Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Хованский, О монодромии многозначной функции на ее множестве ветвления, *Функц. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 2, 65–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa149>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 08:46:45

УДК 517.9

О монодромии многозначной функции на ее множестве ветвления*

© 2003. А. Г. ХОВАНСКИЙ

Многозначная аналитическая функция в $\mathbb{C}^n$ называется $\mathcal{S}$ -функцией, если множество ее особых точек покрывается счетным числом аналитических подмножеств (и занимает, следовательно, очень малую часть пространства $\mathbb{C}^n$). При отображении $\pi: (Y, y_0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, a)$ топологического пространства Y в $\mathbb{C}^n$ росток f_a $\mathcal{S}$ -функции f в точке a может индуцировать многозначную функцию на пространстве Y . Для этого нужно, чтобы росток f_a аналитически продолжался вдоль образа любой кривой из пространства Y , начинающейся в отмеченной точке y_0 . Такая ситуация возможна, даже если точка a лежит в множестве особых точек функции f (некоторые из ростков многозначной функции f могут оказаться неособыми в особых точках этой функции) и пространство Y отображается в это множество.

Можно ли оценить группы монодромии индуцированных таким способом многозначных функций через группу монодромии исходной $\mathcal{S}$ -функции f (верно ли, например, что если группа монодромии $\mathcal{S}$ -функции f разрешима, то разрешима и группа монодромии каждой функции, индуцированной $\mathcal{S}$ -функцией f)? В настоящей статье получен положительный ответ на этот вопрос (см. §4, 5).

Это совсем не очевидно, если множество особых точек функции f незамкнуто. Отметим, кстати, что $\mathcal{S}$ -функции с незамкнутыми множествами особых точек не являются чем-то необычным. Именно такими, как правило, бывают многозначные элементарные функции. Рассмотрим, например, функцию φ одной переменной, определенную формулой

$$\varphi(u) = \ln \sum_{j=1}^k \lambda_j \ln(u - a_j),$$

в которой a_j , $j = 1, \dots, k$, — различные комплексные числа. Если подгруппа Λ аддитивной группы комплексных чисел, порожденная коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, всюду плотна на комплексной прямой, то функция φ имеет всюду плотное множество особых точек и континуальную группу монодромии. Если число слагаемых k в формуле для функции φ больше двух, то группа Λ , как правило, будет всюду плотной в $\mathbb{C}$.

Описание связи группы монодромии исходной $\mathcal{S}$ -функции с группами монодромии индуцированных таким способом функций потребовало введения операции индуцированного замыкания групп (см. §2). В свою очередь, использование этой операции вынуждает пересмотреть определения различных классов пар групп

*Работа выполнена при частичной поддержке Канадского гранта OGP0156833.

(см. §5), встречающихся в одномерном топологическом варианте теории Галуа [1–3]. Настоящая статья — шаг к построению многомерного варианта этой теории [4, 5], развивающей топологический подход Абеля и Арнольда к проблемам неразрешимости (по поводу этого подхода см. [6–8]). В статье строятся определения, позволяющие работать с функциями многих переменных, имеющими всюду плотные множества особых точек и континуальные группы монодромии.

Пользуюсь случаем поблагодарить В. И. Арнольда, который был моим научным руководителем во время работы над диссертацией [2]. Я признателен моей жене Т. В. Белокриницкой за большую помощь при написании этой статьи.

§1. $\mathcal{S}$ -функции

В одномерном топологическом варианте теории Галуа центральную роль играют $\mathcal{S}$ -функции, т. е. многозначные аналитические функции одной переменной, множество особых точек которых не более чем счетно. Обобщим понятие класса $\mathcal{S}$ -функций на многомерный случай. Все утверждения этого параграфа несложны и доказываются точно так же, как их одномерные аналоги [2, 3]; поэтому мы не будем останавливаться на их доказательстве.

Подмножество A в связном k -мерном аналитическом многообразии $\mathbf{M}$ назовем *тощим*, если существует счетное множество открытых областей $U_i \subset \mathbf{M}$ и счетное множество собственных аналитических подмножеств $A_i \subset U_i$ в этих областях, таких, что $A \subseteq \bigcup A_i$. Многозначную аналитическую функцию на многообразии $\mathbf{M}$ назовем *$\mathcal{S}$ -функцией*, если множество ее особых точек является тощим. Уточним это определение.

Два регулярных ростка f_a и g_b , заданных в точках a и b многообразия $\mathbf{M}$, называются *эквивалентными*, если росток g_b получается из ростка f_a регулярным продолжением вдоль некоторой кривой. Каждый росток g_b , эквивалентный ростку f_a , называется также *ростком многозначной аналитической функции f* , порожденной ростком f_a . Точка $b \in \mathbf{M}$ называется *особой для ростка f_a* , если существует кривая $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{M}$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, такая, что росток f_a не может быть регулярно продолжен вдоль этой кривой, но для любого t , $0 \leq t < 1$, регулярно продолжается вдоль укороченной кривой $\gamma: [0, t] \rightarrow \mathbf{M}$. Легко видеть, что у эквивалентных ростков множества особых точек совпадают. Росток называется *$\mathcal{S}$ -ростком*, если множество его особых точек является тощим. Многозначная аналитическая функция называется *$\mathcal{S}$ -функцией*, если каждый ее росток является $\mathcal{S}$ -ростком.

Фиксируем произвольную риманову метрику ρ на многообразии $\mathbf{M}$.

ЛЕММА О СНЯТИИ КРИВОЙ С ТОЩЕГО МНОЖЕСТВА. Пусть A — тощее множество на многообразии $\mathbf{M}$, $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{M}$ — кривая и φ — непрерывная положительная функция на интервале $0 < t < 1$. Тогда существует кривая $\hat{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbf{M}$, такая, что $\hat{\gamma}(t) \notin A$ при $0 < t < 1$ и $\rho(\gamma(t), \hat{\gamma}(t)) < \varphi(t)$.

Кроме множества особых точек, удобно рассматривать и другие множества, вне которых функция неограниченно продолжается. Тощее множество A называется *запрещенным множеством* для регулярного ростка f_a , если росток f_a регулярно продолжается вдоль кривой $\gamma(t)$, $\gamma(0) = a$, пересекающей множество A лишь, может быть, в начальный момент.

ТЕОРЕМА О ЗАПРЕЩЕННОМ МНОЖЕСТВЕ. Тощее множество является запрещенным множеством ростка, если и только если оно содержит множество

его особых точек. В частности, росток обладает некоторым запрещенным множеством, если и только если он является ростком $\mathcal{S}$ -функции.

Группа монодромии $\mathcal{S}$ -функции f с запрещенным множеством A (или, короче, группа A -монодромии) — это группа всех перестановок листов функции f , которые происходят при обходе точек множества A . Остановимся на этом подробнее.

Пусть X — множество всех ростков $\mathcal{S}$ -функции f в точке a , не лежащей в множестве A . Возьмем замкнутую кривую γ в $\mathbf{M} \setminus A$ с началом в точке a . Продолжение каждого ростка из множества X вдоль кривой γ приводит к ростку из множества X . Итак, каждой замкнутой кривой γ соответствует отображение множества X в себя, причем гомотопным в $\mathbf{M} \setminus A$ кривым отвечают одинаковые отображения. Произведению кривых отвечает произведение отображений. Возникает гомоморфизм τ фундаментальной группы множества $\mathbf{M} \setminus A$ в группу $S(X)$ взаимно однозначных преобразований множества X . (Здесь и во всей статье мы имеем в виду следующую групповую структуру в группе $S(X)$: если f, g — взаимно однозначные преобразования множества X , то их произведением fg в группе $S(X)$ называется композиция $g \circ f$ отображений f и g .) Группой A -монодромии $\mathcal{S}$ -функции f называется образ фундаментальной группы $\pi_1(\mathbf{M} \setminus A, a)$ в группе $S(X)$ при гомоморфизме τ .

Группа A -монодромии — это не только абстрактная группа, но и группа транзитивных перестановок листов функции (транзитивность этой группы легко выводится из леммы о снятии кривой с тощего множества). Алгебраически такой объект задается парой групп: группой перестановок и ее подгруппой, являющейся стационарной подгруппой некоторого элемента.

Монодромной парой $\mathcal{S}$ -функции с запрещенным множеством A называется пара групп, состоящая из группы A -монодромии и стационарной подгруппы некоторого листа этой функции. Эта пара групп определена корректно, т.е. с точностью до изоморфизма не зависит ни от выбора точки a , ни от выбора листа функции. В случае, когда запрещенное множество A совпадает с множеством особых точек функции, упоминание о запрещенном множестве мы будем опускать и говорить о *группе монодромии* и *монодромной паре* этой функции. В случае, когда множество особых точек функции незамкнуто, группа A -монодромии может оказаться собственной подгруппой группы монодромии этой функции.

Группа $S(X)$ наделена топологией (см. §3).

Предложение. *Замыкание в группе $S(X)$ группы A -монодромии $\mathcal{S}$ -функции f не зависит от выбора запрещенного множества A и содержит группу монодромии функции f . При этом замыкание стационарной подгруппы фиксированного листа f_a относительно действия группы A -монодромии содержит стационарную подгруппу этого листа относительно действия группы монодромии.*

§2. Почти гомоморфизмы и индуцированные замыкания

Нам понадобится конструкция, сопоставляющая каждой группе преобразований множества X некоторую группу преобразований его подмножества L (см. §3). Для изучения ее свойств удобно воспользоваться понятиями почти гомоморфизма и индуцированного замыкания.

Пусть T — топологическое пространство и S — группа, лежащая в T .

Определение. Отображение $J: G \rightarrow T$ группы G в пространство T называется *почти гомоморфизмом около группы S* , если:

- 1) отображение J переводит единицу группы G в единицу группы S ;
- 2) для любой точки a группы S и всякой окрестности V в пространстве T точки a^{-1} существует такая окрестность U в пространстве T точки a , что для всякой точки $\tilde{a}$ группы G , для которой $J(\tilde{a}) \in U$, справедливо включение $J(\tilde{a}^{-1}) \in V$;
- 3) для любых точек a, b группы S и любой окрестности V в пространстве T точки ab существуют такие окрестности U_1 и U_2 в пространстве T точек a и b , что для любых точек $\tilde{a}, \tilde{b}$ группы G , для которых $J(\tilde{a}) \in U_1$ и $J(\tilde{b}) \in U_2$, справедливо включение $J(\tilde{a}\tilde{b}) \in V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Индукцированным замыканием $\overline{G}(S)$ группы G в группе S относительно почти гомоморфизма $J: G \rightarrow T$ около группы S называется пересечение группы S с замыканием $\overline{J}(G)$ в пространстве T образа группы G при отображении J .*

Опишем свойства индуцированного замыкания. Прежде всего, *индуцированное замыкание $\overline{G}(S)$ является подгруппой в группе S* . Далее, *ограничение $J: G_1 \rightarrow T$ почти гомоморфизма $J: G \rightarrow T$ группы G около группы S на подгруппу G_1 группы G , очевидно, является почти гомоморфизмом группы G_1 около группы S* . Поэтому индуцированное замыкание определено для всех подгрупп группы G одновременно.

Пусть $A_1, \dots, A_n$ — алфавит, содержащий n символов. Словом W в этом алфавите называется любое выражение вида $W = A_{i_1}^{k_1} \dots A_{i_N}^{k_N}$, где индексы $i_1, \dots, i_N$ принимают любые целые значения от 1 до n , а степени $k_1, \dots, k_N$ равны плюс или минус единице. Число $k = |k_1| + \dots + |k_N|$ называется длиной слова W . Для всякой группы Π и всякой последовательности $a_1, \dots, a_n$ ее точек определено значение $W(a_1, \dots, a_n)$ слова W , являющееся точкой $A_{i_1}^{k_1} \dots A_{i_n}^{k_n}$ группы Π .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $J: G \rightarrow T$ — почти гомоморфизм группы G около группы S . Тогда для всякого слова W , всякого набора точек $a_1, \dots, a_n$ группы S и всякой окрестности V в пространстве T точки $W(a_1, \dots, a_n) \in S$ существуют такие окрестности $U_1, \dots, U_n$ в пространстве T точек $a_1, \dots, a_n$, что для всяких точек $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$, для которых $J(\tilde{a}_1) \in U_1, \dots, J(\tilde{a}_n) \in U_n$, справедливо включение $J(W(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)) \in V$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по длине k слова W . Для единственного нетривиального слова $W = A_{i_1}^{-1}$ длины один утверждение справедливо по определению почти гомоморфизма. Каждое слово W длины $k > 1$ записывается либо в виде $A_{i_1} W_1$, либо в виде $A_{i_1}^{-1} W_1$, где W_1 — слово длины $k - 1$. В любом из этих двух случаев по определению почти гомоморфизма для каждой окрестности V точки $W(a_1, \dots, a_n)$ существуют окрестности V_1 и V_2 точек a_{i_1} и $W_1(a_1, \dots, a_n)$, такие, что если точки $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$ группы G удовлетворяют включениям $J(\tilde{a}_{i_1}) \in V_1$ и $J(W_1(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)) \in V_2$, то $J(W(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)) \in V$. По предположению индукции найдутся такие окрестности $U_1, \dots, U_n$ точек $a_1, \dots, a_n$, что если элементы $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$ удовлетворяют включениям $J(\tilde{a}_1) \in U_1, \dots, J(\tilde{a}_n) \in U_n$, то $J(W(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)) \in V_2$. Поэтому если точка $\tilde{a}_{i_1}$ удовлетворяет включению $J(\tilde{a}_{i_1}) \in U_{i_1} \cap V_1$, а точки $\tilde{a}_j$ при $j \neq i_1$ удовлетворяют включениям $J(\tilde{a}_j) \in U_j$, то $J(W(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)) \in V$. Утверждение доказано.

ТЕОРЕМА 1. Для всякого почти гомоморфизма $J: G \rightarrow T$ группы G около группы S и всякого нормального делителя G_1 группы G , для которого факторгруппа G/G_1 коммутативна, индуцированные замыкания $\overline{G}_1(S)$, $\overline{G}(S)$ групп G_1 , G в группе S относительно почти гомоморфизма J удовлетворяют следующим условиям: группа $\overline{G}_1(S)$ является нормальным делителем в группе $\overline{G}(S)$, а факторгруппа $\overline{G}(S)/\overline{G}_1(S)$ коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам надо доказать, что для каждой пары точек a, b группы $\overline{G}(S)$ точка $aba^{-1}b^{-1}$ принадлежит группе $\overline{G}_1(S)$, т.е. что в любой окрестности V точки $aba^{-1}b^{-1}$ существуют точки, принадлежащие образу $J(G_1)$ группы G_1 . Согласно утверждению, примененному к слову $W = A_1A_2A_1^{-1}A_2^{-1}$, существуют окрестности U_1 и U_2 точек a и b , такие, что для всякой пары точек $\tilde{a}, \tilde{b}$ группы G , для которых выполнены соотношения $J(\tilde{a}) \in U_1$, $J(\tilde{b}) \in U_2$, справедливо включение $J(\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}) \in V$. Точки a и b лежат в группе $\overline{G}(S)$; поэтому точки $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ группы G , для которых эти соотношения выполнены, действительно существуют. Для такой пары точек $\tilde{a}, \tilde{b}$ точка $\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1}$ лежит в группе G_1 , так как факторгруппа G/G_1 коммутативна. Итак, мы нашли точку, принадлежащую образу $J(G_1)$ группы G_1 , в заданной окрестности V точки $aba^{-1}b^{-1}$. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Для всякого почти гомоморфизма $J: G \rightarrow T$ группы G около группы S и всякой подгруппы G_1 группы G , имеющей конечный индекс k в группе G , индуцированные замыкания $\overline{G}_1(S)$, $\overline{G}(S)$ групп G_1 , G в группе S относительно почти гомоморфизма J удовлетворяют следующему условию: группа $\overline{G}_1(S)$ является подгруппой конечного индекса в группе $\overline{G}(S)$, причем этот индекс меньше или равен k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R_1, \dots, R_k$ — правые классы смежности группы G по подгруппе G_1 . Обозначим через P_i , $i = 1, \dots, k$, пересечение группы S с замыканием образа $J(R_i)$ класса R_i при отображении J . Мы покажем, что каждый правый класс смежности группы $\overline{G}(S)$ по группе $\overline{G}_1(S)$ совпадает с одним из множеств $P_1, \dots, P_k$. Отсюда немедленно вытекает теорема 2, так как это означает, что правых классов смежности не больше, чем k .

1) Покажем, что объединение множеств $P_1, \dots, P_k$ совпадает с группой $\overline{G}(S)$. Действительно, группа G является объединением правых классов смежности $R_1, \dots, R_k$; поэтому $J(G) = \bigcup_{i=1}^k J(R_i)$. Отсюда следует, что $\overline{J}(G) = \bigcup_{i=1}^k \overline{J}(R_i)$. Пересекая множества, фигурирующие в этом равенстве, с группой S , получим $\overline{G}(S) = \bigcup_{i=1}^k P_i$.

2) Пусть a — точка группы $\overline{G}(S)$ и $a\overline{G}_1(S)$ — правый класс смежности, содержащий эту точку. Согласно 1), точка a лежит в одном из множеств P_i . Покажем, что это множество P_i содержит весь класс $a\overline{G}_1(S)$. Действительно, каждая точка этого класса имеет вид $b = ac$, где $c \in \overline{G}_1(S)$. Все три точки a, b, c лежат в группе S . По определению почти гомоморфизма для каждой окрестности V точки b существуют окрестности U_1 и U_2 точек a и c , такие, что если $J(\tilde{a}) \in U_1$ и $J(\tilde{c}) \in U_2$, то $J(\tilde{a}\tilde{c}) \in V$. Точки $\tilde{a}$ и $\tilde{c}$, удовлетворяющие этим соотношениям, можно выбрать соответственно в классе R_i и группе G_1 , так как $a \in \overline{J}(R_i)$, $c \in \overline{G}_1(S)$. Для такого выбора точек $\tilde{a}$ и $\tilde{c}$ точка $\tilde{a}\tilde{c}$ лежит в классе R_i . Поэтому точка b лежит в множестве P_i , что и требовалось доказать.

3) Пусть множество P_i непусто и $a \in P_i$ — одна из его точек. Покажем, что множество P_i содержится в классе $a\overline{G}_1(S)$. Пусть b — любая точка в P_i . Рассмотрим элемент $c = a^{-1}b$. Покажем, что $c \in \overline{G}_1(S)$. Для этого нужно показать, что всякая окрестность V элемента c пересекается с образом $J(G_1)$ группы G_1 . Все три точки a, b, c лежат в группе S . По определению почти гомоморфизма для каждой окрестности V точки c существуют окрестности U_1 и U_2 точек a и b , такие, что если $J(\tilde{a}) \in U_1$ и $J(\tilde{b}) \in U_2$, то $J(\tilde{a}^{-1}\tilde{b}) \in V$. Точки $\tilde{a}, \tilde{b}$, удовлетворяющие этим соотношениям, можно выбрать в классе R_i , так как $a, b \in P_i$. Для такого выбора точек $\tilde{a}, \tilde{b}$ точка $\tilde{a}^{-1}\tilde{b}$ лежит в группе G_1 . Поэтому точка c лежит в группе $\overline{G}_1(S)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 доказана.

§3. Индуцированное замыкание группы преобразований множества в группе преобразований его подмножества

Опишем основной пример почти гомоморфизма J около группы.

а) *Топологическое пространство* $T = T(L, X)$. Пусть X — произвольное множество и $L \subseteq X$ — любое его подмножество. Рассмотрим пространство $T = T(L, X)$ отображений множества L в множество X , наделенное следующей топологией. Для каждого отображения $f: L \rightarrow X$ и каждого конечного множества $K \subset L$ обозначим через $U_K(f)$ множество отображений из L в X , совпадающих с отображением f на множестве K . По определению базис окрестностей элемента f в пространстве $T(L, X)$ образует совокупность множеств $\{U_K(f)\}$, где индекс K пробегает множество всех конечных подмножеств в L . Другими словами, только что определенную топологию в множестве $T(L, X)$ можно описать как топологию поточечной сходимости отображений из L в X в дискретной топологии множества X . Для бесконечных множеств X топология в $T(L, X)$ нетривиальна и полезна для дальнейшего.

б) *Группа* $S = S(L) \subset T(L, X)$. Группа $S(L)$, состоящая из всех взаимно однозначных преобразований множества L , естественным образом вложена в пространство $T(L, X)$: взаимно однозначное отображение $F: L \rightarrow L$ можно рассматривать и как отображение $f: L \rightarrow X$, так как $L \subset X$.

с) *Группа* G и *отображение* $J(G) \rightarrow T(L, X)$. В качестве группы G возьмем любую подгруппу группы $S(X)$ взаимно однозначных преобразований множества X . В качестве отображения $J: G \rightarrow T(L, X)$ рассмотрим отображение, сопоставляющее каждому отображению $f: X \rightarrow X$, принадлежащему группе G , его ограничение на множество L , т. е. $J(f) = f|_L$.

ТЕОРЕМА. В описанной выше в пп. а), б), с) ситуации отображение $J: G \rightarrow T(L, X)$ является почти гомоморфизмом около группы $S = S(L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Ограничение тождественного отображения множества X на подмножество L является тождественным отображением множества L . Поэтому J переводит единицу группы G в единицу группы $S(L)$.

2) Пусть $a \in S(L)$. Фиксируем произвольное конечное подмножество $K \subset L$ и рассмотрим окрестность $V = U_K(a^{-1})$ элемента a^{-1} в пространстве $T(L, X)$. Обозначим через K_1 образ множества K при отображении $a: L \rightarrow L$. Пусть $\tilde{a}$ — преобразование из $S(X)$ и $J(\tilde{a})$ — его ограничение на L , $J(\tilde{a}) = \tilde{a}|_L$. Рассмотрим окрестность $U_1 = U_{K_1}(a)$ элемента a . Если $J(\tilde{a}) \in U_1$, то $J(\tilde{a}^{-1})|_K = a|_K$.

3) Пусть $a, b \in S(L)$, и пусть $ab \in S(L)$ — их композиция $b \circ a$. Фиксируем произвольное конечное множество $K \subset L$ и рассмотрим окрестность $V = U_K(ab)$ элемента ab в пространстве $T(L, X)$. Обозначим через K_1 образ множества K при отображении $a: L \rightarrow L$. Пусть $\tilde{a}, \tilde{b}$ — преобразования из $S(X)$ и $J(\tilde{a}), J(\tilde{b})$ — их ограничения на множество L , $J(\tilde{a}) = \tilde{a}|_L$, $J(\tilde{b}) = \tilde{b}|_L$.

Рассмотрим окрестности $U_1 = U_K(a)$ и $U_2 = U_{K_1}(b)$ элементов a и b . Если $J(\tilde{a}) \in U_1$ и $J(\tilde{b}) \in U_2$, то $J(\tilde{a}\tilde{b}) \in V$. Действительно, если $\tilde{b}|_{K_1} = b|_{K_1}$ и $\tilde{a}|_K = a|_K$, то $\tilde{a}\tilde{b}|_K = ab|_K$.

§4. Группы монодромии индуцированных функций

С каждой однозначной аналитической функцией f можно связать ее струйное расширение $\mathcal{F}$, сопоставляющее каждой точке x росток функции f в этой точке. Аналогично можно говорить о струйном расширении $\mathcal{F}$ многозначной аналитической функции f : это многозначная функция, принимающая значения в множестве ростков функции f и сопоставляющая точке x все регулярные ростки функции f в этой точке.

Пусть f — многозначная $\mathcal{S}$ -функция на пространстве $\mathbb{C}^n$ и f_a — некоторый выделенный росток функции f в точке a . Непрерывное отображение $\pi: (Y, y_0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, a)$ линейно связного топологического пространства Y с отмеченной точкой y_0 в пространство $\mathbb{C}^n$, такое, что $\pi(y_0) = a$, называется *допустимым для роста* f_a , если росток f_a аналитически продолжается вдоль образа любой кривой из пространства Y , начинающейся в отмеченной точке y_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Типичный пример пространств Y , с которыми нам придется иметь дело, доставляют такие локально неодносвязные пространства, как дополнения комплексной прямой $\mathbb{C}$ до счетного всюду плотного множества $A \subset \mathbb{C}$, т.е. $Y = \mathbb{C} \setminus A$.

С допустимым для роста f_a отображением $\pi: (Y, y_0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, a)$ свяжем *многозначную функцию* $\pi^*\mathcal{F}$ на пространстве Y , принимающую значения в множестве ростков многозначной функции f в точках пространства $\mathbb{C}^n$. А именно, каждое значение многозначной функции $\pi^*\mathcal{F}$ в точке $y \in Y$ — это росток функции f в точке $\pi(y) \in \mathbb{C}^n$, получающийся аналитическим продолжением роста f_a вдоль некоторой кривой вида $\pi \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^n$, где $\gamma: [0, 1] \rightarrow Y$ — кривая в пространстве Y , начинающаяся в точке y_0 и заканчивающаяся в точке y , т.е. $\gamma(0) = y_0$, $\gamma(1) = y$. Для многозначной функции $\pi^*\mathcal{F}$ на пространстве Y определяется группа монодромии (которая вполне может оказаться континуальной) и монодромная пара роста f_a этой функции $\pi^*\mathcal{F}$ в точке y_0 точно так же, как это делалось для $\mathcal{S}$ -функций.

Обозначим через L_a совокупность всех ростков функции f в точке a , являющихся значениями многозначной функции $\pi^*\mathcal{F}$ в точке y_0 . Группа монодромии M функции $\pi^*\mathcal{F}$ является транзитивной группой взаимно однозначных преобразований множества L_a . Нам нужно связать пару M_0, M , в которой M_0 — стационарная подгруппа роста f_a в группе M , с монодромной парой $\mathcal{S}$ -функции f . Для этого нам понадобятся описываемые ниже отождествления.

Пусть O — множество особых точек функции f и $x \notin O$ — любая неособая точка в пространстве $\mathbb{C}^n$. Обозначим через X множество всех ростков функции f в точке x . Фиксируем кривую $\delta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^n$, соединяющую точки a и x , $\delta(0) = a$, $\delta(1) = x$, и пересекающую множество особенностей функции f лишь,

может быть, в начальный момент, т. е. $\delta(t) \notin O$ при $t > 0$. Существование такой кривой δ вытекает из леммы о снятии кривой с тощего множества. Каждый из ростков функции f , лежащих в множестве L_a , аналитически продолжается вдоль кривой δ . Действительно, ряд Тейлора каждого ростка из множества L_a сходится в точках $\delta(t)$ кривой δ при достаточно малых t , $0 \leq t \leq t_0$. При $t \geq t_0$ никаких препятствий к продолжению роста не возникает, так как по условию при $t > 0$ точки $\delta(t)$ не лежат в множестве O .

Отождествим каждый росток f_{ia} из множества L_a с ростком f_{ix} в точке x , полученным при продолжении роста f_{ia} вдоль кривой δ . При этом множество L_a отождествится с некоторым подмножеством L_x в множестве X , выделенный росток f_a отождествится с некоторым выделенным ростком $f_x \in X$, группа монодромии M функции $\pi^*\mathcal{F}$ отождествится с некоторой группой $M(x)$ транзитивных преобразований множества L_x , а стационарная подгруппа роста f_a в M отождествится со стационарной подгруппой $M_0(x)$ роста f_x в группе $M(x)$. Обозначим через G группу монодромии функции f , рассматриваемую как группа транзитивных взаимно однозначных преобразований множества X в себя. Через G_0 обозначим стационарную подгруппу роста f_x в группе G .

Группы G_0 , G мы рассматриваем как группы преобразований множества X , содержащего подмножество $L_x \subset X$.

ТЕОРЕМА. *Индукцированное замыкание $\overline{G}(S)$ группы монодромии G функции f в группе $S = S(L_x)$ взаимно однозначных преобразований множества L_x содержит группу монодромии $M(x)$ функции $\pi^*\mathcal{F}$. При этом стационарная подгруппа $M_0(x)$ равна пересечению группы $M(x)$ с индуцированным замыканием $\overline{G}_0(S)$ стационарной подгруппы G_0 роста f_x в группе G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если росток аналитической функции аналитически продолжается вдоль некоторой кривой $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^n$, то он аналитически продолжается вдоль всякой кривой $\tilde{\gamma}$ с теми же концами, $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$, $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$, достаточно близкой к кривой γ . При этом продолжения этого роста вдоль кривых γ и $\tilde{\gamma}$ приводят к одному и тому же результату. Доказательство теоремы основано на этом аналитическом факте. Ввиду принятых отождествлений каждое преобразование $m: L_x \rightarrow L_x$ из группы $M(x)$ получается одновременным аналитическим продолжением ростков из множества L_x вдоль некоторой кривой γ вида $\delta\gamma_1\delta^{-1}$, где δ^{-1} — кривая δ , проходящая в обратном направлении, а кривая γ_1 является образом при отображении π некоторой кривой $\gamma_2: [0, 1] \rightarrow Y$ в пространстве Y , начинающейся и заканчивающейся в точке y_0 . Концы кривой γ лежат в точке $x \in \mathbb{C}^n$, но она, вообще говоря, пересекает множество O особых точек функции f . Фиксируем любое конечное множество K ростков в L_x . Продеформируем немного кривую γ , оставляя закрепленными ее концы, таким образом, чтобы не изменить аналитические продолжения конечного множества K ростков вдоль кривой, и так, чтобы продеформированная кривая $\tilde{\gamma}$ не пересекала множество O . Это можно сделать, учитывая аналитический факт, приведенный в начале доказательства, и лемму о снятии кривой с тощего множества.

Вдоль кривой $\tilde{\gamma}$ можно аналитически продолжать все ростки из множества X , так как она не пересекает множество O . Соответствующее кривой $\tilde{\gamma}$ преобразование $g: X \rightarrow X$ принадлежит группе монодромии G функции f . Итак, мы для окрестности U_K преобразования $m: L_x \rightarrow L_x$, лежащего в группе $M(x)$, предъявили преобразование $g: X \rightarrow X$ из группы G , такое, что $m|_K = g|_K$. Поэтому $M(x) \subset \overline{G}(S)$.

Далее, подгруппа $M_0(x)$ состоит из преобразований группы $M(x)$, переводящих точку f_x в себя. Для конечных множеств $K \subset L_x$, содержащих точку f_x , всякое преобразование $g: X \rightarrow X$, совпадающее на множестве K с некоторым преобразованием $m: L \rightarrow L$, где $m \in M_0$, тоже переводит точку f_x в себя. Поэтому $M_0 = M \cap \bar{G}_0(S)$.

Теорема доказана.

§5. Классы пар групп

В одномерном топологическом варианте теории Галуа описывается, как изменяются монодромные пары функций одной переменной при суперпозициях, интегрированиях, дифференцированиях и т. д. Для этого используются некоторые понятия, связанные с парами групп. Для функций многих переменных в связи с теоремой из §4 эти понятия необходимо несколько модифицировать. Напомним определения и проведем нужную модификацию.

Парой групп мы всегда называем пару, состоящую из группы и некоторой ее подгруппы, при этом *группа отождествляется с парой групп, состоящей из этой группы и ее единичной подгруппы*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Совокупность $\mathcal{L}$ пар называется *почти полным классом пар групп*, если для каждой пары групп $[\Gamma, \Gamma_0] \in \mathcal{L}$, где $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, выполняются следующие условия:

- 1) для любого гомоморфизма $\tau: \Gamma \rightarrow G$, где G — некоторая группа, пара групп $[\tau\Gamma, \tau\Gamma_0]$ также содержится в $\mathcal{L}$,
- 2) для любого гомоморфизма $\tau: G \rightarrow \Gamma$, где G — некоторая группа, пара групп $[\tau^{-1}\Gamma, \tau^{-1}\Gamma_0]$ также содержится в $\mathcal{L}$,
- 3) для любой группы G , наделенной T_2 -топологией и содержащей группу Γ , $\Gamma \subseteq G$, пара групп $[\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}_0]$ также содержится в $\mathcal{L}$, где $\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}_0$ — замыкания групп Γ, Γ_0 в группе G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Почти полный класс пар групп $\mathcal{M}$ называется *полным*, если

- 1) для каждой пары групп $[\Gamma, \Gamma_0] \in \mathcal{M}$ и группы Γ_1 , такой, что $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma$, пара групп $[\Gamma, \Gamma_1]$ также содержится в $\mathcal{M}$,
- 2) для каждой пары групп $[\Gamma, \Gamma_1], [\Gamma_1, \Gamma_2] \in \mathcal{M}$, таких, что $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma$, пара групп $[\Gamma, \Gamma_2]$ также содержится в $\mathcal{M}$.

Минимальные почти полный и полный классы пар групп, содержащие фиксированное множество пар групп $\mathcal{B}$, будем обозначать соответственно через $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ и $\mathcal{M}(\mathcal{B})$. Пусть $\mathcal{K}$ — класс всех конечных групп, $\mathcal{A}$ — класс всех абелевых групп, $S(k)$ — группа всех перестановок k элементов. Минимальные полные классы пар групп $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{K})$, $\mathcal{M}(\mathcal{A}, S(k))$ и $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ называются соответственно *почти разрешимыми*, *k-разрешимыми* и *разрешимыми* классами пар групп. Эти классы пар групп важны в теории Галуа. Они допускают следующее явное описание.

Цепочка подгрупп $\Gamma_i, i = 1, \dots, t, \Gamma = \Gamma_1 \supseteq \dots \supseteq \Gamma_t \subseteq \Gamma_0$, называется *нормальной башней* пары групп $[\Gamma, \Gamma_0]$, если группа Γ_{i+1} является нормальным делителем группы Γ_i при каждом $i = 1, \dots, t-1$. Совокупность факторгрупп Γ_i/Γ_{i+1} называется совокупностью *делителей относительно нормальной башни*.

ТЕОРЕМА О КЛАССАХ ПАР $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{K})$, $\mathcal{M}(\mathcal{A}, S(n))$ и $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ [2, 3]. (1) *Пара групп почти разрешима, если и только если она обладает такой нормальной башней, что каждый делитель относительно этой башни является или конечной, или коммутативной группой.*

(2) Пара групп k -разрешима, если и только если она обладает такой нормальной башней, что каждый делитель относительно этой башни является или подгруппой группы $S(k)$, или коммутативной группой.

(3) Пара групп разрешима, если и только если группа монодромии этой пары разрешима (группой монодромии пары групп $[\Gamma, \Gamma_0]$ называется факторгруппа группы Γ по наибольшему нормальному делителю, лежащему в группе Γ_0).

Усилим свойство 3) из определения почти полного класса пар групп:

3') для всякого почти гомоморфизма $J: \Gamma \rightarrow T$ около группы S пара групп $[\bar{\Gamma}(S), \bar{\Gamma}_0(S)]$, где $\bar{\Gamma}(S)$, $\bar{\Gamma}_0(S)$ — индуцированные замыкания групп Γ , Γ_0 в группе S при почти гомоморфизме J , также содержится в $\mathcal{L}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. I -почти полный класс пар групп, I -полный класс пар групп и классы $I\mathcal{L}(\mathcal{B})$, $I\mathcal{M}(\mathcal{B})$ определяются так же, как соответственно почти полный класс пар групп, полный класс пар групп и классы $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, $\mathcal{M}(\mathcal{B})$, нужно лишь во всех определениях свойство 3) заменить более сильным свойством 3').

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Справедливы равенства $I\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{K}) = \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{K})$, $I\mathcal{M}(\mathcal{A}, S(k)) = \mathcal{M}(\mathcal{A}, S(k))$ и $I\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно вытекает из явного описания классов $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{K})$, $\mathcal{M}(\mathcal{A}, S(k))$ и $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ и из теорем 1 и 2 §2 об индуцированных замыканиях.

ТЕОРЕМА. Монодромная пара всякой многозначной функции, индуцированной при некотором непрерывном отображении $\mathcal{S}$ -функцией f , принадлежит минимальному I -почти полному классу пар групп, содержащему монодромную пару функции f . В частности, если группа монодромии $\mathcal{S}$ -функции f разрешима (монодромная пара почти разрешима, k -разрешима), то этим же свойством обладает группа монодромии (монодромная пара) всякой многозначной функции, индуцированной при некотором непрерывном отображении функцией f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из теоремы §4 и из замкнутости классов $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{K})$, $\mathcal{M}(\mathcal{A}, S(k))$ и $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ относительно операции индуцированного замыкания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хованский А. О представимости функций в квадратурах. УМН, **26**, вып. 4, 251–252 (1971).
2. Хованский А. О представимости функций в квадратурах. Дисс. к.ф.-м.н., М., МИАН, М., 1973.
3. Khovanskii A. Topological obstructions for representability of functions by quadratures. J. Dynamical and Control Systems, **1**, No. 1, 99–132 (1995).
4. Хованский А. О продолжаемости многозначных аналитических функций на аналитическое подмножество. Функц. анализ и его прил., **35**, вып. 1, 62–73 (2001).
5. Khovanskii A. A multi-dimensional topological version of Galois theory. In: Proceeding of International Conference “Monodromy in Geometry and Differential Equations,” 25–30 June, Moscow, 2001.
6. Хованский А. О суперпозициях голоморфных функций с радикалами. УМН, **26**, вып. 2, 213–214 (1971).
7. Алексеев В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях. МЦНМО, М., 2001.
8. Арнольд В. И., Петровский И. Г. Топологические проблемы Гильберта и современная математика. УМН, **57**, вып. 4, 197–207 (2002).