Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Г. Рыбников, О коммутативности слабо коммутативных римановых однородных пространств, *Функци. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 2, 41–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa147>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 03:28:03

УДК 514.75

О коммутативности слабо коммутативных римановых однородных пространств*

© 2003. Л. Г. Рыбников

§1. Введение

Пусть G — вещественная группа Ли, $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$, H — компактная подгруппа в G и $\mathfrak{h} = \text{Lie } H$. Рассмотрим риманово однородное пространство $X = G/H$. Пусть $D(X)$ — алгебра дифференциальных операторов на X .

На алгебре $D(X)$ имеется фильтрация, $D(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} D(X)^{(n)}$, по порядку дифференциального оператора. Соответствующая градуированная алгебра $\text{gr } D(X)$ изоморфна алгебре $P(X)$ функций на кокасательном расслоении T^*X многообразия X , полиномиальных на слоях, причем изоморфизм осуществляется взятием символа дифференциального оператора.

На алгебре $P(X)$ естественно возникает скобка Пуассона: при $r \in D(X)^{(n)}$, $s \in D(X)^{(m)}$ имеем $\{\text{gr}_n r, \text{gr}_m s\} = \text{gr}_{n+m-1}[r, s]$. Она совпадает со скобкой Пуассона, определяемой стандартной симплектической структурой на T^*X . Основными объектами дальнейших рассуждений будут алгебры $D(X)^G$ и $P(X)^G$ — подалгебры G -инвариантов в $D(X)$ и $P(X)$ соответственно. Очевидно, что пуассонова алгебра, соответствующая алгебре $D(X)^G$, вложена в алгебру $P(X)^G$. Дадим более явное описание алгебры $D(X)^G$ в терминах универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$.

Каждому элементу ξ алгебры Ли $\mathfrak{g} = T_e G$ поставим в соответствие левоинвариантный дифференциальный оператор первого порядка на группе G , являющийся дифференцированием по направлению левоинвариантного векторного поля, равного ξ в единице группы G . Это отображение продолжается до изоморфизма алгебры $U(\mathfrak{g})$ на алгебру левоинвариантных дифференциальных операторов на G . При этом порядок дифференциального оператора, соответствующего элементу $u \in U(\mathfrak{g})$, равен степени выражения элемента u через элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а взятие символа левоинвариантного дифференциального оператора в точке e есть изоморфизм $\text{gr } U(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{g})$, описываемый теоремой Пуанкаре–Биркгофа–Витта.

Пусть $U(\mathfrak{g})^H$ — подалгебра алгебры $U(\mathfrak{g})$, состоящая из элементов, инвариантных относительно присоединенного действия подгруппы H . Аналогично определим подалгебру $S(\mathfrak{g})^H$ в $S(\mathfrak{g})$. Алгебры $U(\mathfrak{g})$ и $S(\mathfrak{g})$ являются изоморфными H -модулями (более того, изоморфными G -модулями), а следовательно, вложение $\text{gr } U(\mathfrak{g})^H \rightarrow S(\mathfrak{g})^H$ является изоморфизмом. Всякий оператор $D \in U(\mathfrak{g})^H$ перестановочен с правыми сдвигами на элементы подгруппы H и, следовательно, переводит в себя пространство функций на G , правоинвариантных относительно H . Тем самым он определяет некоторый инвариантный дифференци-

*Работа выполнена при поддержке фонда CRDF, грант RMI-2088.

альный оператор D_H на многообразии $X = G/H$. Отметим, что символ оператора D_H есть образ символа оператора D при каноническом гомоморфизме $P(T^*G)^G \rightarrow P(T^*X)^G$. В частности, символ оператора D_H в точке $o = eH \in X$ есть образ символа оператора D в точке $e \in G$ при каноническом гомоморфизме $\mathbb{R}[T_e^*G] = S(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \mathbb{R}[T_o^*X]$.

Все дифференциальные операторы из левого идеала $U(\mathfrak{g})\mathfrak{h}$ алгебры $U(\mathfrak{g})$ аннулируют функции, правоинвариантные относительно H . Так как элементы подалгебры $U(\mathfrak{g})^H$ перестановочны с элементами из $\mathfrak{h}$, то $(U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H$ — двусторонний идеал алгебры $U(\mathfrak{g})^H$. Таким образом, определен гомоморфизм ассоциативных алгебр

$$\mu: U(\mathfrak{g})^H/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H \rightarrow D(X)^G.$$

Так как группа H компактна, то $U(\mathfrak{g})\mathfrak{h}$ и $S(\mathfrak{g})\mathfrak{h}$ являются изоморфными H -модулями. Следовательно, $\text{gr}(U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H = (S(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H$. Отсюда, в частности, вытекает, что $(S(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H$ — пуассонов идеал в алгебре $S(\mathfrak{g})^H$. Переходя от ассоциативных алгебр к ассоциированным пуассоновым, получаем гомоморфизм пуассоновых алгебр

$$\text{gr } \mu: S(\mathfrak{g})^H/(S(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H \rightarrow \text{gr } D(X)^G \subset P(X)^G.$$

Известно [1], что

1) гомоморфизм μ является изоморфизмом ассоциативных алгебр,

$$U(\mathfrak{g})^H/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H \simeq D(X)^G;$$

2) гомоморфизм $\text{gr } \mu$ является изоморфизмом пуассоновых алгебр,

$$S(\mathfrak{g})^H/(S(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H \simeq P(X)^G.$$

Отсюда следует, что пуассонова алгебра, соответствующая алгебре $D(X)^G$, совпадает с алгеброй $P(X)^G$.

Изоморфизм пуассоновых алгебр

$$(\text{gr } \mu)^{-1}: P(X)^G \rightarrow S(\mathfrak{g})^H/(S(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H = \mathbb{R}[T_o^*X]^H$$

имеет очевидную геометрическую интерпретацию: это гомоморфизм ограничения на слой $T_o^*X = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ кокасательного расслоения в точке $o = eH$.

Однородное пространство X называется *коммулативным*, если алгебра $D(X)^G$ коммутативна, и *слабо коммулативным*, если алгебра $P(X)^G$ коммутативна относительно скобки Пуассона. Так как $\text{gr } D(X)^G = P(X)^G$, то из коммулативности риманова однородного пространства следует его слабая коммулативность.

Вопрос об истинности обратного утверждения, т.е. о коммулативности слабо коммулативных однородных пространств, тесно связан с гипотезой М. Дюфлю [4], состоящей в следующем. Пусть G — связная группа Ли и H — связная подгруппа в G . Для любого характера ν группы H обозначим через $\mathfrak{h}^\nu$ подпространство в $U(\mathfrak{g})$ или $S(\mathfrak{g})$, являющееся линейной оболочкой элементов $y + \nu(y)$, $y \in \mathfrak{h}$. Определим характер δ группы H по формуле $\delta(h) = (\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \text{Ad } h)^{1/2}$.

Пусть λ — произвольный характер группы H . Рассмотрим следующие фильтрованные коммулативные алгебры:

- 1) $Z(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\mathfrak{h}^\lambda)^H$ — центр пуассоновой алгебры $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\mathfrak{h}^\lambda)^H$;
- 2) $Z(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{h}^{\lambda-\delta})^H$ — центр ассоциативной алгебры $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{h}^{\lambda-\delta})^H$.

Ассоциированные градуированные алгебры каноническим образом вкладываются в градуированную алгебру $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H$.

ГИПОТЕЗА. *Существует отображение*

$$\beta: Z(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\mathfrak{h}^\lambda)^H \rightarrow Z(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{h}^{\lambda-\delta})^H,$$

осуществляющее изоморфизм фильтрованных алгебр, такое, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \text{gr } Z(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\mathfrak{h}^\lambda)^H & \xrightarrow{\text{gr } \beta} & \text{gr } Z(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{h}^{\lambda-\delta})^H \\ & \searrow & \swarrow \\ & (S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H & \end{array}$$

При $H = \{e\}$ эта гипотеза превращается в известную теорему Дюфло (см., например, [2]) об изоморфизме центра универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ и центра пуассоновой алгебры $S(\mathfrak{g})$. В случае редуктивных групп G и H при $\lambda = 0$ эта гипотеза следует из результатов Кнопа [6]. В общем случае вопрос остается открытым.

Если группа H компактна, то характер δ тривиален. Таким образом, в этом случае гипотеза Дюфло означает изоморфизм центра ассоциативной алгебры $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H = D(X)^G$ и центра пуассоновой алгебры $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H = P(X)^G$. В частности, если пуассонова алгебра $P(X)^G$ совпадает со своим центром, то ассоциативная алгебра $D(X)^G$ тоже совпадает со своим центром. Таким образом, коммутативность слабо коммутативных римановых однородных пространств следует из гипотезы Дюфло для случая $\lambda = 0$ и компактной группы H . Однако даже в этом случае при произвольной группе G вопрос об истинности гипотезы остается открытым.

Известно, что утверждение о коммутативности слабо коммутативных римановых однородных пространств верно в двух противоположных случаях: когда группа G редуктивна [3, 5] (в этом случае пространство X является сферическим) и когда $G = H \ltimes N$, где N — нильпотентная группа Ли [1]. В настоящей работе это утверждение будет доказано в общем случае. В том числе это даст новое доказательство в случае редуктивной группы G .

Основная идея доказательства состоит в явном построении «достаточно большой» коммутативной подалгебры в $D(X)^G$. В случае редуктивной группы G эта подалгебра совпадает с образом центра универсальной обертывающей алгебры при отображении μ .

Я благодарю Э. Б. Винберга за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Я благодарен также рецензенту за ценные замечания.

§ 2. Некоторые обозначения

ZA — центр ассоциативной алгебры A .

$\text{Quot}(B)$ — поле частных целостной коммутативной алгебры B .

$F[X]$ — алгебра регулярных (полиномиальных) функций на алгебраическом многообразии X над полем F .

$F(X)$ — алгебра рациональных функций на алгебраическом многообразии X над полем F .

$T_x(X)$ — касательное пространство многообразия X в точке x .

$\mathfrak{h}^\circ (\simeq (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)$ — аннулятор подпространства $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}^*$.

$L \ltimes N$ — полупрямое произведение групп H и N , в котором подгруппа N нормальна.

$\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ — полупрямая сумма алгебр Ли $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{n}$, в которой $\mathfrak{n}$ — идеал.

Группы Ли обозначаются прописными латинскими буквами, а их касательные алгебры Ли — соответствующими строчными готическими буквами.

§ 3. Доказательства вспомогательных утверждений

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$ — фильтрованная ассоциативная алгебра и $A = \text{gr } \mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ — некоторая коммутативная подалгебра, а $B = \text{gr } \mathcal{B}$, причем

1) A — целостная коммутативная алгебра;

2) $A \supseteq B$ — алгебраическое расширение.

Тогда алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность операций $\{\cdot, \cdot\}_k$ на алгебре A , задаваемую следующим образом:

1) при $r \in \mathcal{A}_n, s \in \mathcal{A}_m$ имеем $\{\text{gr}_n r, \text{gr}_m s\}_1 = \text{gr}_{n+m-1}[r, s]$;

2) если операция $\{\cdot, \cdot\}_{k-1}$ нулевая, то при $r \in \mathcal{A}_n, s \in \mathcal{A}_m$ имеем $\{\text{gr}_n r, \text{gr}_m s\}_k = \text{gr}_{n+m-k}[r, s]$.

Предположим, что алгебра $\mathcal{A}$ не коммутативна. Тогда эта последовательность оборвется на каком-то l -м шаге. Очевидно, что $\{\cdot, \cdot\}_l$ является нетривиальным бидифференцированием алгебры A , причем $\{B, B\}_l = 0$.

Любой элемент $s \in B$ задает дифференцирование алгебры A , переводящее элемент $r \in A$ в $\{r, s\}_l$. Очевидно, что любое такое дифференцирование равно нулю на B и, следовательно, на любом алгебраическом расширении алгебры B . Значит, $\{B, A\}_l = 0$. Отсюда аналогичным образом следует, что $\{A, A\}_l = 0$. Таким образом, алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна. $\square$

Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$ и $U(\mathfrak{g})$ — универсальная обертывающая алгебра. На $U(\mathfrak{g})$ имеется естественная фильтрация, причем по теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта $\text{gr } U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}[\mathfrak{g}^*]$ — алгебра полиномов на $\mathfrak{g}^*$.

Отображение симметризации $\sigma: S(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$, характеризующееся свойством

$$\sigma(\xi^n) = \xi^n \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}, n \in \mathbb{Z}_+,$$

задает изоморфизм G -модулей $S(\mathfrak{g})$ и $U(\mathfrak{g})$.

На $S(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}[\mathfrak{g}^*]$ имеется скобка Пуассона–Ли $\{\cdot, \cdot\}$, которую можно определить двумя эквивалентными способами:

1) Пусть $\alpha \in \mathfrak{g}^*, f, h \in \mathbb{R}[\mathfrak{g}^*]$. Тогда $\{f, h\}(\alpha) = \langle [d_\alpha f, d_\alpha h], \alpha \rangle$.

2) Пусть $f \in S^n(\mathfrak{g}), h \in S^m(\mathfrak{g})$. Выберем $\tilde{f}, \tilde{h} \in U(\mathfrak{g})$ так, чтобы $\text{gr}_n \tilde{f} = f, \text{gr}_m \tilde{h} = h$. Тогда $\{f, h\} = \text{gr}_{m+n-1}([\tilde{f}, \tilde{h}])$. (Легко видеть, что результат не зависит от выбора $\tilde{f}, \tilde{h}$. В частности, можно взять $\tilde{f} = \sigma(f), \tilde{h} = \sigma(h)$.)

Из определения 1) видно, что симплектическими слоями этой пуассоновой структуры являются G -орбиты в $\mathfrak{g}^*$, что позволяет задать пуассонову структуру на любом G -инвариантном подмногообразии в $\mathfrak{g}^*$.

Пусть M — симплектическое многообразие и $G: M$ — пуассоновое действие, т. е. задан такой гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$ (структура алгебры Ли на $C^\infty(M)$ задается скобкой Пуассона), $\xi \mapsto H_\xi$, что косою градиент функции H_ξ

равен ξ_* , где ξ_* — поле скоростей действия, соответствующее элементу $\xi \in \mathfrak{g}$. В этом случае можно определить отображение моментов $\Phi: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ по формуле

$$\langle \Phi(x), \xi \rangle = H_\xi(x) \quad (x \in T^*X, \xi \in \mathfrak{g}).$$

Это отображение является эквивариантным морфизмом пуассоновых многообразий, причем касательное пространство слоя в любой точке совпадает с ортогональным дополнением касательного пространства G -орбиты в этой точке относительно симплектической структуры на M .

Пусть $X = G/H$ — риманово однородное пространство (группа H компактна). Рассмотрим подалгебру H -инвариантов в алгебре $\mathbb{R}[\mathfrak{h}^\circ] = \mathbb{R}[\mathfrak{g}^*]/\mathbb{R}[\mathfrak{g}^*]\mathfrak{h}$. Заметим, что

$$P(X)^G \simeq \mathbb{R}[\mathfrak{h}^\circ]^H = \text{gr } U(\mathfrak{g})^H / (U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H.$$

Так как $(\mathbb{R}[\mathfrak{g}^*]\mathfrak{h})^H$ — пуассонов идеал в $\mathbb{R}[\mathfrak{g}^*]^H$, то скобку Пуассона на $\mathbb{R}[\mathfrak{h}^\circ]^H$ можно корректно определить так: для $f, h \in \mathbb{R}[\mathfrak{h}^\circ]^H$ выберем такие $\tilde{f}, \tilde{h} \in \mathbb{R}[\mathfrak{g}^*]$, что $\tilde{f}|_{\mathfrak{h}^\circ} = f$, $\tilde{h}|_{\mathfrak{h}^\circ} = h$; тогда $\{f, h\} = \{\tilde{f}, \tilde{h}\}|_{\mathfrak{h}^\circ}$. Мы докажем, что можно аналогичным образом корректно определить скобку Пуассона на $\mathbb{R}[Y \cap \mathfrak{h}^\circ]^H$, где Y — любое G -инвариантное замкнутое алгебраическое подмногообразие в $\mathfrak{g}^*$.

Рассмотрим отображение моментов $\Phi: T^*X \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Образом этого отображения является множество $G\mathfrak{h}^\circ \subset \mathfrak{g}^*$ (кокасательное пространство в точке $gH \in X$ изоморфно отображается на подпространство $(\text{Ad}^*g)\mathfrak{h}^\circ \subset \mathfrak{g}^*$). Прообраз инвариантного подмногообразия $Y \subset \mathfrak{g}^*$, очевидно, равен $G\Phi^{-1}(Y \cap \mathfrak{h}^\circ)$. Пусть $I \subset P(X)^G$ — идеал функций, обращающихся в нуль на $\Phi^{-1}(Y)$. Косой градиент любой функции из I в любой точке $x \in \Phi^{-1}(Y)$ ортогонален слою отображения моментов, а значит, касается многообразия Gx . Но косые градиенты G -инвариантных функций в точке x ортогональны Gx ; следовательно, $\{P(X)^G, I\} \subset I$. Таким образом, I — пуассонов идеал в $P(X)^G$, а значит, скобка Пуассона корректно определена на алгебре $P(X)^G|_{\Phi^{-1}(Y)}$. Но ограничение на $(T_o^*X) \cap \Phi^{-1}(Y) = Y \cap \mathfrak{h}^\circ$ задает изоморфизм

$$P(X)^G|_{\Phi^{-1}(Y)} \simeq \mathbb{R}[Y \cap \mathfrak{h}^\circ]^H.$$

Таким образом, скобку Пуассона можно корректно определить на алгебре $\mathbb{R}[Y \cap \mathfrak{h}^\circ]^H$.

ЛЕММА 2. Пусть G — алгебраическая группа и H — компактная подгруппа в G . Пусть Y есть G -инвариантное замкнутое подмногообразие в $\mathfrak{g}^*$, причем алгебра $\mathbb{R}[Y \cap \mathfrak{h}^\circ]^H$ коммутативна относительно скобки Пуассона. Тогда для точки общего положения $y \in \mathfrak{h}^\circ \cap Y$ многообразие $Gy \cap \mathfrak{h}^\circ$ является конечным объединением H -орбит.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x — точка общего положения в $Gy \cap \mathfrak{h}^\circ$. Очевидно, что пространство $(\text{ad}^*\mathfrak{h})x$ изотропно, а пространство $(\text{ad}^*\mathfrak{g})x \cap \mathfrak{h}^\circ$ является его ортогональным дополнением относительно формы Кириллова на Gy . Таким образом, пространство $((\text{ad}^*\mathfrak{g})x \cap \mathfrak{h}^\circ)/(\text{ad}^*\mathfrak{h})x$ симплектично. Так как H -орбиты в $Gy \cap \mathfrak{h}^\circ$ разделяются полиномиальными инвариантами, то косые градиенты H -инвариантов в точке x заполняют пространство $((\text{ad}^*\mathfrak{g})x \cap \mathfrak{h}^\circ)/(\text{ad}^*\mathfrak{h})x$. Но по условию эти градиенты должны коммутировать. Следовательно, пространство $((\text{ad}^*\mathfrak{g})x \cap \mathfrak{h}^\circ)/(\text{ad}^*\mathfrak{h})x$ нулевое. Таким образом, H -орбиты общего положения открыты в $Gy \cap \mathfrak{h}^\circ$. Так как группа H компактна, то они и замкнуты, откуда следует утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 3. Пусть G — редуктивная группа, а Y есть G -инвариантное замкнутое подмногообразие в $\mathfrak{g}^*$. Тогда $\mathbb{R}(Y)^G \supseteq \text{Quot}(\mathbb{R}[\mathfrak{g}^*]^G|_Y)$ — конечное расширение полей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый слой морфизма факторизации $\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*/G$ является объединением конечного числа орбит. Значит, то же самое верно для морфизма $Y \rightarrow Y//G$. Следовательно, степени трансцендентности полей $\mathbb{R}(Y)^G$ и $\text{Quot}(\mathbb{R}[Y]^G)$ равны, т. е. $\mathbb{R}(Y)^G \supseteq \text{Quot}(\mathbb{R}[Y]^G)$ — конечное расширение. Но так как группа G редуктивна, то $\text{Quot}(\mathbb{R}[Y]^G) = \text{Quot}(\mathbb{R}[\mathfrak{g}^*]^G|_Y)$. Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Пусть $G = G_0 \ltimes G_1$, где группы G_0 и G_1 редуктивны, и H — компактная подгруппа в G_0 . Пусть J_1 — такой G_0 -инвариантный двусторонний идеал в $U(\mathfrak{g}_1)$, что $I_1 = \text{gr } J_1$ — простой идеал в $S(\mathfrak{g}_1)$. Тогда $J = U(\mathfrak{g})J_1 = U(\mathfrak{g}_0)J_1$ — двусторонний идеал в $U(\mathfrak{g})$, а $I = \text{gr } J = S(\mathfrak{g}_0)I_1$ есть G -инвариантный идеал в $S(\mathfrak{g})$. Имеют место следующие изоморфизмы H -модулей:

$$J + U(\mathfrak{g})\mathfrak{h} \simeq ([U(\mathfrak{g}_0)/U(\mathfrak{g}_0)\mathfrak{h}] \otimes J_1) \oplus U(\mathfrak{g})\mathfrak{h} \simeq (S(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{h}) \otimes I_1) \oplus S(\mathfrak{g})\mathfrak{h} \simeq I + S(\mathfrak{g})\mathfrak{h}.$$

Отсюда следует, что

$$\text{gr}(J + U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H \simeq (I + S(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H,$$

а значит, имеет место изоморфизм пуассоновых алгебр:

$$\text{gr } U(\mathfrak{g})^H/(J + U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H \simeq S(\mathfrak{g})^H/(I + S(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H.$$

ЛЕММА 4. Коммутативность пуассоновой алгебры $S(\mathfrak{g})^H/(I + S(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H$ влечет за собой коммутативность ассоциативной алгебры $U(\mathfrak{g})^H/(J + U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Y \subset \mathfrak{g}^*$ — многообразие нулей идеала I и $Y_1 \subset \mathfrak{g}_1^*$ — многообразие нулей идеала I_1 . Заметим, что $Y = Y_1 \times \mathfrak{g}_0^*$, причем имеют место следующие изоморфизмы алгебр:

$$\mathbb{R}[Y \cap \mathfrak{h}^\circ]^H \simeq ((S(\mathfrak{g}_1)/I_1) \otimes (S(\mathfrak{g}_0)/S(\mathfrak{g}_0)\mathfrak{h}))^H \simeq S(\mathfrak{g})^H/(I + S(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H.$$

По лемме 2 каждая G -орбита общего положения в Y пересекает $\mathfrak{h}^\circ$ не более чем по конечному числу H -орбит. Таким образом, поле $\mathbb{R}(Y \cap \mathfrak{h}^\circ)^H$ является конечным расширением поля $\mathbb{R}(Y)^G|_{Y \cap \mathfrak{h}^\circ}$. Так как группа G редуктивна, то по лемме 3 поле $\mathbb{R}(Y \cap \mathfrak{h}^\circ)^H$ является конечным расширением поля $\text{Quot}(\mathbb{R}[\mathfrak{g}^*]^G|_{Y \cap \mathfrak{h}^\circ})$. Но ограничения всех инвариантов из $\mathbb{R}[\mathfrak{g}^*]^G$ на $Y \cap \mathfrak{h}^\circ$ принадлежат $\text{gr } Z(U(\mathfrak{g})^H/(J + U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H)$. Значит, алгебра $S(\mathfrak{g})^H/(I + S(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H$ является алгебраическим расширением алгебры $\text{gr } Z(U(\mathfrak{g})^H/(J + U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H)$. По лемме 1 отсюда следует коммутативность алгебры $U(\mathfrak{g})^H/(J + U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H$. $\square$

Пусть $\mathfrak{a}$ — векторное пространство с постоянной (возможно, вырожденной) кососимметрической билинейной формой ω . Пусть $W(\mathfrak{a})$ — алгебра Вейля с пространством образующих $\mathfrak{a}$ и определяющими соотношениями

$$vw - wv = \omega(v, w)$$

для любых $v, w \in \mathfrak{a}$.

На алгебре $W(\mathfrak{a})$ имеется фильтрация по степени выражения через образующие:

$$W(\mathfrak{a}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} W^{(n)}(\mathfrak{a}),$$

причем ассоциированная градуированная алгебра изоморфна $S(\mathfrak{a})$.

Отображение симметризации $\sigma: S(\mathfrak{a}) \rightarrow W(\mathfrak{a})$, определяемое так же, как и для универсальной обертывающей алгебры, свойством

$$\sigma(\xi^n) = \xi^n \quad \forall \xi \in \mathfrak{a}, n \in \mathbb{Z}_+,$$

задает изоморфизм $Sp(\mathfrak{a}, \omega)$ -модулей $S(\mathfrak{a})$ и $W(\mathfrak{a})$.

На $\mathbb{R}[\mathfrak{a}^*] = S(\mathfrak{a})$ имеется скобка Пуассона

$$\{\cdot, \cdot\}: S^m(\mathfrak{a}) \otimes S^m(\mathfrak{a}) \rightarrow S^{m+m-2}(\mathfrak{a}),$$

определяемая коммутатором в $W(\mathfrak{a})$. Если форма ω невырождена, то эта скобка совпадает со скобкой Пуассона, определяемой постоянной симплектической структурой на $\mathfrak{a}$.

Пусть G — группа Ли, действующая на пространстве $\mathfrak{a}$ преобразованиями, сохраняющими форму ω . Определим «полупрямое тензорное произведение» $U(\mathfrak{g}) \otimes W(\mathfrak{a})$: это произведение алгебр $U(\mathfrak{g})$ и $W(\mathfrak{a})$ с определяющими соотношениями

$$xa - ax = x(a) \quad \forall x \in \mathfrak{g}, a \in \mathfrak{a}.$$

Фильтрации на $U(\mathfrak{g})$ и $W(\mathfrak{a})$ индуцируют фильтрацию на $U(\mathfrak{g}) \otimes W(\mathfrak{a})$:

$$(U(\mathfrak{g}) \otimes W(\mathfrak{a}))^{(n)} = \sum_{2m+k=n} U^{(m)}(\mathfrak{g}) \otimes W^{(k)}(\mathfrak{a}),$$

т. е. пространство $\mathfrak{g}$ имеет вес 2, а $\mathfrak{a}$ — вес 1. Ассоциированная градуированная алгебра изоморфна $S(\mathfrak{g}) \otimes S(\mathfrak{a}) = \mathbb{R}[\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{a}^*]$. Коммутатор в алгебре $U(\mathfrak{g}) \otimes W(\mathfrak{a})$ определяет скобку Пуассона на $S(\mathfrak{g}) \otimes S(\mathfrak{a})$:

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\}: (S^{m_1}(\mathfrak{g}) \otimes S^{m_1}(\mathfrak{a})) \otimes (S^{n_2}(\mathfrak{g}) \otimes S^{m_2}(\mathfrak{a})) \\ \rightarrow (S^{m_1+n_2}(\mathfrak{g}) \otimes S^{m_1+m_2-2}(\mathfrak{a})) \oplus (S^{n_1+n_2-1}(\mathfrak{g}) \otimes S^{m_1+m_2}(\mathfrak{a})). \end{aligned}$$

Пусть H — компактная подгруппа в G . Рассмотрим подалгебру H -инвариантов в алгебре $U(\mathfrak{g}) \otimes W(\mathfrak{a})$. Очевидно, что $(U(\mathfrak{g}) \otimes W(\mathfrak{a}))^H$ — двусторонний идеал в $U(\mathfrak{g}) \otimes W(\mathfrak{a})$. Рассмотрим следующую ассоциативную алгебру:

$$B(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a}) = (U(\mathfrak{g}) \otimes W(\mathfrak{a}))^H / (U(\mathfrak{g}) \otimes W(\mathfrak{a}))^H.$$

Фильтрация на $U(\mathfrak{g}) \otimes W(\mathfrak{a})$ задает фильтрацию на $B(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, причем ассоциированная градуированная (пуассонова) алгебра изоморфна $(S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \otimes S(\mathfrak{a}))^H = \mathbb{R}[\mathfrak{h}^\circ \times \mathfrak{a}^*]^H$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G — редуктивная группа, действующая симплектическими преобразованиями на пространстве $\mathfrak{a}$ с невырожденной 2-формой ω , и H — компактная подгруппа в G . Тогда коммутативность алгебры $\mathbb{R}[\mathfrak{h}^\circ \times \mathfrak{a}^*]^H$ относительно скобки Пуассона влечет за собой коммутативность алгебры $B(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На $W(\mathfrak{a})$ имеется естественная $\mathbb{Z}_2$ -градуировка $W(\mathfrak{a}) = W(\mathfrak{a})_+ \oplus W(\mathfrak{a})_-$ по степеням одночленов. Соответствующая градуировка имеется на $\mathbb{R}[\mathfrak{a}^*]$, $B(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ и $\mathbb{R}[\mathfrak{h}^\circ \times \mathfrak{a}^*]^H$.

Заметим, что скобка Пуассона задает на $S^2(\mathfrak{a})$ структуру алгебры Ли, изоморфной $\mathfrak{sp}(\mathfrak{a}, \omega)$. Рассмотрим пространство $W(\mathfrak{a})_2 = \sigma(S^2(\mathfrak{a})) \subset W(\mathfrak{a})$. Коммутатор задает на $W(\mathfrak{a})_2$ структуру алгебры Ли, изоморфной $\mathfrak{sp}(\mathfrak{a}, \omega)$. Так как пространство $W(\mathfrak{a})_2$ порождает всю алгебру $W(\mathfrak{a})_+$, то алгебра $W(\mathfrak{a})_+$ изоморфна

факторалгебре алгебры $U(\mathfrak{sp}(\mathfrak{a}, \omega))$ по некоторому G -инвариантному двустороннему идеалу J_1 .

На пространстве $\mathfrak{g} + W(\mathfrak{a})_2$ коммутатор задает структуру алгебры Ли, изоморфной $\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{sp}(\mathfrak{a}, \omega)$ (на самом деле полупрямая сумма алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{sp}(\mathfrak{a}, \omega)$ изоморфна прямой сумме, но для дальнейших рассуждений это не важно). Значит, алгебра $U(\mathfrak{g}) \otimes W(\mathfrak{a})_+$ изоморфна факторалгебре алгебры $U(\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{sp}(\mathfrak{a}, \omega))$ по идеалу $J = U(\mathfrak{g})J_1$.

Рассмотрим $(G \ltimes Sp(\mathfrak{a}, \omega))$ -инвариантный пуассонов идеал $I_1 = \text{gr } J_1$ в пуассоновой алгебре $S(\mathfrak{sp}(\mathfrak{a}, \omega)) = \mathbb{R}[\mathfrak{sp}(\mathfrak{a}, \omega)^*]$. Имеют место следующие изоморфизмы градуированных алгебр:

$$S(\mathfrak{sp}(\mathfrak{a}, \omega))/I_1 = \text{gr } U(\mathfrak{sp}(\mathfrak{a}, \omega))/J_1 = \mathbb{R}[\mathfrak{a}^*]_+.$$

Отсюда вытекает, что алгебра $S(\mathfrak{sp}(\mathfrak{a}, \omega))/I_1$ не содержит делителей нуля, т. е. идеал $I_1 = \text{gr } J_1$ прост.

Подалгебра H -инвариантов в $\text{gr } U(\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{sp}(\mathfrak{a}, \omega))/J = \mathbb{R}[\mathfrak{h}^\circ \times \mathfrak{a}^*]_+$ коммутативна относительно скобки Пуассона. Полагая в лемме 4 $G_0 = G$, $G_1 = Sp(\mathfrak{a}, \omega)$, получаем, что алгебра $B_+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ коммутативна. По лемме 1 и сама алгебра $B(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ коммутативна. $\square$

§ 4. Доказательство основного результата

Предлагаемое рассуждение является модификацией доказательства коммутативности слабо коммутативных пространств гейзенбергова типа, изложенного в [1].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X = G/H$ — риманово однородное пространство. Тогда коммутативность пространства X равносильна его слабой коммутативности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть пространство X слабо коммутативно. Известно [1], что в этом случае $G = L \ltimes N$, где

- 1) N — не более чем 2-ступенно нильпотентная группа Ли;
- 2) L — редуктивная подгруппа Ли, содержащая H ;
- 3) $\mathbb{R}[\mathfrak{n}]^L = \mathbb{R}[\mathfrak{n}]^H$.

Пусть $\mathfrak{z}$ — коммутант алгебры Ли $\mathfrak{n}$ (содержащийся в ее центре) и $\mathfrak{v}$ — какое-либо L -инвариантное дополнительное подпространство. Для любой линейной функции $\alpha \in \mathfrak{z}^*$ обозначим через $\hat{\alpha}$ кососимметрическую билинейную функцию на $\mathfrak{v}$, определяемую по формуле

$$\hat{\alpha}(\xi, \eta) = \alpha([\xi, \eta]).$$

Пусть L_α и H_α — стабилизаторы функции α в группах L и H соответственно. Из условия 3) следует, что фактор группы L по ядру неэффективности действия $L : \mathfrak{n}^*$ компактен. Следовательно, группа L_α редуктивна. Подпространство $\text{Ker } \hat{\alpha} \subset \mathfrak{v}$, очевидно, L_α -инвариантно. Пусть $\mathfrak{v}_\alpha$ — какое-либо L_α -инвариантное дополнительное пространство. Естественное линейное представление группы L_α (и H_α) в симплектическом векторном пространстве $\mathfrak{v}_\alpha \simeq \mathfrak{v} / \text{Ker } \hat{\alpha}$ является симплектическим.

Для любой линейной функции $\alpha \in \mathfrak{z}^*$ имеется очевидный гомоморфизм

$$\varphi_\alpha : U(\mathfrak{n}) \rightarrow W_\alpha(\mathfrak{v}) = U(\mathfrak{n})/(\xi - \alpha(\xi) : \xi \in \mathfrak{z}),$$

образ которого представляет собой алгебру Вейля (возможно, вырожденную), определяемую формой $\hat{\alpha}$ на пространстве $\mathfrak{v}$.

Для любой линейной функции $\beta \in (\text{Ker } \hat{\alpha})^*$ имеется гомоморфизм

$$\psi_{\alpha, \beta}: W_{\alpha}(\mathfrak{v}) \rightarrow W_{\alpha, \beta}(\mathfrak{v}_{\alpha}) = W_{\alpha}(\mathfrak{v})/(\xi - \beta(\xi) : \xi \in \text{Ker } \hat{\alpha}),$$

образом которого является уже невырожденная алгебра Вейля.

Заметим, что имеется естественная L -эквивариантная биекция между множеством пар $(\alpha \in \mathfrak{z}^*, \beta \in (\text{Ker } \hat{\alpha})^*)$ и множеством N -орбит в $\mathfrak{n}^*$. А именно, пусть $p: \mathfrak{n}^* \rightarrow \mathfrak{z}^*$ — естественная проекция, двойственная вложению $\mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{n}$, а $p_{\alpha}: \mathfrak{n}^* \rightarrow (\text{Ker } \hat{\alpha})^*$ — естественная проекция, двойственная вложению $\text{Ker } \hat{\alpha} \rightarrow \mathfrak{n}$. Аффинное пространство $O_{\alpha, \beta} = p^{-1}(\alpha) \cap p_{\alpha}^{-1}(\beta)$, очевидно, N -инвариантно, причем скобка Пуассона–Ли на нем невырожденна. Так как симплектическими слоями пуассоновой структуры на $\mathfrak{n}^*$ являются N -орбиты в $\mathfrak{n}^*$, то пространство $O_{\alpha, \beta}$ содержит открытую N -орбиту. Но группа N унипотентна, а значит, все N -орбиты в $\mathfrak{n}^*$ замкнуты; следовательно, пространство $O_{\alpha, \beta}$ является N -орбитой. Таким образом, каждой паре $(\alpha \in \mathfrak{z}^*, \beta \in (\text{Ker } \hat{\alpha})^*)$ соответствует орбита. С другой стороны, если $O = Nx$ — орбита в $\mathfrak{n}^*$, то $O = O_{p(x), p_{p(x)}(x)}$; следовательно, построенное отображение $(\alpha, \beta) \mapsto O_{\alpha, \beta}$ биективно.

Из этой конструкции видно, что гомоморфизм пуассоновых алгебр

$$\text{gr}(\psi_{\alpha, \beta} \circ \varphi_{\alpha}): \mathbb{R}[\mathfrak{n}^*] = S(\mathfrak{n}) \rightarrow S(\mathfrak{v}_{\alpha}) = \text{gr } W_{\alpha, \beta}(\mathfrak{v}_{\alpha})$$

имеет очевидную геометрическую интерпретацию: это гомоморфизм ограничения на орбиту $O_{\alpha, \beta} \subset \mathfrak{n}^*$, являющуюся аффинным подпространством в $\mathfrak{n}^*$.

Пусть $H_{\alpha, \beta}$ и $L_{\alpha, \beta}$ — стабилизаторы орбиты $O_{\alpha, \beta}$ в H_{α} и L_{α} соответственно (или, что то же самое, стабилизаторы функционала β в H_{α} и L_{α}). Так как фактор группы L по ядру неэффективности действия $L: \mathfrak{n}^*$ компактен, то группа $L_{\alpha, \beta}$ редуктивна.

Мы докажем, что для пары (α, β) общего положения сужение гомоморфизма

$$\psi_{\alpha, \beta} \circ \varphi_{\alpha}: U(\mathfrak{n}) \rightarrow W_{\alpha, \beta}(\mathfrak{v}_{\alpha})$$

на $U(\mathfrak{n})^H$ продолжается до гомоморфизма

$$U(\mathfrak{g})^H/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H \rightarrow B(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta}, \mathfrak{h}_{\alpha, \beta}, \mathfrak{v}_{\alpha}).$$

Из условия 3) следует, что для точки $\gamma \in \mathfrak{n}^*$ общего положения

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{h} + \mathfrak{l}_{\gamma},$$

а значит, для пары (α, β) общего положения

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{h} + \mathfrak{l}_{\alpha} = \mathfrak{h} + \mathfrak{l}_{\alpha, \beta}.$$

Отсюда следует, что для любого класса $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{h}$ можно выбрать представитель в $U(\mathfrak{l}_{\alpha} \oplus \mathfrak{n})$. Этот представитель определяется с точностью до $U(\mathfrak{g})\mathfrak{h} \cap U(\mathfrak{l}_{\alpha} \oplus \mathfrak{n}) = U(\mathfrak{l}_{\alpha} \oplus \mathfrak{n})\mathfrak{h}_{\alpha}$. Значит, имеется изоморфизм фильтрованных векторных пространств

$$U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{h} \simeq U(\mathfrak{l}_{\alpha} \oplus \mathfrak{n})/U(\mathfrak{l}_{\alpha} \oplus \mathfrak{n})\mathfrak{h}_{\alpha}.$$

Очевидно, что этот изоморфизм H_{α} -эквивариантен. Таким образом, для точки $\alpha \in \mathfrak{z}^*$ общего положения имеется естественное вложение ассоциативных алгебр

$$\begin{aligned} i_{\alpha}: U(\mathfrak{g})^H/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H &= U(\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n})^H/(U(\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n})\mathfrak{h})^H \\ &\hookrightarrow U(\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n})^{H_{\alpha}}/(U(\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n})\mathfrak{h})^{H_{\alpha}} = U(\mathfrak{l}_{\alpha} \oplus \mathfrak{n})^{H_{\alpha}}/(U(\mathfrak{l}_{\alpha} \oplus \mathfrak{n})\mathfrak{h}_{\alpha})^{H_{\alpha}}. \end{aligned}$$

Гомоморфизм φ_α , очевидно, L_α -эквивариантен, а значит, он индуцирует гомоморфизм ассоциативных алгебр

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha: U(\mathfrak{l}_\alpha \ltimes \mathfrak{n})^{H_\alpha} / (U(\mathfrak{l}_\alpha \ltimes \mathfrak{n})\mathfrak{h}_\alpha)^{H_\alpha} &= (U(\mathfrak{l}_\alpha) \otimes U(\mathfrak{n}))^{H_\alpha} / (U(\mathfrak{l}_\alpha)\mathfrak{h}_\alpha \otimes U(\mathfrak{n}))^{H_\alpha} \\ &\rightarrow (U(\mathfrak{l}_\alpha) \otimes W_\alpha(\mathfrak{v}))^{H_\alpha} / (U(\mathfrak{l}_\alpha)\mathfrak{h}_\alpha \otimes W_\alpha(\mathfrak{v}))^{H_\alpha} = B(\mathfrak{l}_\alpha, \mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{v}).\end{aligned}$$

Аналогично, для пары (α, β) общего положения имеется $H_{\alpha, \beta}$ -эквивариантный изоморфизм фильтрованных векторных пространств

$$U(\mathfrak{l}_\alpha) / U(\mathfrak{l}_\alpha)\mathfrak{h}_\alpha \simeq U(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta}) / U(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta})\mathfrak{h}_{\alpha, \beta},$$

а значит, и

$$U(\mathfrak{l}_\alpha) \otimes W_\alpha(\mathfrak{v}) / U(\mathfrak{l}_\alpha)\mathfrak{h}_\alpha \otimes W_\alpha(\mathfrak{v}) \simeq U(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta}) \otimes W_\alpha(\mathfrak{v}) / U(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta})\mathfrak{h}_{\alpha, \beta} \otimes W_\alpha(\mathfrak{v}).$$

Таким образом, имеется естественное вложение ассоциативных алгебр

$$\begin{aligned}i_{\alpha, \beta}: B(\mathfrak{l}_\alpha, \mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{v}) &= (U(\mathfrak{l}_\alpha) \otimes W_\alpha(\mathfrak{v}))^{H_\alpha} / (U(\mathfrak{l}_\alpha)\mathfrak{h}_\alpha \otimes W_\alpha(\mathfrak{v}))^{H_\alpha} \\ &\hookrightarrow (U(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta}) \otimes W_\alpha(\mathfrak{v}))^{H_{\alpha, \beta}} / (U(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta})\mathfrak{h}_{\alpha, \beta} \otimes W_\alpha(\mathfrak{v}))^{H_{\alpha, \beta}}.\end{aligned}$$

Гомоморфизм $\psi_{\alpha, \beta}$, очевидно, $L_{\alpha, \beta}$ -эквивариантен, а значит, он индуцирует гомоморфизм ассоциативных алгебр

$$\begin{aligned}\Psi_{\alpha, \beta}: (U(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta}) \otimes W_\alpha(\mathfrak{v}))^{H_{\alpha, \beta}} / (U(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta})\mathfrak{h}_{\alpha, \beta} \otimes W_\alpha(\mathfrak{v}))^{H_{\alpha, \beta}} \\ \rightarrow (U(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta}) \otimes W_{\alpha, \beta}(\mathfrak{v}_\alpha))^{H_{\alpha, \beta}} / (U(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta})\mathfrak{h}_{\alpha, \beta} \otimes W_{\alpha, \beta}(\mathfrak{v}_\alpha))^{H_{\alpha, \beta}} = B(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta}, \mathfrak{h}_{\alpha, \beta}, \mathfrak{v}_\alpha).\end{aligned}$$

Рассмотрим гомоморфизм

$$\Psi_{\alpha, \beta} \circ i_{\alpha, \beta} \circ \Phi_\alpha \circ i_\alpha: U(\mathfrak{g})^H / (U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H \rightarrow B(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta}, \mathfrak{h}_{\alpha, \beta}, \mathfrak{v}_\alpha).$$

Гомоморфизм ассоциированных пуассоновых алгебр

$$\begin{aligned}\text{gr}(\Psi_{\alpha, \beta} \circ i_{\alpha, \beta} \circ \Phi_\alpha \circ i_\alpha): \mathbb{R}[\mathfrak{h}^\circ]^H &= S(\mathfrak{g})^H / (S(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H \\ \rightarrow (S(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta} / \mathfrak{h}_{\alpha, \beta}) \otimes S(\mathfrak{v}_\alpha))^{H_{\alpha, \beta}} &= \mathbb{R}[(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta} / \mathfrak{h}_{\alpha, \beta})^* \times O_{\alpha, \beta}]^{H_{\alpha, \beta}} = \mathbb{R}[(\mathfrak{l} / \mathfrak{h})^* \times O_{\alpha, \beta}]^{H_{\alpha, \beta}}\end{aligned}$$

является гомоморфизмом ограничения на замкнутое алгебраическое подмногообразие $(\mathfrak{l} / \mathfrak{h})^* \times O_{\alpha, \beta} \subset \mathfrak{h}^\circ$. Заметим, что $H_{\alpha, \beta}$ -орбиты в этом подмногообразии суть пересечения H -орбит в $\mathfrak{h}^\circ$ с подмногообразием $(\mathfrak{l} / \mathfrak{h})^* \times O_{\alpha, \beta} \subset \mathfrak{h}^\circ$. Это означает, что любой $H_{\alpha, \beta}$ -инвариантный полином на $(\mathfrak{l} / \mathfrak{h})^* \times O_{\alpha, \beta}$ является ограничением некоторого H -инвариантного полинома на $\mathfrak{h}^\circ$. Таким образом, гомоморфизм $\text{gr}(\Psi_{\alpha, \beta} \circ i_{\alpha, \beta} \circ \Phi_\alpha \circ i_\alpha)$ сюръективен, а значит, пуассонова алгебра $(S(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta} / \mathfrak{h}_{\alpha, \beta}) \otimes S(\mathfrak{v}_\alpha))^{H_{\alpha, \beta}} = \text{gr} B(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta}, \mathfrak{h}_{\alpha, \beta}, \mathfrak{v}_\alpha)$ коммутативна. По теореме 1 ассоциативная алгебра $B(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta}, \mathfrak{h}_{\alpha, \beta}, \mathfrak{v}_\alpha)$ коммутативна.

Алгебру $D(X)^G \simeq U(\mathfrak{g})^H / (U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H$ можно рассматривать как алгебру сечений расслоения над $\text{Spec } S(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}^*$, слой которого над точкой $\alpha \in \mathfrak{z}^*$ есть алгебра

$$\Phi_\alpha \circ i_\alpha(U(\mathfrak{g})^H / (U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H) = B(\mathfrak{l}_\alpha, \mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{v}).$$

Таким образом, достаточно доказать коммутативность алгебры $B(\mathfrak{l}_\alpha, \mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{v})$ для любой точки $\alpha \in \mathfrak{z}^*$ общего положения.

В свою очередь, если форма $\hat{\alpha}$ вырождена, алгебру $B(\mathfrak{l}_\alpha, \mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{v})$ можно рассматривать как алгебру сечений расслоения над

$$\text{Spec } S(\text{Ker } \hat{\alpha}) = (\text{Ker } \hat{\alpha})^*,$$

слой которого над точкой $\beta \in (\text{Ker } \hat{\alpha})^*$ есть алгебра

$$\Psi_{\alpha, \beta} \circ i_{\alpha, \beta}(B(\mathfrak{l}_{\alpha}, \mathfrak{h}_{\alpha}, \mathfrak{v})) = B(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta}, \mathfrak{h}_{\alpha, \beta}, \mathfrak{v}_{\alpha}).$$

Поэтому коммутативность алгебры $B(\mathfrak{l}_{\alpha}, \mathfrak{h}_{\alpha}, \mathfrak{v})$ следует из коммутативности алгебры $B(\mathfrak{l}_{\alpha, \beta}, \mathfrak{h}_{\alpha, \beta}, \mathfrak{v}_{\alpha})$ для любой точки $\beta \in (\text{Ker } \hat{\alpha})^*$ общего положения. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Винберг Э. Б. Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия. УМН, **56**, вып. 1, 3–62 (2001).
2. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. Мир, М., 1978.
3. Микитюк И. В. Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами. Матем. сб., **129**, 514–534 (1986).
4. Duflo M. Open problems in representation theory of Lie groups. In: Conference on Analysis on homogeneous spaces (T. Oshima, ed.), August 25–30, Kataka, Japan, 1986, pp. 1–5.
5. Guillemin V., Sternberg S. Multiplicity-free spaces. J. Diff. Geom., **19**, 31–56 (1984).
6. Knop F. Harish–Chandra homomorphism for reductive group actions. Ann. of Math. (2), Ser. **140**, No. 2, 253–288 (1994).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
e-mail: leo@rybnikov57.mccme.ru

Поступило в редакцию
29 мая 2002 г.