение (2.7) в этом случае принимает вид

$$b_{1,s}^{ij}(u)b_{1,k}^{sr}(u) = b_{1,s}^{ir}(u)b_{1,k}^{sj}(u), \quad (4.3)$$

что дает уравнения

$$\begin{aligned} & \left(\eta^{ip} \frac{\partial^2 H^j}{\partial u^p \partial u^s} - K_1 \delta_s^i u^j \right) \left(\eta^{sl} \frac{\partial^2 H^r}{\partial u^l \partial u^k} - K_1 \delta_k^s u^r \right) \\ &= \left(\eta^{ip} \frac{\partial^2 H^r}{\partial u^p \partial u^s} - K_1 \delta_s^i u^r \right) \left(\eta^{sl} \frac{\partial^2 H^j}{\partial u^l \partial u^k} - K_1 \delta_k^s u^j \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

эквивалентные уравнениям (4.1).

Соотношение (2.6) дает уравнения

$$\begin{aligned} & \left(\eta^{ip} \frac{\partial H^s}{\partial u^p} + \eta^{sp} \frac{\partial H^i}{\partial u^p} - K_1 u^i u^s \right) \left(\eta^{jl} \frac{\partial^2 H^r}{\partial u^l \partial u^s} - K_1 \delta_s^j u^r \right) \\ &= \left(\eta^{jp} \frac{\partial H^s}{\partial u^p} + \eta^{sp} \frac{\partial H^j}{\partial u^p} - K_1 u^j u^s \right) \left(\eta^{il} \frac{\partial^2 H^r}{\partial u^l \partial u^s} - K_1 \delta_s^i u^r \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

эквивалентные уравнениям (4.2).

Из теоремы 4.1 немедленно получаем следующее элементарное следствие.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Очевидно, что любой набор N линейных функций $H^i(u) = c_k^i u^k + c^i$, $c_k^i = \text{const}$, $c^i = \text{const}$, является тривиальным решением нелинейной системы уравнений (4.1), (4.2). Таким образом, скобка*

$$\begin{aligned} \{I, J\}_1 = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} & \left(\left[\eta^{is} c_s^j + \eta^{js} c_s^i - K_1 u^i u^j \right] \frac{d}{dx} \right. \\ & \left. - K_1 \delta_k^i u^j u_x^k + K_1 u_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} u_x^j \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx \end{aligned} \quad (4.6)$$

является скобкой Пуассона при любых константах c_k^i . В частности, для любой симметричной постоянной матрицы (μ^{ij}) , $\mu^{ij} = \mu^{ji}$, $\mu^{ij} = \text{const}$, контравариантная метрика $\mu^{ij} - K u^i u^j$ всегда является метрикой постоянной кривизны K , если она невырождена (при условии невырожденности матрицы (μ^{ij}) эта метрика является, очевидно, невырожденной); при этом порождаемая этой метрикой связность Леви-Чивиты определяется формулой $\Gamma_k^{ij}(u) = (\mu^{is} - K u^i u^s) \Gamma_{sk}^j(u) = K \delta_k^i u^j$.

Рассмотрим, в частности, контравариантную метрику вида

$$g^{ij}(u) = a^i \delta^{ij} - K u^i u^j, \quad (4.7)$$

где a^i , $1 \leq i \leq N$, — произвольные ненулевые константы, так что метрика $g^{ij}(u)$ является невырожденной. Нетрудно доказать, что

$$\det(g^{ij}(u)) = a^1 \cdots a^N \left(1 - K \sum_{s=1}^N \frac{(u^s)^2}{a^s} \right). \quad (4.8)$$

Ковариантная метрика $g_{ij}(u)$, обратная к контравариантной метрике $g^{ij}(u)$, $g^{is}(u)g_{sj}(u) = \delta_j^i$, имеет вид

$$g_{ij}(u) = \frac{1}{a^i} \delta_{ij} + \frac{K u^i u^j}{a^i a^j (1 - K \sum_{s=1}^N \frac{(u^s)^2}{a^s})} \quad (4.9)$$

и является метрикой постоянной римановой кривизны K при любых значениях ненулевых констант a^i . Любопытно, что рассматриваемые локальные координаты являются геодезическими в точке с координатами $(0, \dots, 0)$ ($u^i = 0$, $1 \leq i \leq N$), но не являются не только нормальными координатами Биркгофа для метрики, но даже и римановыми координатами, в которых, как известно, метрика имеет подобное разложение. Более важно, что эти локальные координаты являются, как будет показано в §5, специальными лиувиллевыми координатами для соответствующей скобки Пуассона.

Отметим, что метрика $g^{ij}(u)$ является невырожденной тогда и только тогда, когда не более чем одна из $N + 1$ констант a^i , $1 \leq i \leq N$, и K равна нулю. Укажем соответствующие формулы для интересного случая, когда любая одна из этих констант равна нулю. Случай $K = 0$ тривиален. Если же $a^m = 0$, то

$$\det(g^{ij}(u)) = -K \left(\prod_{s \neq m} a^s \right) (u^m)^2. \quad (4.10)$$

Компоненты ковариантной метрики $g_{ij}(u)$ постоянной римановой кривизны K в этом случае имеют вид

$$g_{mm}(u) = -\frac{1}{K(u^m)^2} \left(1 - K \sum_{s \neq m} \frac{(u^s)^2}{a^s} \right), \quad (4.11)$$

$$g_{im}(u) = g_{mi}(u) = -\frac{1}{a^i} \frac{u^i}{u^m}, \quad i \neq m, \quad (4.12)$$

$$g_{ii}(u) = \frac{1}{a^i}, \quad i \neq m, \quad (4.13)$$

$$g_{ij}(u) = 0, \quad i \neq j, \quad i \neq m, \quad j \neq m. \quad (4.14)$$

Все эти модели пространств постоянной кривизны играют важную роль в гамильтоновой теории систем гидродинамического типа. Скобки Мохова–Ферапонтова, задаваемые при $a^i = \varepsilon^i = \pm 1$ метриками (4.7) постоянной римановой кривизны K , названы в [17] *каноническими*. Такие канонические скобки естественно возникали также в приложениях в работе [18].

ТЕОРЕМА 4.2 [2, 3]. Система нелинейных уравнений (4.1), (4.2) интегрируется методом обратной задачи рассеяния.

Отметим, что в [2, 3] получена и проинтегрирована система нелинейных уравнений, эквивалентная системе (4.1), (4.2) и тоже описывающая согласованные нелокальные скобки Пуассона вида (1.1), но в других локальных координатах, гораздо более удобных для интегрирования (в этих координатах метрики обеих согласованных скобок диагональны). Но локальные координаты, в которых

метрики скобок диагонализуются, плохо приспособлены для эффективного построения интегрируемых иерархий, соответствующих рассматриваемым согласованным скобкам Пуассона. Для этой цели в данной работе развит другой подход. В плоском случае ($K_1 = 0$) система (4.1), (4.2) проинтегрирована в [6, 7].

§ 5. Лиувиллевы и специальные лиувиллевы координаты

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Локальные координаты $u = (u^1, \dots, u^N)$ называются *лиувиллевыми* для произвольной скобки Пуассона $\{I, J\}$, если функции (поля) $u^i(x)$ являются плотностями интегралов в инволюции относительно этой скобки, т. е.

$$\{U^i, U^j\} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad (5.1)$$

где $U^i = \int u^i(x) dx$, $1 \leq i \leq N$. В этом случае скобка Пуассона также называется *лиувиллевой* в этих координатах.

Лиувиллевы координаты естественно возникают и играют существенную роль в процедуре Дубровина–Новикова усреднения гамильтоновых уравнений [5]. Физические координаты, получаемые усреднением плотностей участвующих в процедуре Дубровина–Новикова N инволютивных локальных интегралов изначальной гамильтоновой системы, всегда являются лиувиллевыми для соответствующей усредненной скобки. Это свойство и явилось мотивировкой определения лиувиллевых координат для локальных скобок Пуассона гидродинамического типа в [5]. Для общих слабо нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа (скобок Ферапонтова [19, 20]) лиувиллевы координаты введены в [17].

Нелокальная скобка Пуассона гидродинамического типа (1.1) является лиувиллевой в локальных координатах $u = (u^1, \dots, u^N)$ тогда и только тогда, когда существует матричная функция $\Phi^{ij}(u)$, такая, что

$$b_k^{ij}(u) = \frac{\partial \Phi^{ij}}{\partial u^k} - K \delta_k^i u^j. \quad (5.2)$$

В этом случае в силу соотношений (2.4), (2.5) метрика $g^{ij}(u)$ обязана иметь вид

$$g^{ij}(u) = \Phi^{ij}(u) + \Phi^{ji}(u) - K u^i u^j \quad (5.3)$$

(функцию $\Phi^{ij}(u)$ при этом можно подправить на произвольную постоянную матричную функцию $c^{ij} = \text{const}$). Матричная функция $\Phi^{ij}(u)$ называется *лиувиллевой функцией* соответствующей лиувиллевой скобки Пуассона.

Таким образом, нелокальная скобка Пуассона (1.1) лиувиллева, если она имеет вид

$$\begin{aligned} \{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} & \left(\left(\Phi^{ij}(u) + \Phi^{ji}(u) - K u^i u^j \right) \frac{d}{dx} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \Phi^{ij}}{\partial u^k} - K \delta_k^i u^j \right) u_x^k + K u_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} u_x^j \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Из теоремы 3.1 следует

ТЕОРЕМА 5.1. *Плоские координаты произвольной невырожденной локальной скобки Пуассона гидродинамического типа $\{I, J\}_2$ всегда являются лиувиллевыми для любой нелокальной скобки Пуассона $\{I, J\}_1$ вида (1.1), согласованной с $\{I, J\}_2$. Более того, при этом соответствующая лиувиллева функция $\Phi^{ij}(u)$ всегда имеет специальный вид*

$$\Phi^{ij}(u) = \eta^{is} \frac{\partial H^j}{\partial u^s}. \quad (5.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Локальные координаты $u = (u^1, \dots, u^N)$ называются *специальными лиувиллевыми координатами* [15, 21] для произвольной скобки Пуассона $\{I, J\}$, если существует ненулевая постоянная симметричная матрица (η_{ij}) , такая, что функции (поля) $u^i(x)$, $1 \leq i \leq N$, и $\eta_{ij}u^i(x)u^j(x)$ являются плотностями интегралов в инволюции относительно этой скобки, т. е.

$$\{U^i, U^j\} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq N + 1, \quad (5.6)$$

где $U^i = \int u^i(x) dx$, $1 \leq i \leq N$, $U^{N+1} = \int \eta_{ij}u^i(x)u^j(x) dx$. В этом случае скобка Пуассона также называется *специальной лиувиллевой* в этих координатах.

Специальные лиувиллевы координаты были введены в работах автора [15, 21]. Наиболее важным является случай невырожденной матрицы η_{ij} .

ТЕОРЕМА 5.2. *Нелокальная скобка Пуассона вида (1.1) является специальной лиувиллевой в локальных координатах $u = (u^1, \dots, u^N)$ тогда и только тогда, когда она лиувиллева со специальной лиувиллевой функцией $\Phi^{ij}(u)$, такой, что*

$$\eta_{ks} \Phi^{sj}(u) = \frac{\partial H^j}{\partial u^k}. \quad (5.7)$$

Для невырожденной матрицы (η_{ij}) получаем в этом случае в точности нашу скобку (3.2) из канонической согласованной пары.

Таким образом, наша задача о согласованных нелокальных скобках Пуассона гидродинамического типа эквивалентна задаче классификации специальных лиувиллевых координат для нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа.

ТЕОРЕМА 5.3. *Произвольная нелокальная скобка Пуассона гидродинамического типа вида (1.1) согласована с постоянной скобкой Пуассона (3.1) тогда и только тогда, когда функции $u^i(x)$, $1 \leq i \leq N$, и $\eta_{ij}u^i(x)u^j(x)$, $\eta^{is}\eta_{sj} = \delta_j^i$, являются плотностями интегралов в инволюции относительно скобки Пуассона (1.1).*

Отметим, что $u^i(x)$, $1 \leq i \leq N$, — плотности аннуляторов скобки (3.1), а $\frac{1}{2}\eta_{ij}u^i(x)u^j(x)$ — плотность импульса скобки (3.1).

ТЕОРЕМА 5.4. *Произвольная нелокальная скобка Пуассона гидродинамического типа вида (1.1) согласована с произвольной невырожденной локальной скобкой Пуассона (2.2) тогда и только тогда, когда N аннуляторов и импульс скобки (2.2) являются интегралами в инволюции относительно скобки Пуассона (1.1).*

В плоском случае $K = 0$ все утверждения данного параграфа были доказаны ранее в работах автора [14, 15, 21].

§ 6. Интегрируемые бигамильтоновы системы гидродинамического типа

Рассмотрим произвольную пару согласованных нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа P_1^{ij} и P_2^{ij} , порождаемых метриками постоянной римановой кривизны. Как показано выше в лемме 2.1, один из этих операторов, скажем P_2^{ij} , можно считать локальным без ограничения общности. Если локальный гамильтонов оператор P_2^{ij} является невырожденным, то из теоремы 3.1 следует, что локальной заменой координат пара согласованных гамильтоновых операторов P_1^{ij} и P_2^{ij} приводится к следующему каноническому виду:

$$P_2^{ij}[v(x)] = \eta^{ij} \frac{d}{dx}, \quad (6.1)$$

$$P_1^{ij}[v(x)] = \left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} - K v^i v^j \right) \frac{d}{dx} + \left(\eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} - K \delta_k^i v^j \right) v_x^k + K v_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} v_x^j, \quad (6.2)$$

где (η^{ij}) — произвольная невырожденная постоянная симметричная матрица, т.е. $\det(\eta^{ij}) \neq 0$, $\eta^{ij} = \text{const}$, $\eta^{ij} = \eta^{ji}$; K — произвольная константа; $h^i(v)$, $1 \leq i \leq N$, — гладкие функции, заданные в некоторой области локальных координат, такие, что оператор (6.2) является гамильтоновым, т.е. функции $h^i(v)$ удовлетворяют интегрируемым уравнениям (4.1), (4.2) (см. теоремы 4.1 и 4.2 выше).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Очевидно, что здесь всегда можно считать, что $\eta^{ij} = \varepsilon^i \delta^{ij}$, $\varepsilon^i = 1$ при $i \leq p$, $\varepsilon^i = -1$ при $i > p$, где p — положительный индекс инерции метрики, $0 \leq p \leq N$, и, кроме того, необходимо классифицировать гамильтоновы операторы (6.2) относительно действия группы движений соответствующего N -мерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}_p^N$. Это нетрудно сделать, но для наших целей достаточно (и удобнее) пользоваться указанным выше представлением канонической согласованной пары («условно каноническим» представлением).

Рассмотрим оператор рекурсии, задаваемый каноническими согласованными гамильтоновыми операторами (6.1), (6.2),

$$\begin{aligned} R_l^i[v(x)] &= [P_1[v(x)](P_2[v(x)])^{-1}]_l^i \\ &= \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} - K v^i v^j \right) \frac{d}{dx} + \left(\eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} - K \delta_k^i v^j \right) v_x^k + K v_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} v_x^j \right) \eta_{jl} \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (6.3)$$

(об операторах рекурсии, задаваемых парами согласованных гамильтоновых операторов, см. [13, 22–26]).

Применим полученный нами оператор рекурсии (6.3) к системе трансляций по x , т.е. системе гидродинамического типа

$$v_t^i = v_x^i, \quad (6.4)$$

которая, очевидно, является гамильтоновой с гамильтоновым оператором (6.1):

$$v_t^i = v_x^i \equiv \eta^{ij} \frac{d}{dx} \frac{\delta H}{\delta v^j(x)}, \quad H = \frac{1}{2} \int \eta_{jl} v^j(x) v^l(x) dx. \quad (6.5)$$

Любая система из иерархии

$$v_{t_n}^i = (R^n)_j^i v_x^j, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (6.6)$$

является мультигамильтоновой интегрируемой системой.

В частности, интегрируемой является любая система вида

$$v_{t_1}^i = R_j^i v_x^j, \quad (6.7)$$

т. е. система гидродинамического типа

$$\begin{aligned} v_{t_1}^i &= \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} - K v^i v^j \right) \frac{d}{dx} \right. \\ &\quad \left. + \left(\eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} - K \delta_k^i v^j \right) v_x^k + K v_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} v_x^j \right) \eta_{jl} v^l \\ &\equiv \left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} \eta_{jk} + \frac{\partial h^i}{\partial v^k} + \eta^{is} \eta_{jl} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} v^l - K \eta_{sk} v^i v^s - \frac{K}{2} \delta_k^i \eta_{sl} v^s v^l \right) v_x^k \\ &\equiv \left(h^i(v) + \eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} \eta_{jl} v^l - \frac{K}{2} \eta_{sk} v^i v^s v^k \right)_x, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где $h^i(v)$, $1 \leq i \leq N$, — произвольное решение интегрируемой системы (4.1), (4.2).

Эта система гидродинамического типа является бигамильтоновой с парой канонических согласованных гамильтоновых операторов (6.1), (6.2):

$$\begin{aligned} v_{t_1}^i &= \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} - K v^i v^j \right) \frac{d}{dx} \right. \\ &\quad \left. + \left(\eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} - K \delta_k^i v^j \right) v_x^k + K v_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} v_x^j \right) \frac{\delta H_1}{\delta v^j(x)}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$H_1 = \frac{1}{2} \int \eta_{jl} v^j(x) v^l(x) dx,$$

$$v_{t_1}^i = \eta^{ij} \frac{d}{dx} \frac{\delta H_2}{\delta v^j(x)}, \quad (6.10)$$

$$H_2 = \int \left(\eta_{jk} h^k(v(x)) v^j(x) - \frac{K}{8} \eta_{jk} \eta_{sl} v^j(x) v^k(x) v^s(x) v^l(x) \right) dx.$$

Следующей системой в иерархии (6.6) (при $n = 2$) является интегрируемая система гидродинамического типа

$$\begin{aligned} v_{t_2}^i &= \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} - K v^i v^j \right) \frac{d}{dx} + \left(\eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} - K \delta_k^i v^j \right) v_x^k \right. \\ &\quad \left. + K v_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} v_x^j \right) \eta_{jl} \left(h^l(v) + \eta^{lp} \frac{\partial h^r}{\partial v^p} \eta_{rq} v^q - \frac{K}{2} \eta_{pr} v^l v^p v^r \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \equiv & \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} - K v^i v^j \right) \left(\eta_{jl} \frac{\partial h^l}{\partial v^k} + \eta_{rk} \frac{\partial h^r}{\partial v^j} + \eta_{rq} v^q \frac{\partial^2 h^r}{\partial v^j \partial v^k} \right. \right. \\
 & \left. \left. - K \eta_{jl} \eta_{pk} v^l v^p - \frac{K}{2} \eta_{jk} \eta_{pl} v^l v^p \right) \right. \\
 & + \left(\eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} - K \delta_k^i v^j \right) \left(\eta_{jl} h^l(v) + \eta_{rq} v^q \frac{\partial h^r}{\partial v^j} - \frac{K}{2} \eta_{jl} \eta_{pr} v^l v^p v^r \right) \\
 & \left. + K \delta_k^i \left(\eta_{jl} h^l(v) v^j - \frac{K}{8} \eta_{jl} \eta_{pr} v^j v^l v^p v^r \right) \right) v_x^k. \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

Даже тривиальные, линейные по полям $v^i(x)$, решения системы (4.1), (4.2) порождают нетривиальные интегрируемые системы гидродинамического типа. Все представленные в данной работе результаты обобщаются прямым образом на случай общих нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа (скобок Ферапонтова [19, 20]), хотя формулы становятся значительно более громоздкими и менее эффективными. Эти результаты будут опубликованы в другой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мохов О. И., Ферапонтов Е. В.* О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с метриками постоянной кривизны. УМН, **45**, вып. 3, 191–192 (1990).
2. *Мохов О. И.* Согласованные метрики постоянной римановой кривизны: локальная геометрия, нелинейные уравнения и интегрируемость. Функц. анализ и его прил., **36**, вып. 3, 36–47 (2002); arXiv: math.DG/0201280 (2002).
3. *Мохов О. И.* Пара Лакса для неособых пучков метрик постоянной римановой кривизны. УМН, **57**, вып. 3, 155–156 (2002).
4. *Мохов О. И.* Согласованные и почти согласованные псевдоримановы метрики. Функц. анализ и его прил., **35**, вып. 2, 24–36 (2001); arXiv: math.DG/0005051 (2000).
5. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема. ДАН СССР, **270**, № 4, 781–785 (1983).
6. *Мохов О. И.* Об интегрируемости уравнений для неособых пар согласованных плоских метрик. Теор. матем. физ., **130**, вып. 2, 233–250 (2002); arXiv: math.DG/0005081 (2000).
7. *Мохов О. И.* Плоские пучки метрик и интегрируемые редукции уравнений Ламе. УМН, **56**, вып. 2, 221–222 (2001).
8. *Ferapontov E. V.* Compatible Poisson brackets of hydrodynamic type. J. Phys. A, **34**, 2377–2388 (2001); arXiv: math.DG/0005221 (2000).
9. *Мохов О. И.* Согласованные гамильтоновы операторы Дубровина–Новикова, производная Ли и интегрируемые системы гидродинамического типа. Труды Международной конференции «Нелинейные эволюционные уравнения и динамические системы», Кембридж (Англия), 24–30 июля 2001 г., Теор. матем. физ., **133**, вып. 2, 279–288 (2002); arXiv: math.DG/0201281 (2002).
10. *Мохов О. И.* Интегрируемые бигамильтоновы системы гидродинамического типа. УМН, **57**, вып. 1, 157–158 (2002).
11. *Magri F.* A simple model of the integrable Hamiltonian equation. J. Math. Phys., **19**, No. 5, 1156–1162 (1978).
12. *Mokhov O. I.* Hamiltonian systems of hydrodynamic type and constant curvature metrics. Phys. Letters. A, **166**, Nos. 3–4, 215–216 (1992).

13. *Мохов О. И.* Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы. УМН, **53**, вып. 3, 85–192 (1998).
14. *Мохов О. И.* О согласованных пуассоновых структурах гидродинамического типа. УМН, **52**, вып. 6, 171–172 (1997).
15. *Мохов О. И.* Согласованные пуассоновы структуры гидродинамического типа и уравнения ассоциативности. Труды МИРАН, **225**, 284–300 (1999).
16. *Dubrovin B.* Geometry of 2D topological field theories. In: Lect. Notes in Math., Vol. 1620, 1996, pp. 120–348; arXiv: hep-th/9407018 (1994).
17. *Maltsev A. Ya., Novikov S. P.* On the local systems Hamiltonian in the weakly non-local Poisson brackets. Physica D, **156**, Nos. 1–2, 53–80 (2001); arXiv: nlin.SI/0006030 (2000).
18. *Павлов М. В.* Эллиптические координаты и мультигамильтоновы структуры систем гидродинамического типа. ДАН, **339**, №1, 21–23 (1994).
19. *Ферапонтов Е. В.* Дифференциальная геометрия нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа. Функц. анализ и его прил., **25**, вып. 3, 37–49 (1991).
20. *Ferapontov E. V.* Nonlocal Hamiltonian operators of hydrodynamic type: differential geometry and applications. In: Topics in topology and mathematical physics (S. P. Novikov, ed.), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 33–58.
21. *Mokhov O. I.* Compatible Poisson structures of hydrodynamic type and the equations of associativity in two-dimensional topological field theory. Rep. Math. Phys., **43**, No. 1/2, 247–256 (1999).
22. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.* Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры. Функц. анализ и его прил., **13**, вып. 4, 13–30 (1979).
23. *Fuchssteiner B.* Application of hereditary symmetries to nonlinear evolution equations. Nonlinear Anal., **3**, 849–862 (1979).
24. *Fokas A. S., Fuchssteiner B.* On the structure of symplectic operators and hereditary symmetries. Lettere al Nuovo Cimento, **28**, No. 8, 299–303 (1980).
25. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. Мир, М., 1989.
26. *Dorfman I.* Dirac structures and integrability of nonlinear evolution equations. John Wiley & Sons, Chichester, England, 1993.

Центр нелинейных исследований
при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
e-mail: mokhov@mi.ras.ru, mokhov@landau.ac.ru

Поступило в редакцию
9 апреля 2002 г.