Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Седых, Разрешение особенностей коранга 1 фронта общего положения, *Функц. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 2, 52–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa148>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 16:28:34

УДК 515.16

Разрешение особенностей коранга 1 фронта общего положения*

© 2003. В. Д. СЕДЫХ

Фронт общего положения в гладком (класса C^∞) многообразии является особой гиперповерхностью, стратифицированной по классам особых точек. Специфика этих особенностей (фронт является образом лежандрова отображения) определяет различные топологические соотношения между стратами фронта. Подобные условия сосуществования особенностей рассматривались в [3, 5] и других работах. В настоящей статье описана конструкция, из которой следуют новые соотношения между многообразиями особенностей коранга 1 на общих волновых фронтах.

Эта конструкция представляет собой некоторое специальное разрешение особенностей фронта, имеющего лишь устойчивые особенности коранга 1. Конструкция универсальна в том смысле, что она не зависит ни от самого фронта, ни от объемлющего его пространства (в том числе от его размерности). В ее основе лежит преобразование, которое сопоставляет данному фронту новый фронт с устойчивыми особенностями коранга 1 в пространстве меньшей размерности. Это преобразование определяется классом лежандровых особенностей A_μ (с фиксированной кратностью μ) и называется A_μ -преобразованием.

Разрешение любой (приводимой) особенности $\mathcal{A}$ рассматриваемого фронта строится при помощи подходящей итерации A_μ -преобразований (соответствующих набору кратностей этой особенности). Такая итерация сопоставляет особенности $\mathcal{A}$ гладкое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ (пространство, в котором лежит новый фронт, полученный в результате последнего A_μ -преобразования) и гладкое собственное отображение этого многообразия в пространство, объемлющее исходный фронт, такие, что:

образом отображения является замыкание многообразия особенностей $\mathcal{A}$ фронта в этом пространстве;

если особенность X примыкает к особенности $\mathcal{A}$, то это отображение является конечным накрытием над многообразием особенностей X рассматриваемого фронта.

Кратность этого накрытия не зависит от размерности объемлющего пространства, его топологии, а также топологии исходного фронта. Она называется индексом особенности X относительно особенности $\mathcal{A}$. Мы приводим рекуррентную формулу, которая позволяет быстро вычислять относительные индексы устойчивых лежандровых (мульти)особенностей коранга 1.

Зная эти индексы, можно (в случае компактного фронта) выразить эйлерову характеристику любого многообразия вида $\Phi_{\mathcal{A}}$ через эйлеровы характеристики

*Работа частично поддержана РФФИ (грант 02-01-00655) и INTAS (грант 00 0259).

многообразий особенностей исходного фронта. Упомянутые выше условия сосуществования особенностей фронтов следуют из того, что эйлерова характеристика гладкого замкнутого нечетномерного многообразия равна нулю. В окончательном виде эти условия формулируются следующим образом: если компактный фронт имеет только устойчивые особенности коранга 1, то эйлерова характеристика каждого нечетномерного многообразия его особенностей является универсальной линейной комбинацией эйлеровых характеристик четномерных многообразий особенностей больших коразмерностей; коэффициенты этой комбинации не зависят от того, какой фронт и в каком пространстве мы рассматриваем.

§1. Основной результат

Пусть V — гладкое n -мерное многообразие. Пространство проективизации его кокасательного расслоения PT^*V образовано *контактными элементами* (π, x) , где $x \in V$, а $\pi \subset T_x V$ — касательная гиперплоскость в точке x . Это пространство является гладким $(2n - 1)$ -мерным многообразием и обладает естественной контактной структурой (см. [2]). Проекция $\varrho: PT^*V \rightarrow V$ является лежандровым расслоением относительно этой структуры.

Рассмотрим гладкое $(n - 1)$ -мерное многообразие L и гладкое собственное отображение $f: L \rightarrow V$. Отображение f называется *лежандровым*, если существует гладкое лежандрово вложение $l: L \rightarrow PT^*V$, такое, что $f = \varrho \circ l$. Образ $f(L)$ лежандрова отображения f называется *фронтом*.

Мы будем рассматривать лишь *устойчивые* лежандровы отображения [2]. Такие отображения образуют открытое подмножество (в C^∞ -топологии Уитни) в пространстве всех лежандровых отображений многообразия L в V . Более того, в пространстве лежандровых отображений коранга 1 (у которых размерность ядра 1-го дифференциала в каждой точке не превосходит 1) устойчивые отображения всюду плотны.

Если данная (особая) гиперповерхность $\mathcal{F} \subset V$ является фронтом устойчивого лежандрова отображения, то по ней образ исходного лежандрова вложения l восстанавливается однозначно. А именно, подмногообразие $l(L) \subset PT^*V$ является замыканием множества контактных элементов, касающихся фронта в его гладких точках.

Особенности фронтов устойчивых лежандровых отображений коранга 1 (а также соответствующие мультиособенности самих отображений) нумеруются элементами свободной абелевой полугруппы по сложению, образующими которой служат символы $A_1, A_2, \dots$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Фронт $\mathcal{F}$ имеет *особенность* A_μ в точке x , если его росток $(\mathcal{F}, x)$ в этой точке диффеоморфен ростку в нуле $(n - \mu)$ -мерного цилиндра в пространстве $\mathbb{R}^n = \{(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})\}$ над множеством многочленов вида

$$t^{\mu+1} + \lambda_{\mu-1}t^{\mu-1} + \dots + \lambda_1 t + \lambda_0,$$

имеющих кратный вещественный корень.

Число μ называется *кратностью* особенности A_μ . *Множество особенностей* A_μ фронта $\mathcal{F}$ (т. е. точек, в которых он имеет эту особенность) является гладким подмногообразием коразмерности μ в V (вообще говоря, незамкнутым).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Фронт $\mathcal{F}$ имеет *особенность* $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ в точке x , если росток $(\mathcal{F}, x)$ состоит из m неприводимых компонент, которые имеют (как

ростки фронтов) особенности $A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_m}$ в точке x , причем ростки многообразий этих особенностей на соответствующих компонентах пересекаются в точке x трансверсально.

Числа $\mu_1, \dots, \mu_m$ называются кратностями особенности $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$. Их сумма $\mu_1 + \dots + \mu_m$ называется *коразмерностью* этой особенности. Она не превышает размерности многообразия V . Множество $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ фронта $\mathcal{F}$ с данным (неупорядоченным) набором кратностей является гладким подмногообразием в V , коразмерность которого равна коразмерности особенности.

ЗАМЕЧАНИЕ. 1) Нуль $\emptyset$ указанной выше полугруппы мы будем использовать для обозначения дополнения к фронту $\mathcal{F}$ в объемлющем многообразии V .

2) Если все особенности данной (особой) гиперповерхности в многообразии V диффеоморфны особенностям вида $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$, то эта гиперповерхность является фронтом устойчивого лежандрова отображения коранга 1. А именно, она является образом сужения проекции ρ на замыкание подмножества в многообразии PT^*V , образованного контактными элементами на V , касающимися рассматриваемой гиперповерхности в ее гладких точках.

Пусть $\mathcal{F}$ — фронт устойчивого лежандрова отображения $f: L \rightarrow V$ коранга 1 в гладком n -мерном многообразии V .

ТЕОРЕМА 1. *Имеется универсальная конструкция, которая фронту $\mathcal{F}$ и всякой особенности $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$, такой, что многообразие $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей $\mathcal{A}$ фронта $\mathcal{F}$ непусто, сопоставляет гладкое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ и гладкое собственное отображение $\varphi_{\mathcal{A}}: \Phi_{\mathcal{A}} \rightarrow V$, обладающие следующими свойствами:*

- 1) *образом отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ является замыкание $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$ в V многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$;*
- 2) *если особенность $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_p}$ примыкает к особенности $\mathcal{A}$, т.е. многообразие $X_{\mathcal{F}}$ особенностей X фронта $\mathcal{F}$ принадлежит $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$, то отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ является конечным накрытием (т.е. гладким расслоением с конечным слоем) над многообразием $X_{\mathcal{F}}$; кратность этого накрытия не зависит от n , V , L и f .*

Подробное описание указанной конструкции приведено ниже. Мы будем называть ее *разрешением особенностей фронта $\mathcal{F}$* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ и отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$, получающиеся в результате разрешения особенности $\mathcal{A}$ фронта $\mathcal{F}$, называются *характеристическими* для этой особенности. Кратность отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ над многообразием $X_{\mathcal{F}}$ особенностей X фронта $\mathcal{F}$ называется *индексом* особенности X относительно особенности $\mathcal{A}$ и обозначается через $I_{\mathcal{A}}(X)$.

Характеристические многообразия и отображения особенностей фронта $\mathcal{F}$ строятся индуктивно. А именно, мы строим отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ в виде композиции гладких отображений

$$\Phi_{A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}} \xrightarrow{\psi_m} \dots \xrightarrow{\psi_3} \Phi_{A_{\mu_1} + A_{\mu_2}} \xrightarrow{\psi_2} \Phi_{A_{\mu_1}} \xrightarrow{\psi_1} V,$$

где $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m$. Каждое отображение ψ_i является, в свою очередь, композицией гладких отображений

$$\begin{aligned} \Phi_{A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_{i-1}} + A_{\mu_i}} &\xrightarrow{g_i^{\mu_i}} \dots \\ &\xrightarrow{g_i^3} \Phi_{A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_{i-1}} + A_2} \xrightarrow{g_i^2} \Phi_{A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_{i-1}} + A_1} \xrightarrow{f_i} \Phi_{A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_{i-1}}}, \quad (*) \end{aligned}$$

где f_i — устойчивое лежандрово отображение коранга 1, а g_i^j — вложение коразмерности 1 гладкого замыкания множества особенностей A_j отображения f_i .

В качестве $f_1: \Phi_{A_1} \rightarrow \Phi_\emptyset$ выступает исходное лежандрово отображение $f: L \rightarrow V$ (так что $\Phi_{A_1} = L$, $\Phi_\emptyset = V$, $\varphi_{A_1} = f$). Многообразие $\Phi_{A_{\mu_1}} \subseteq L$ — гладкое замыкание множества особенностей A_{μ_1} отображения f_1 . Основной шаг индукции состоит в конструкции лежандрова отображения $f_2: \Phi_{A_\mu + A_1} \rightarrow \Phi_{A_\mu}$, где $\mu = \mu_1$. Эта конструкция называется A_μ -преобразованием фронта $\mathcal{F}$ и определяется следующим образом.

Обозначим через Σ замыкание в многообразии $\Phi_{A_\mu} \subseteq L$ множества точек ξ , таких, что фронт $\mathcal{F}$ имеет в точке $f(\xi)$ особенность $A_\mu + A_1$. Если множество Σ непусто, то оно является (особой) гиперповерхностью в Φ_{A_μ} .

ТЕОРЕМА 2. *Гиперповерхность Σ является фронтом устойчивого лежандрова отображения коранга 1.*

Это отображение мы и берем в качестве искомого лежандрова отображения f_2 . Многообразие $\Phi_{A_\mu + A_1} \subset PT^*\Phi_{A_\mu}$ является замыканием множества контактных элементов, касающихся фронта Σ в его гладких точках. Лежандрово отображение f_{i+1} , $i > 1$, строится при помощи аналогичной конструкции, примененной к f_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Фронт $\Sigma \subset \Phi_{A_\mu}$ называется A_μ -преобразованием фронта $\mathcal{F}$ и обозначается через $[A_\mu](\mathcal{F})$.

Разрешение особенностей фронта $\mathcal{F}$, описанное выше, очевидно, обладает свойством 1), сформулированным в теореме 1. При этом характеристические отображения особенностей можно представлять себе цепями дерева, естественно связанного с указанным разрешением.

А именно, рассмотрим ориентированный граф $A(\mathcal{F})$, вершины которого соответствуют многообразиям V и $\Phi_{\mathcal{A}}$ (для всех особенностей $\mathcal{A}$ фронта $\mathcal{F}$, таких, что $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ непусто), а ориентированные ребра отвечают лежандровым отображениям и вложениям коразмерности 1 из диаграмм вида (*). Легко видеть, что этот граф является деревом (с корнем V).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дерево $A(\mathcal{F})$ называется A -башней фронта $\mathcal{F}$.

Башня $A(\mathcal{F})$ изображена на рис. 1. Многоточия обозначают поддеревья в $A(\mathcal{F})$, порожденные вершинами $\Phi_{\mathcal{A}}$, соответствующими особенностям $\mathcal{A}$, коразмерность которых больше 6. Горизонтальные ребра отвечают лежандровым отображениям, а вертикальные — вложениям. Из каждой вершины $\Phi_{\mathcal{A}}$ выходит ровно одно ребро, а входит не более двух. Если в вершину $\Phi_{\mathcal{A}}$ входят два ребра, то либо $\mathcal{A} = A_\mu$, либо $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} + A_\mu$, где все кратности особенности $\tilde{\mathcal{A}}$ строго больше μ .

Разрешение особенностей фронта $\mathcal{F}$ обладает также и свойством 2), указанным в теореме 1. Это следует из свойств A_μ -преобразования. Некоторые из них формулируются в терминах краевых особенностей серии B (см. [1]).

Рис. 1

Пусть H — гладкая гиперповерхность в многообразии V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Упорядоченная пара $(H, \mathcal{F})$ имеет *особенность* B_κ в точке $x \in H$, если росток $((H, \mathcal{F}), x)$ этой пары диффеоморфен ростку в $0 \in \mathbb{R}^n = \{(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})\}$ пары, образованной гиперплоскостью $\lambda_0 = 0$ и $(n - \kappa)$ -мерным цилиндром над множеством многочленов вида

$$t^\kappa + \lambda_{\kappa-1}t^{\kappa-1} + \dots + \lambda_1t + \lambda_0,$$

имеющих кратный вещественный корень (при $\kappa = 1$ вторая компонента ростка пары равна $\emptyset$).

Множество особенностей B_κ пары $(H, \mathcal{F})$ является гладким подмногообразием коразмерности κ в объемлющем многообразии V . При $\kappa > 1$ это подмногообразие является гладкой гиперповерхностью в многообразии особенностей $A_{\kappa-1}$ фронта $\mathcal{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пара $(H, \mathcal{F})$ имеет *особенность* $(B_\kappa, A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_p})$ в точке $x \in H$, если

- 1) росток $(\mathcal{F}, x)$ состоит из $p + 1$ неприводимых компонент $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$, имеющих в точке x особенности $A_{\kappa-1}, A_{\nu_1}, \dots, A_{\nu_p}$ соответственно (при $\kappa = 1$ компонента $\mathcal{F}_0$ равна $\emptyset$); при этом пара $(H, \mathcal{F}_0)$ имеет в точке x особенность B_κ ;
- 2) многообразия особенностей $B_\kappa, A_{\nu_1}, \dots, A_{\nu_p}$ соответствующих ростков пересекаются в точке x трансверсально.

Особенности $(B_\kappa, A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_p})$ пары $(H, \mathcal{F})$ образуют гладкое подмногообразие коразмерности $\kappa + \nu_1 + \dots + \nu_p$ в многообразии V .

Рассмотрим характеристическое многообразие Φ_{A_μ} особенности A_μ фронта $\mathcal{F}$. В этом многообразии выделены гладкая гиперповерхность $\Phi_{A_{\mu+1}}$ и фронт $[A_\mu](\mathcal{F})$, являющийся A_μ -преобразованием исходного фронта.

ТЕОРЕМА 3. *Характеристическое отображение φ_{A_μ} особенности A_μ фронта $\mathcal{F}$ обладает следующими свойствами: для любого $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_p}$*

- 1) *образ многообразия особенностей X фронта $[A_\mu](\mathcal{F})$ при отображении φ_{A_μ} является объединением многообразий особенностей $X + A_\mu$, $X + A_{\mu+1}$ и $X - A_{\nu_i} + A_{\nu_i+\mu+1}$, $i = 1, \dots, p$, фронта $\mathcal{F}$;*

- 2) *над многообразием особенностей X фронта $\mathcal{F}$ отображение φ_{A_μ} является конечным накрытием; листы этого накрытия нумеруются индексами i , такими, что $\nu_i \geq \mu$;*

- 3) *полный прообраз многообразия особенностей X фронта $\mathcal{F}$ при отображении φ_{A_μ} равен $\Phi_{A_\mu} \setminus (\Phi_{A_{\mu+1}} \cup [A_\mu](\mathcal{F}))$, если $X = A_\mu$, и совпадает с многообразием особенностей B_κ пары $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](\mathcal{F}))$, если $X = A_{\mu+\kappa}$, $\kappa \geq 1$; в случае $p > 1$ он состоит из многообразий особенностей фронта $[A_\mu](\mathcal{F})$, имеющих вид $X - A_\mu$ (если $\{\nu_1, \dots, \nu_p\} \ni \mu$), и многообразий особенностей пары $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](\mathcal{F}))$, имеющих вид $(B_{\nu_i-\mu}, X - A_{\nu_i})$ для всех i , таких, что $\nu_i > \mu$.*

Рис. 2

ПРИМЕР. На рис. 2 изображены гиперповерхности Φ_{A_2} и $[A_1](\mathcal{F})$ для трехмерного фронта $\mathcal{F}$ с особенностью A_4 . Гиперповерхность Φ_{A_2} представлена горизонтальной плоскостью, а $[A_1](\mathcal{F})$ — поверхностью с ребром возврата. На ри-

сунке указана C^∞ -стратификация объединения $\Phi_{A_2} \cup [A_1](\mathcal{F})$ по классам особенностей, которые имеет фронт $\mathcal{F}$ в образах соответствующих точек при отображении φ_{A_1} . В точке, являющейся нульмерным стратом этой стратификации (соответствующей особенности A_4), пара $(\Phi_{A_2}, [A_1](\mathcal{F}))$ имеет особенность B_3 .

Из теоремы 3 очевидным образом следует, что разрешение особенностей фронта $\mathcal{F}$ обладает свойством 2) из теоремы 1. Кроме того, теорема 3 дает способ вычисления относительных индексов устойчивых лежандровых особенностей коранга 1.

ТЕОРЕМА 4. *Индекс $I_{\mathcal{A}}(X)$ особенности $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_p}$ относительно особенности $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ вычисляется рекуррентно, исходя из следующих условий:*

- 1) *если $\mu^* = \max\{\mu_1, \dots, \mu_m\} > \nu^* = \max\{\nu_1, \dots, \nu_p\}$, то $I_{\mathcal{A}}(X) = 0$;*
- 2) *если $\mu^* \leq \nu^*$, то*

$$I_{\mathcal{A}}(X) = \sum_{\nu_i = \mu^*, \mu^* + 1} I_{\mathcal{A} - A_{\mu^*}}(X - A_{\nu_i}) + \sum_{\nu_i > \mu^* + 1} I_{\mathcal{A} - A_{\mu^*}}(X - A_{\nu_i} + A_{\nu_i - \mu^* - 1}),$$

где $I_{\emptyset}(Y) = 1$ для любого Y .

Теоремы 2 и 3 следуют из классификаций особенностей гиперповерхности $[A_\mu](\mathcal{F})$ и особенностей пары $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](\mathcal{F}))$ относительно диффеоморфизмов объемлющего многообразия Φ_{A_μ} . Эти классификации приведены в §3.

ЗАМЕЧАНИЕ. 1) Для разрешения особенности $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ фронта $\mathcal{F}$ последовательность A_{μ_i} -преобразований можно производить в произвольном порядке. При этом получаются диффеоморфные многообразия. Между ними имеется гораздо большее количество отображений, образующих огромную коммутативную диаграмму, в которой A -башня является лишь малой частью. Однако для приложений вполне достаточно этой «малой части».

2) Разрешение особенностей фронта $\mathcal{F}$, описанное выше, тесно связано с давно известной конструкцией, называемой принципом итерации. Эта конструкция использовалась в комплексных задачах при исследовании циклов кратных точек общих голоморфных отображений коранга 1 (см. [9, 10, 12–14]). Однако, в отличие от принципа итерации, мы рассматриваем C^∞ -гладкие лежандровы отображения и изучаем циклы произвольных устойчивых мультиособенностей коранга 1. При этом индуктивное построение характеристических многообразий $\Phi_{\mathcal{A}}$ позволяет получить более глубокие результаты о топологии особенностей фронта.

§2. Приложение

Пусть $\mathcal{F}$ — фронт устойчивого лежандрова отображения коранга 1 в гладком n -мерном многообразии V . Рассмотрим многообразие $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ фронта $\mathcal{F}$ и его замыкание $\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{F}}$ в объемлющем многообразии V . Если множество $\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{F}}$ компактно, то его разбиение на связные компоненты многообразий особенностей $A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_p}$ является минимальной конечной C^∞ -стратификацией Уитни (см. [6]). Следовательно, корректно определена (топологическая) эйлерова характеристика многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$, которую мы будем обозначать через $\chi(\mathcal{A})$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если множество $\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{F}}$ компактно, то эйлерова характеристика $\chi(\Phi_{\mathcal{A}})$ характеристического многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ особенности $\mathcal{A}$ вычисляется через эйлеровы характеристики $\chi(X)$ многообразий $X_{\mathcal{F}}$ особенностей X*

фронта $\mathcal{F}$, входящих в $\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{F}}$, по формуле

$$(-1)^{\text{codim } \mathcal{A}} \chi(\Phi_{\mathcal{A}}) = \sum_X (-1)^{\text{codim } X} I_{\mathcal{A}}(X) \chi(X).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Предположим, что многообразие $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей $\mathcal{A}$ фронта $\mathcal{F}$ имеет нечетную размерность, множество $\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{F}}$ компактно и $\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{F}} = \bigcup_{i=1}^{\alpha} (\mathcal{A}_i)_{\mathcal{F}}$ — его разбиение на попарно не пересекающиеся многообразия $(\mathcal{A}_i)_{\mathcal{F}}$ особенностей $\mathcal{A}_i$ фронта $\mathcal{F}$. Тогда эйлеровы характеристики этих многообразий связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^{\alpha} (-1)^{\text{codim } \mathcal{A}_i} I_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_i) \chi(\mathcal{A}_i) = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Если фронт $\mathcal{F}$ компактен, то

1) эйлерова характеристика $\chi(A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m})$ любого нечетномерного многообразия его особенностей $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_m}$ является универсальной линейной комбинацией эйлеровых характеристик четномерных многообразий особенностей, коразмерность которых больше $\mu_1 + \dots + \mu_m$. Коэффициенты этой комбинации не зависят от n , V и $\mathcal{F}$. Список соответствующих формул для особенностей коразмерности $s \leq 5$ приведен в табл. 1 для нечетного n (многооточие обозначает линейную комбинацию эйлеровых характеристик многообразий особенностей нечетных коразмерностей, начиная с 7-й) и в табл. 2 для четного n (многооточие обозначает линейную комбинацию эйлеровых характеристик многообразий особенностей четных коразмерностей, начиная с 8-й);

2) эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{F})$ фронта $\mathcal{F}$ является универсальной линейной комбинацией эйлеровых характеристик четномерных многообразий его особенностей. Коэффициенты этой комбинации не зависят от n , V и $\mathcal{F}$. А именно, при нечетном n

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{F}) = & \chi(A_1) - \frac{1}{2}[\chi(A_3) + 2\chi(A_2 + A_1) + 4\chi(3A_1)] \\ & + \frac{1}{2}[5\chi(A_5) + 7\chi(A_4 + A_1) + 5\chi(A_3 + A_2) + 10\chi(A_3 + 2A_1) \\ & + 8\chi(2A_2 + A_1) + 16\chi(A_2 + 3A_1) + 32\chi(5A_1)] + \dots \end{aligned}$$

(многооточие обозначает то же самое, что в табл. 1); при четном n

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{F}) = & -\chi(2A_1) + \chi(A_4) + \chi(A_3 + A_1) + \chi(2A_2) + 2\chi(A_2 + 2A_1) + 5\chi(4A_1) \\ & - 4\chi(A_6) - 7\chi(A_5 + A_1) - 5\chi(A_4 + A_2) - 11\chi(A_4 + 2A_1) - 5\chi(2A_3) \\ & - 8\chi(A_3 + A_2 + A_1) - 17\chi(A_3 + 3A_1) - 6\chi(3A_2) \\ & - 13\chi(2A_2 + 2A_1) - 28\chi(A_2 + 4A_1) - 61\chi(6A_1) + \dots \end{aligned}$$

(многооточие обозначает то же самое, что в табл. 2).

ЗАМЕЧАНИЕ. 1) Следствие 1 позволяет переписать первую из формул утверждения 2) следствия 3 в виде

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{F}) = & \chi(L) + \frac{1}{2}[\chi(A_3) + 2\chi(3A_1)] \\ & - \frac{1}{2}[\chi(A_5) + 3\chi(A_4 + A_1) + \chi(A_3 + A_2) + 4\chi(A_3 + 2A_1) \\ & + 2\chi(2A_2 + A_1) + 6\chi(A_2 + 3A_1) + 18\chi(5A_1)] + \dots, \end{aligned}$$

где многоточие обозначает линейную комбинацию эйлеровых характеристик многообразий особенностей нечетных коразмерностей, начиная с 7-й, а $\chi(L)$ — эйлерова характеристика многообразия L , фронтом которого является $\mathcal{F}$. При $n = 3$ эта формула дает равенство, полученное в [11].

Таблица 1

$c = 2$	$2\chi(2A_1) = 6\chi(3A_1) + 2\chi(A_2 + A_1) + \chi(A_3)$ $-40\chi(5A_1) - 18\chi(A_2 + 3A_1) - 8\chi(2A_2 + A_1) - 11\chi(A_3 + 2A_1)$ $-5\chi(A_3 + A_2) - 7\chi(A_4 + A_1) - 4\chi(A_5) + \dots$
	$2\chi(A_2) = 2\chi(A_2 + A_1) + 2\chi(A_3) - 4\chi(A_2 + 3A_1) - 4\chi(2A_2 + A_1)$ $-4\chi(A_3 + 2A_1) - 3\chi(A_3 + A_2) - 4\chi(A_4 + A_1) - 4\chi(A_5) + \dots$
$c = 4$	$2\chi(4A_1) = 10\chi(5A_1) + 2\chi(A_2 + 3A_1) + \chi(A_3 + 2A_1) + \dots$
	$2\chi(A_2 + 2A_1) = 6\chi(A_2 + 3A_1) + 4\chi(2A_2 + A_1)$ $+ 2\chi(A_3 + 2A_1) + \chi(A_3 + A_2) + 2\chi(A_4 + A_1) + \dots$
	$2\chi(2A_2) = 2\chi(2A_2 + A_1) + 2\chi(A_3 + A_2) + \chi(A_5) + \dots$
	$\chi(A_3 + A_1) = 2\chi(A_3 + 2A_1) + \chi(A_3 + A_2) + \chi(A_4 + A_1) + \chi(A_5) + \dots$
	$\chi(A_4) = \chi(A_4 + A_1) + \chi(A_5) + \dots$

Таблица 2

$c = 1$	$2\chi(A_1) = 4\chi(2A_1) + 2\chi(A_2) - 16\chi(4A_1) - 8\chi(A_2 + 2A_1) - 4\chi(2A_2)$ $- 5\chi(A_3 + A_1) - 4\chi(A_4) + 192\chi(6A_1) + 96\chi(A_2 + 4A_1)$ $+ 48\chi(2A_2 + 2A_1) + 24\chi(3A_2) + 62\chi(A_3 + 3A_1)$ $+ 31\chi(A_3 + A_2 + A_1) + 20\chi(2A_3) + 42\chi(A_4 + 2A_1)$ $+ 21\chi(A_4 + A_2) + 28\chi(A_5 + A_1) + 18\chi(A_6) + \dots$
$c = 3$	$2\chi(3A_1) = 8\chi(4A_1) + 2\chi(A_2 + 2A_1) + \chi(A_3 + A_1)$ $- 80\chi(6A_1) - 32\chi(A_2 + 4A_1) - 12\chi(2A_2 + 2A_1) - 4\chi(3A_2)$ $- 19\chi(A_3 + 3A_1) - 7\chi(A_3 + A_2 + A_1) - 4\chi(2A_3)$ $- 10\chi(A_4 + 2A_1) - 3\chi(A_4 + A_2) - 5\chi(A_5 + A_1) - 2\chi(A_6) + \dots$
	$2\chi(A_2 + A_1) = 4\chi(A_2 + 2A_1) + 4\chi(2A_2) + 2\chi(A_3 + A_1) + 2\chi(A_4)$ $- 16\chi(A_2 + 4A_1) - 16\chi(2A_2 + 2A_1) - 12\chi(3A_2) - 12\chi(A_3 + 3A_1)$ $- 11\chi(A_3 + A_2 + A_1) - 8\chi(2A_3) - 12\chi(A_4 + 2A_1)$ $- 10\chi(A_4 + A_2) - 10\chi(A_5 + A_1) - 8\chi(A_6) + \dots$
	$\chi(A_3) = \chi(A_3 + A_1) + \chi(A_4) - 2\chi(A_3 + 3A_1) - \chi(A_3 + A_2 + A_1)$ $- \chi(2A_3) - 2\chi(A_4 + 2A_1) - \chi(A_4 + A_2) - 2\chi(A_5 + A_1) - 2\chi(A_6) + \dots$
$c = 5$	$2\chi(5A_1) = 12\chi(6A_1) + 2\chi(A_2 + 4A_1) + \chi(A_3 + 3A_1) + \dots$
	$2\chi(A_2 + 3A_1) = 8\chi(A_2 + 4A_1) + 4\chi(2A_2 + 2A_1) + 2\chi(A_3 + 3A_1)$ $+ \chi(A_3 + A_2 + A_1) + 2\chi(A_4 + 2A_1) + \dots$
	$2\chi(2A_2 + A_1) = 4\chi(2A_2 + 2A_1) + 6\chi(3A_2) + 2\chi(A_3 + A_2 + A_1)$ $+ 2\chi(A_4 + A_2) + \chi(A_5 + A_1) + \dots$
	$\chi(A_3 + 2A_1) = 3\chi(A_3 + 3A_1) + \chi(A_3 + A_2 + A_1)$ $+ \chi(2A_3) + \chi(A_4 + 2A_1) + \chi(A_5 + A_1) + \dots$
	$\chi(A_3 + A_2) = \chi(A_3 + A_2 + A_1) + 2\chi(2A_3) + \chi(A_4 + A_2) + \chi(A_6) + \dots$
	$\chi(A_4 + A_1) = 2\chi(A_4 + 2A_1) + \chi(A_4 + A_2) + \chi(A_5 + A_1) + \chi(A_6) + \dots$ $\chi(A_5) = \chi(A_5 + A_1) + \chi(A_6) + \dots$

2) Конструкция, описанная в настоящей работе, позволяет получать и другие условия сосуществования особенностей волновых фронтов. Например, в [8] указаны соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей границы связной компоненты дополнения к фронту при условии, что эта граница компактна, является краем компоненты и имеет лишь устойчивые особенности коранга 1 с нечетными кратностями. Эти соотношения приводят к красивым следствиям в топологии множеств Максвелла семейств гладких функций и в геометрии гладких кривых в многомерных пространствах.

§3. Доказательство

Пусть $\mathcal{F}$ — фронт устойчивого лежандрова отображения $f: L \rightarrow V$ коранга 1 в гладком n -мерном многообразии V . Рассмотрим подмногообразие $\Phi_{A_\mu} \subseteq L$ и гиперповерхности $\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](\mathcal{F})$ в Φ_{A_μ} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\xi \in [A_\mu](\mathcal{F})$ и фронт $\mathcal{F}$ имеет в точке $f(\xi)$ особенность A_ν . Тогда $\nu \geq \mu + 2$ и

1) гиперповерхность $[A_\mu](\mathcal{F})$ имеет в точке ξ особенность $A_{\nu-\mu-1}$;

2) пара $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](\mathcal{F}))$ имеет в точке ξ особенность $B_{\nu-\mu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В подходящих локальных координатах на многообразиях L и V росток отображения f в точке ξ задается формулой

$$(f, \xi): (\mathbb{R}^{n-1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0), \quad (t, \bar{q}) \mapsto \left(-\frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q}), \bar{q}, S(t, \bar{q}) - t \frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q}) \right),$$

где

$$\bar{q} = (q_2, \dots, q_{n-1}), \quad S(t, \bar{q}) = t^{\nu+1} + q_{\nu-1} t^{\nu-1} + \dots + q_2 t^2$$

(см. [2]). Росток гиперповерхности $[A_1](\mathcal{F}) \subset L$ в этой точке является ростком в нуле замыкания множества

$$\left\{ (t, \bar{q}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \exists u \neq t : F(u, t, \bar{q}) = 0, \frac{\partial}{\partial u} F(u, t, \bar{q}) = 0 \right\},$$

где

$$F(u, t, \bar{q}) = S(u, \bar{q}) - S(t, \bar{q}) - (u - t) \frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q}).$$

Рассмотрим функцию F . Фактически она представляет собой многочлен от переменных $u, t, q_2, \dots, q_{\nu-1}$. Поскольку $F|_{u=t} = \frac{\partial F}{\partial u}|_{u=t} = 0$, то

$$F(u, t, \bar{q}) = (u - t)^2 G(u, t, \bar{q}),$$

где функция $G(u, t, \bar{q})$ также является многочленом от $u, t, q_2, \dots, q_{\nu-1}$ (его степень по u равна $\nu - 1$). Отсюда следует, что в указанных координатах на многообразии L росток гиперповерхности $[A_1](\mathcal{F})$ является ростком в нуле множества точек, для которых G как многочлен от u имеет кратный вещественный корень.

Функция G вычисляется явно. Действительно,

$$\left. \frac{\partial^i G(u, t, \bar{q})}{\partial (u - t)^i} \right|_{u=t} = \frac{1}{(i+1)(i+2)} \cdot \left. \frac{\partial^{i+2} F(u, t, \bar{q})}{\partial u^{i+2}} \right|_{u=t} = \frac{1}{(i+1)(i+2)} \cdot \frac{\partial^{i+2} S(t, \bar{q})}{\partial t^{i+2}}$$

для любого целого неотрицательного i . Поэтому

$$G(u, t, \bar{q}) = \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{1}{(i+2)!} \cdot \frac{\partial^{i+2} S(t, \bar{q})}{\partial t^{i+2}} (u - t)^i$$

согласно формуле Тейлора.

Теперь заметим, что в координатах $t, \bar{q}$ росток любого многообразия Φ_{A_κ} , $\kappa = 2, \dots, \nu$, в точке ξ задается уравнениями

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 S}{\partial t^3} = \dots = \frac{\partial^\kappa S}{\partial t^\kappa} = 0.$$

Поэтому набор $(t, q_{\mu+1}, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-\mu}$ определяет локальные координаты на многообразии Φ_{A_μ} . В этих координатах росток гиперповерхности $[A_\mu](\mathcal{F}) \subset \Phi_{A_\mu}$ в точке ξ является ростком в нуле множества точек, для которых функция

$$G_\mu(u, t, q_{\mu+1}, \dots, q_{n-1}) = \sum_{i=\mu-1}^{\nu-1} \frac{1}{(i+2)!} \frac{\partial^{i+2} S(t, \bar{q})}{\partial t^{i+2}} (u-t)^{i-\mu+1}$$

как многочлен от u (или $u-t$) имеет кратный вещественный корень.

Рассмотрим функцию G_μ как семейство функций от $u-t$, зависящих от параметров $t, q_{\mu+1}, \dots, q_{n-1}$. Это семейство является, очевидно, версальной деформацией функции $(u-t)^{\nu-\mu}$ на полупрямой с краем $u-t=0$ (см. [1]). При этом росток в нуле множества значений параметров, для которых функции семейства равны 0 на крае, есть в точности росток гиперповерхности $\Phi_{A_{\mu+1}} \subset \Phi_{A_\mu}$.

Отсюда следует, что пара $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](\mathcal{F}))$ гиперповерхностей в многообразии Φ_{A_μ} имеет в точке ξ особенность $B_{\nu-\mu}$. В частности, гиперповерхность $[A_\mu](\mathcal{F})$ имеет в точке ξ особенность $A_{\nu-\mu-1}$, а $\nu \geq \mu+2$. Предложение 1 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формулы, определяющие росток гиперповерхности $[A_1](\mathcal{F})$, указаны также в работе [7] (в доказательстве предложения 4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\xi \in [A_\mu](\mathcal{F})$ и фронт $\mathcal{F}$ имеет в точке $f(\xi)$ особенность $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_p}$, $p > 1$. Предположим, что отображение f имеет в точке ξ особенность A_{ν_i} , $i \in \{1, \dots, p\}$. Тогда $\nu_i \geq \mu$ и

1) гиперповерхность $[A_\mu](\mathcal{F})$ имеет в точке ξ особенность $X - A_{\nu_i}$, если $\nu_i = \mu$ или $\mu+1$, и $X - A_{\nu_i} + A_{\nu_i-\mu-1}$, если $\nu_i > \mu+1$;

2) если $\nu_i > \mu$ (т. е. $\xi \in \Phi_{A_{\mu+1}}$), то пара $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](\mathcal{F}))$ имеет в точке ξ особенность $(B_{\nu_i-\mu}, X - A_{\nu_i})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $i = 1$, а коразмерность особенности X равна n .

Пусть $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$ — неприводимые компоненты ростка фронта $\mathcal{F}$ в точке $f(\xi)$, имеющие в этой точке особенности $A_{\nu_1}, \dots, A_{\nu_p}$ соответственно. Тогда в подходящих локальных координатах

$$(q_0^1, \dots, q_{\nu_1-1}^1, \dots, q_0^p, \dots, q_{\nu_p-1}^p) \in \mathbb{R}^{\nu_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{\nu_p}$$

на многообразии V каждая компонента $\mathcal{F}_j$, $j = 1, \dots, p$, является ростком в нуле $(n - \nu_j)$ -мерного цилиндра над подмножеством Δ_j в плоскости координат $q_0^j, \dots, q_{\nu_j-1}^j$, которое состоит из многочленов вида

$$F_j(t_j, q_0^j, \dots, q_{\nu_j-1}^j) = t_j^{\nu_j+1} + q_{\nu_j-1}^j t_j^{\nu_j-1} + \dots + q_1^j t_j + q_0^j,$$

имеющих кратный вещественный корень (см. [2, 4]). Образующие этого цилиндра коллинеарны координатной плоскости $q_0^j = \dots = q_{\nu_j-1}^j = 0$.

Возьмем набор

$$(t_1, q_2^1, \dots, q_{\nu_1-1}^1, q_0^2, \dots, q_{\nu_2-1}^2, \dots, q_0^p, \dots, q_{\nu_p-1}^p) \in \mathbb{R}^{\nu_1-1} \times \mathbb{R}^{\nu_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{\nu_p}$$

в качестве локальных координат на многообразии L в окрестности точки ξ . В этих координатах росток любого многообразия Φ_{A_κ} , $\kappa = 2, \dots, \nu_1$, в точке ξ представляет собой росток в нуле $(n - \nu_1)$ -мерного цилиндра над гладким $(\nu_1 - \kappa)$ -мерным подмногообразием в плоскости координат $t_1, q_2^1, \dots, q_{\nu_1-1}^1$, заданным уравнениями

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial t_1^2} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial t_1^3} = \dots = \frac{\partial^\kappa F_1}{\partial t_1^\kappa} = 0.$$

Очевидно, что набор

$$(t_1, q_{\mu+1}^1, \dots, q_{\nu_1-1}^1, q_0^2, \dots, q_{\nu_2-1}^2, \dots, q_0^p, \dots, q_{\nu_p-1}^p) \in \mathbb{R}^{\nu_1-\mu} \times \mathbb{R}^{\nu_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{\nu_p}$$

определяет локальные координаты на многообразии Φ_{A_μ} в окрестности точки ξ .

Зафиксируем эти координаты и рассмотрим росток гиперповерхности $[A_\mu](\mathcal{F}) \subset \Phi_{A_\mu}$ в точке ξ . Он имеет не менее $p - 1$ неприводимых компонент. А именно, для каждого $j = 2, \dots, p$ есть компонента $[A_\mu](\mathcal{F})_j$, которая в выбранных координатах на многообразии Φ_{A_μ} является ростком в нуле $(n - \nu_j - \mu)$ -мерного цилиндра над гиперповерхностью Δ_j в плоскости координат $q_0^j, \dots, q_{\nu_j-1}^j$. Кроме этих компонент росток гиперповерхности $[A_\mu](\mathcal{F})$ может иметь еще только одну неприводимую компоненту. Это $[A_\mu](\mathcal{F}_1)$.

Согласно предложению 1, компонента $[A_\mu](\mathcal{F}_1)$ имеется только при $\nu_1 > \mu + 1$. В указанных координатах (на многообразии Φ_{A_μ}) она является ростком в нуле $(n - \nu_1)$ -мерного цилиндра над гиперповерхностью в плоскости координат $t_1, q_{\mu+1}^1, \dots, q_{\nu_1-1}^1$, имеющей в нуле особенность $A_{\nu_1-\mu-1}$. Образующие этого цилиндра коллинеарны координатной плоскости $t_1 = q_{\mu+1}^1 = \dots = q_{\nu_1-1}^1 = 0$. Пара $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](\mathcal{F}_1))$ имеет в точке ξ особенность $B_{\nu_1-\mu}$.

Остается заметить, что координатные плоскости

$$\{t_1 = q_{\mu+1}^1 = \dots = q_{\nu_1-1}^1 = 0\}, \quad \{q_0^j = \dots = q_{\nu_j-1}^j = 0\}, \quad j = 2, \dots, p,$$

в пространстве

$$\mathbb{R}^{n-\mu} = \{(t_1, q_{\mu+1}^1, \dots, q_{\nu_1-1}^1, q_0^2, \dots, q_{\nu_2-1}^2, \dots, q_0^p, \dots, q_{\nu_p-1}^p)\}$$

пересекаются в нуле трансверсально. Предложение 2 доказано.

Теоремы 2 и 3 являются простыми следствиями предложений 1 и 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Во время обсуждения результатов настоящей работы В. И. Арнольд спросил, в частности, насколько полна найденная здесь система условий сосуществования особенностей волновых фронтов. Ответ на этот вопрос следующий.

Конечно, топология многообразий особенностей компактного фронта устойчивого лежандрова отображения коранга 1 ограничена также условиями типа неравенств, четности и т. п. Однако не существует других универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками этих многообразий, которые не были бы линейными комбинациями соотношений, определяемых следствием 2. Доказательство этого факта будет опубликовано позже.

Автор благодарен В. И. Арнольду и М. Э. Казаряну за многочисленные полезные обсуждения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k , C_k , F_4 и особенности эволют. УМН, **33**, вып. 5, 91–105 (1978).
2. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений, т. 1. Наука, М., 1982.
3. Васильев В. А. Лагранжевы и лежандровы характеристические классы. МЦНМО, М., 2000.
4. Закалюкин В. М. Особенности лагранжевых и лежандровых отображений. Дисс. к. ф.-м. н., МГУ, М., 1977.
5. Казарян М. Э. Характеристические классы лагранжевых и лежандровых особенностей. УМН, **50**, вып. 4, 45–70 (1995).
6. Мазер Дж. Стратификации и отображения. УМН, **27**, вып. 5, 85–118 (1972).
7. Седых В. Д. Строгая выпуклость выпуклого многообразия общего положения. Труды МИРАН, **209**, 200–219 (1995).
8. Седых В. Д. Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей коранга 1 фронта общего положения. Докл. РАН, **383**, №6, 735–739 (2002).
9. Colley S. J. Enumerating stationary multiple-points. Adv. in Math., **66**, No. 2, 149–170 (1987).
10. Goryunov V. Semi-simplicial resolutions and homology of images and discriminants of mappings. Proc. London Math. Soc., **70**, No. 3, 363–385 (1995).
11. Izumiya S., Marar W. L. The Euler characteristic of a generic wave front in a 3-manifold. Proc. Amer. Math. Soc., **118**, No. 4, 1347–1350 (1993).
12. Kleiman S. L. Multiple-point formulas I: Iteration. Acta Math., **147**, No. 1–2, 13–49 (1981).
13. Kleiman S. L., Lipman J., Ulrich B. The multiple-point schemes of a finite curvilinear map of codimension one. Ark. Mat., **34**, No. 2, 285–326 (1996).
14. Marar W. L., Mond D. Multiple-point schemes for corank 1 maps. J. London Math. Soc. (2), **39**, No. 3, 553–567 (1989).

Российский государственный университет
нефти и газа им. И. М. Губкина
e-mail: sedykh@ium.ips.ras.ru

Поступило в редакцию
19 февраля 2002 г.