Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Нелокальные гамильтоновы операторы гидродинамического типа с плоскими метриками, интегрируемые иерархии и уравнения ассоциативности, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 1, 14–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa15>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:45:48

УДК 517.9

Нелокальные гамильтоновы операторы гидродинамического типа с плоскими метриками, интегрируемые иерархии и уравнения ассоциативности*

© 2006. О. И. Мохов

§1. Введение

В данной статье мы решаем задачу описания всех нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа с плоскими метриками и устанавливаем, что этот нетривиальный специальный класс гамильтоновых операторов тесно связан с уравнениями ассоциативности двумерных топологических квантовых теорий поля и теорией фробениусовых многообразий. В ней показано, что гамильтоновы операторы этого класса представляют особый интерес и по многим другим причинам. В частности, мы доказываем, что любой такой гамильтонов оператор всегда определяет интегрируемые структурные потоки (системы гидродинамического типа), всегда задает нетривиальный пучок согласованных гамильтоновых операторов и порождает интегрируемые иерархии гидродинамического типа. Аффины любого такого гамильтонова оператора порождают некоторые специальные интегралы в инволюции. Нелинейные системы, описывающие интегралы в инволюции, представляют большой самостоятельный интерес, и мы посвятим системам интегралов в инволюции в теории поля и их связям с уравнениями ассоциативности отдельную статью. Уравнения ассоциативности двумерных топологических квантовых теорий поля (уравнения Виттена–Дейкграфа–Верлинде–Верлинде и Дубровина) описывают важный специальный класс интегралов в инволюции и специальный класс нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа с плоскими метриками. Доказывается, что локально всякое N -мерное фробениусово многообразие представляется некоторым специальным плоским N -мерным подмногообразием с плоской нормальной связностью в $2N$ -мерном псевдоевклидовом пространстве, определяемым однозначно с точностью до движений. Свойствам этой конструкции и этого специального класса плоских подмногообразий с плоской нормальной связностью, отвечающего фробениусовым многообразиям, будет посвящена другая работа.

Напомним, что в [1] в связи с насущными потребностями гамильтоновой теории систем гидродинамического типа (см. также [2,3]) Ферапонтовым были изучены общие нелокальные гамильтоновы операторы гидродинамического типа,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке, Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №03-01-00782 и №05-01-00170) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант №2185.2003.1).

а именно гамильтоновы операторы вида

$$P^{ij} = g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k + \sum_{n=1}^L \varepsilon^n (w_n)_k^i(u(x)) u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ (w_n)_s^j(u(x)) u_x^s, \quad (1.1)$$

где $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, $\varepsilon^n = \pm 1$, $1 \leq n \leq L$, $u^1, \dots, u^N$ — локальные координаты, $u = (u^1, \dots, u^N)$, $u^i(x)$, $1 \leq i \leq N$, — функции (поля) одной независимой переменной x , а коэффициенты $g^{ij}(u)$, $b_k^{ij}(u)$, $(w_n)_j^i(u)$, $1 \leq i, j, k \leq N$, $1 \leq n \leq L$, — гладкие функции локальных координат.

Гамильтоновы операторы общего вида (1.1) (локальные и нелокальные) играют ключевую роль в гамильтоновой теории систем гидродинамического типа. Напомним, что оператор P^{ij} называется *гамильтоновым*, если он определяет скобку Пуассона

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} P^{ij} \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx \quad (1.2)$$

на произвольных функционалах I и J на пространстве полей $u^i(x)$, т. е. скобка (1.2) является кососимметричной и удовлетворяет тождеству Якоби. В [1] доказано, что оператор (1.1) является гамильтоновым тогда и только тогда, когда $g^{ij}(u)$ — симметричная (псевдориманова) контравариантная метрика и выполнены следующие соотношения:

1) $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u) \Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ — риманова связность, порождаемая контравариантной метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивиты);

2) $g^{ik}(u)(w_n)_k^j(u) = g^{jk}(u)(w_n)_k^i(u)$;

3) $\nabla_k(w_n)_j^i(u) = \nabla_j(w_n)_k^i(u)$, где ∇_k — ковариантная производная, порождаемая связностью Леви-Чивиты $\Gamma_{sk}^j(u)$ метрики $g^{ij}(u)$;

4) $R_{kl}^{ij}(u) = \sum_{n=1}^L \varepsilon^n ((w_n)_l^i(u)(w_n)_k^j(u) - (w_n)_l^j(u)(w_n)_k^i(u))$, где $R_{kl}^{ij}(u) = g^{is}(u) R_{skl}^j(u)$ — тензор римановой кривизны метрики $g^{ij}(u)$;

5) $[w_n(u), w_m(u)] = 0$, т. е. семейство тензоров типа $(1, 1)$ (*аффиноров*) $(w_n)_j^i(u)$, $1 \leq n \leq L$, коммутативно.

Гамильтонов оператор вида (1.1) в точности соответствует N -мерной поверхности с плоской нормальной связностью, вложенной в псевдоевклидово пространство E^{N+L} . При этом ковариантная метрика $g_{ij}(u)$, для которой $g_{is}(u)g^{sj}(u) = \delta_i^j$, является первой квадратичной формой, а аффиноры $w_n(u)$, $1 \leq n \leq L$, являются операторами Вайнгартена этой вложенной поверхности ($g_{is}(u)(w_n)_j^s(u)$ — соответствующие вторые квадратичные формы). При такой интерпретации соотношения 2)–4) являются уравнениями Гаусса–Петерсона–Кодацци для N -мерной поверхности с плоской нормальной связностью, вложенной в псевдоевклидово пространство E^{N+L} [1]. Соотношения 5) эквивалентны уравнениям Риччи для этой вложенной поверхности.

Учитывая дальнейшие приложения к произвольным фробениусовым многообразиям, мы предпочитаем рассматривать общие нелокальные гамильтоновы

операторы гидродинамического типа в виде

$$P^{ij} = g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k + \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} (w_m)_k^i(u(x)) u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ (w_n)_s^j(u(x)) u_x^s, \quad (1.3)$$

где $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, а μ^{mn} — произвольная невырожденная симметричная постоянная матрица. Рассматривая линейные преобразования в векторном пространстве аффиноров $w_n(u)$, $1 \leq n \leq L$, т.е. заменяя в (1.3) все аффиноры $w_n(u)$ на $c_n^l \tilde{w}_l(u)$, где c_n^l — произвольная невырожденная постоянная матрица, любой оператор вида (1.3) можно привести к виду (1.1) и, наоборот, любой оператор вида (1.3) может быть получен из некоторого оператора вида (1.1) линейной заменой аффиноров вида $w_n(u) = c_n^l \tilde{w}_l(u)$. Эти преобразования из всех условий гамильтоновости 1)–5) оператора (1.1) изменяют только условие на тензор римановой кривизны метрики (условие 4)), которое для оператора (1.3) принимает вид

$$R_{kl}^{ij}(u) = \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} ((w_m)_l^i(u) (w_n)_k^j(u) - (w_m)_l^j(u) (w_n)_k^i(u));$$

все остальные условия гамильтоновости не изменяются.

ЛЕММА 1.1. *Оператор (1.3) является гамильтоновым тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют соотношениям*

$$g^{ij} = g^{ji}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = b_k^{ij} + b_k^{ji}, \quad (1.5)$$

$$g^{is} b_s^{jk} = g^{js} b_s^{ik}, \quad (1.6)$$

$$g^{is} (w_n)_s^j = g^{js} (w_n)_s^i, \quad (1.7)$$

$$(w_n)_s^i (w_m)_j^s = (w_m)_s^i (w_n)_j^s, \quad (1.8)$$

$$g^{is} g^{jr} \frac{\partial (w_n)_r^k}{\partial u^s} - g^{jr} b_s^{ik} (w_n)_r^s = g^{js} g^{ir} \frac{\partial (w_n)_r^k}{\partial u^s} - g^{ir} b_s^{jk} (w_n)_r^s, \quad (1.9)$$

$$g^{is} \left(\frac{\partial b_s^{jk}}{\partial u^r} - \frac{\partial b_r^{jk}}{\partial u^s} \right) + b_s^{ij} b_r^{sk} - b_s^{ik} b_r^{sj} = \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} g^{is} ((w_m)_r^j (w_n)_s^k - (w_m)_s^j (w_n)_r^k). \quad (1.10)$$

§2. Пучок гамильтоновых операторов

Рассмотрим важный частный случай нелокальных гамильтоновых операторов вида (1.3), когда метрика $g^{ij}(u)$ плоская. Напомним, что любая плоская метрика однозначно определяет локальный гамильтонов оператор гидродинамического типа (т.е. гамильтонов оператор вида (1.3) с нулевыми аффинорами)

— гамильтонов оператор Дубровина–Новикова [2]. В данной работе мы доказываем, что для любой плоской метрики имеется и замечательный класс нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа с этой плоской метрикой и нетривиальными аффинорами, причем эти операторы имеют важные приложения в теории фробениусовых многообразий и интегрируемых иерархий. Сразу отметим одно важное свойство нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа с плоскими метриками. Напомним, что два гамильтоновых оператора называются *согласованными*, если все линейные комбинации этих гамильтоновых операторов также являются гамильтоновыми операторами [4], т. е. они образуют *пучок гамильтоновых операторов*.

ЛЕММА 2.1. *Метрика $g^{ij}(u)$ гамильтонова оператора вида (1.3) является плоской тогда и только тогда, когда этот оператор определяет пучок согласованных гамильтоновых операторов*

$$P_{\lambda_1, \lambda_2}^{ij} = \lambda_1 \left(g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k \right) + \lambda_2 \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} (w_m)_k^i(u(x)) u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ (w_n)_s^j(u(x)) u_x^s, \quad (2.1)$$

где λ_1 и λ_2 — произвольные константы.

Действительно, если оператор (1.3) является гамильтоновым, то для него выполнены соотношения (1.4)–(1.10). В этом случае для оператора (2.1) соотношения (1.4)–(1.9) всегда выполнены для любых констант λ_1 и λ_2 , а соотношение (1.10) выполняется для любых констант λ_1 и λ_2 тогда и только тогда, когда тождественно равны нулю левая и правая части этого соотношения. Из соотношений (1.4)–(1.6) для гамильтонова оператора (1.3) следует, что тензор римановой кривизны метрики $g^{ij}(u)$ имеет вид

$$R_r^{ijk}(u) = g^{is}(u) R_{sr}^{jk}(u) = g^{is}(u) \left(\frac{\partial b_s^{jk}}{\partial u^r} - \frac{\partial b_r^{jk}}{\partial u^s} \right) + b_s^{ij}(u) b_r^{sk}(u) - b_s^{ik}(u) b_r^{sj}(u). \quad (2.2)$$

Если метрика $g^{ij}(u)$ гамильтонова оператора вида (1.3) является плоской, т. е. $R_r^{ijk}(u) = 0$, то соотношение (1.10) принимает вид

$$\sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} g^{is} \left((w_m)_r^j(u) (w_n)_s^k(u) - (w_m)_s^j(u) (w_n)_r^k(u) \right) = 0.$$

Таким образом, метрика $g^{ij}(u)$ гамильтонова оператора (1.3) является плоской тогда и только тогда, когда тождественно равны нулю левая и правая части соотношения (1.10) для гамильтонова оператора (1.3), а в этом случае тождественно равны нулю левая и правая части соотношения (1.10) и для оператора (2.1) для любых констант λ_1 и λ_2 , т. е. мы получаем пучок согласованных гамильтоновых операторов (2.1). Отметим также, что для пучка гамильтоновых операторов $P_{\lambda_1, \lambda_2}^{ij}$, заданного формулой (2.1), из теоремы Дубровина–Новикова [2] для локального оператора $P_{1,0}^{ij}$ немедленно следует, что метрика $g^{ij}(u)$ является плоской.

Таким образом, если метрика $g^{ij}(u)$ гамильтонова оператора вида (1.3) является плоской, то оператор

$$P_{0,1}^{ij} = \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} (w_m)_k^i (u(x)) u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ (w_n)_s^j (u(x)) u_x^s \quad (2.3)$$

также является гамильтоновым оператором, получаемым вырождением $\lambda_1 \rightarrow 0$, причем этот гамильтонов оператор в этом случае всегда согласован с локальным гамильтоновым оператором гидродинамического типа (оператором Дубровина–Новикова)

$$P_{1,0}^{ij} = g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k. \quad (2.4)$$

Согласованные гамильтоновы операторы (2.3) и (2.4) порождают интегрируемые бигамильтоновы иерархии. Мы построим эти интегрируемые иерархии далее в данной статье.

§3. Интегрируемость структурных потоков

Напомним, что системы гидродинамического типа

$$u_{t_n}^i = (w_n)_j^i(u) u_x^j, \quad 1 \leq n \leq L, \quad (3.1)$$

называются *структурными потоками* нелокального гамильтонова оператора гидродинамического типа (1.3) (см. [1, 5]).

ЛЕММА 3.1. *Все структурные потоки (3.1) любого нелокального гамильтонова оператора гидродинамического типа с плоской метрикой являются коммутирующими интегрируемыми бигамильтоновыми системами гидродинамического типа.*

Как доказано Мальцевым и Новиковым в [5] (см. также [1]), структурные потоки любого нелокального гамильтонова оператора гидродинамического типа (1.3) являются гамильтоновыми относительно этого гамильтонова оператора. Рассмотрим произвольный нелокальный гамильтонов оператор гидродинамического типа (1.3) с плоской метрикой $g^{ij}(u)$ и отвечающий этому гамильтоновому оператору пучок согласованных гамильтоновых операторов (2.1). Соответствующие структурные потоки обязаны быть гамильтоновыми относительно любого из операторов гамильтонова пучка (2.1) и, следовательно, являются интегрируемыми бигамильтоновыми системами.

§4. Описание нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа с плоскими метриками

Опишем все нелокальные гамильтоновы операторы гидродинамического типа с плоскими метриками. Вид гамильтонова оператора (1.3) инвариантен относительно локальных замен координат, при этом все коэффициенты оператора преобразуются как соответствующие дифференциально-геометрические объекты. Так как метрика плоская, то существуют локальные координаты, в которых метрика приводится к постоянному виду $\eta^{ij}, \eta^{ij} = \text{const}, \det \eta^{ij} \neq 0, \eta^{ij} = \eta^{ji}$.

В этих локальных координатах все коэффициенты связности Леви-Чивиты равны нулю и гамильтонов оператор имеет вид

$$\tilde{P}^{ij} = \eta^{ij} \frac{d}{dx} + \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} (\tilde{w}_m)_k^i(u(x)) u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ (\tilde{w}_n)_s^j(u(x)) u_x^s. \quad (4.1)$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Оператор (4.1), где η^{ij} и μ^{mn} — произвольные невырожденные симметричные постоянные матрицы, является гамильтоновым тогда и только тогда, когда существуют функции $\psi_n(u)$, $1 \leq n \leq L$, такие, что*

$$(\tilde{w}_n)_j^i(u) = \eta^{is} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^s \partial u^j}, \quad (4.2)$$

причем выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \eta^{mn} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial u^i \partial u^m} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial u^n \partial u^l} = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \eta^{mn} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial u^i \partial u^m} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial u^n \partial u^l}, \quad (4.3)$$

$$\sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^k \partial u^l} = \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^i \partial u^k} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^j \partial u^l}. \quad (4.4)$$

Для оператора вида (4.1) соотношения (1.4)–(1.6) выполняются автоматически, а соотношение (1.9) имеет вид

$$\frac{\partial (\tilde{w}_n)_r^k}{\partial u^s} = \frac{\partial (\tilde{w}_n)_s^k}{\partial u^r}, \quad (4.5)$$

и, следовательно, локально существуют функции $\varphi_n^i(u)$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq n \leq L$, такие, что

$$(\tilde{w}_n)_j^i(u) = \frac{\partial \varphi_n^i}{\partial u^j}. \quad (4.6)$$

Соотношение (1.7) принимает вид

$$\eta^{is} \frac{\partial \varphi_n^j}{\partial u^s} = \eta^{js} \frac{\partial \varphi_n^i}{\partial u^s} \quad (4.7)$$

или, эквивалентно,

$$\frac{\partial (\eta_{is} \varphi_n^s)}{\partial u^j} = \frac{\partial (\eta_{js} \varphi_n^s)}{\partial u^i}, \quad (4.8)$$

где η_{ij} — матрица, обратная матрице η^{ij} , $\eta_{is} \eta^{sj} = \delta_i^j$. Из соотношения (4.8) следует, что локально существуют функции $\psi_n(u)$, $1 \leq n \leq L$, такие, что

$$\eta_{is} \varphi_n^s = \frac{\partial \psi_n}{\partial u^i}. \quad (4.9)$$

Таким образом,

$$\varphi_n^i = \eta^{is} \frac{\partial \psi_n}{\partial u^s}, \quad (\tilde{w}_n)_j^i(u) = \eta^{is} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^s \partial u^j}. \quad (4.10)$$

При этом соотношения (1.8) и (1.10) приобретают вид (4.3) и (4.4) соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Если функции $\psi_n(u)$, $1 \leq n \leq L$, являются решением системы уравнений (4.3), (4.4), то системы гидродинамического типа

$$u_{t_n}^i = \eta^{is} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^s \partial u^j} u_x^j, \quad 1 \leq n \leq L, \quad (4.11)$$

являются коммутирующими интегрируемыми бигамильтоновыми системами гидродинамического типа. Кроме того, в этом случае оператор

$$M_1^{ij} = \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \eta^{ip} \eta^{jr} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^p \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^r \partial u^s} u_x^s \quad (4.12)$$

также является гамильтоновым оператором, причем он согласован с постоянным гамильтоновым оператором

$$M_2^{ij} = \eta^{ij} \frac{d}{dx}. \quad (4.13)$$

В произвольных локальных координатах получаем следующее описание всех нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа с плоскими метриками.

ТЕОРЕМА 4.2. Оператор (1.3) с плоской метрикой $g^{ij}(u)$ является гамильтоновым тогда и только тогда, когда $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u) \Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ — плоская связность, порождаемая метрикой $g^{ij}(u)$, и локально существуют функции $\Phi_n(u)$, $1 \leq n \leq L$, такие, что

$$(w_n)_j^i(u) = \nabla^i \nabla_j \Phi_n, \quad (4.14)$$

причем выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{n=1}^N \nabla^n \nabla_i \Phi_j \nabla_n \nabla_l \Phi_k = \sum_{n=1}^N \nabla^n \nabla_i \Phi_k \nabla_n \nabla_l \Phi_j, \quad (4.15)$$

$$\sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \nabla_i \nabla_j \Phi_m \nabla_k \nabla_l \Phi_n = \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \nabla_i \nabla_k \Phi_m \nabla_j \nabla_l \Phi_n, \quad (4.16)$$

где ∇_i — ковариантная производная, определяемая плоской связностью $\Gamma_{jk}^i(u)$, порождаемой метрикой $g^{ij}(u)$, $\nabla^i = g^{is}(u) \nabla_s$. В частности, в этом случае оператор

$$\begin{aligned} M_{\lambda_1, \lambda_2}^{ij} = & \lambda_1 \left(g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} - g^{is}(u(x)) \Gamma_{sk}^j(u(x)) u_x^k \right) \\ & + \lambda_2 \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \nabla^i \nabla_k \Phi_m u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ \nabla^j \nabla_s \Phi_n u_x^s \end{aligned} \quad (4.17)$$

является гамильтоновым оператором для любых констант λ_1 и λ_2 , а системы гидродинамического типа

$$u_{t_n}^i = \nabla^i \nabla_j \Phi_n u_x^j, \quad 1 \leq n \leq L, \quad (4.18)$$

являются коммутирующими интегрируемыми бигамильтоновыми системами гидродинамического типа.

§5. Интегрируемые иерархии

Рассмотрим оператор рекурсии

$$R_j^i = (M_1(M_2)^{-1})_j^i = \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \eta^{ip} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^p \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^j \partial u^s} u_x^s \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1}, \quad (5.1)$$

отвечающий согласованным гамильтоновым операторам (4.12) и (4.13). Применим построенный нами оператор рекурсии (5.1) к системе трансляций по x

$$u_t^i = u_x^i. \quad (5.2)$$

Любая система из иерархии

$$u_{t_s}^i = (R^s)_j^i u_x^j, \quad s \in \mathbb{Z}, \quad (5.3)$$

является мультигамильтоновой интегрируемой системой гидродинамического типа. В частности, интегрируемой является любая система вида

$$u_{t_1}^i = R_j^i u_x^j, \quad (5.4)$$

т. е. система

$$u_{t_1}^i = \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \eta^{ip} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^p \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^j \partial u^s} u_x^s. \quad (5.5)$$

Система гидродинамического типа (5.5) имеет следующий локальный вид:

$$u_{t_1}^i = \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \eta^{ip} F_n(u) \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^p \partial u^k} u_x^k, \quad F_n = \frac{\partial \psi_n}{\partial u^j} u^j - \psi_n, \quad \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^j \partial u^s} u^j = \frac{\partial F_n}{\partial u^s}. \quad (5.6)$$

Эта система гидродинамического типа является бигамильтоновой по отношению к согласованным гамильтоновым операторам (4.12) и (4.13):

$$u_{t_1}^i = \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \eta^{ip} \eta^{jr} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^p \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^r \partial u^s} u_x^s \frac{\delta H_1}{\delta u^j(x)} \right), \quad (5.7)$$

$$H_1 = \int h_1(u(x)) dx, \quad h_1(u(x)) = \frac{1}{2} \eta_{ij} u^i(x) u^j(x), \quad (5.8)$$

$$u_{t_1}^i = \eta^{ij} \frac{d}{dx} \frac{\delta H_2}{\delta u^j(x)}, \quad H_2 = \int h_2(u(x)) dx, \quad (5.9)$$

так как в нашем случае локально всегда существует функция $h_2(u)$, такая, что

$$\sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^j \partial u^k} F_n(u) = \frac{\partial^2 h_2}{\partial u^j \partial u^k}. \quad (5.10)$$

Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^j \partial u^k} F_n(u) \right) \\
&= \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \frac{\partial^3 \psi_m}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} F_n(u) + \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^j \partial u^k} \frac{\partial F_n}{\partial u^i} \\
&= \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \frac{\partial^3 \psi_m}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} F_n(u) + \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^j \partial u^k} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^i \partial u^s} u^s \\
&= \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \frac{\partial^3 \psi_m}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} F_n(u) + \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^j \partial u^i} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^k \partial u^s} u^s, \quad (5.11)
\end{aligned}$$

где использовано соотношение (4.4). В силу симметрии по индексам i и j мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^j \partial u^k} F_n(u) \right) = \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^i \partial u^k} F_n(u) \right), \quad (5.12)$$

т. е. локально существуют функции $a_k(u)$, $1 \leq k \leq N$, такие, что

$$\sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^j \partial u^k} F_n(u) = \frac{\partial a_k}{\partial u^j}. \quad (5.13)$$

В силу симметрии по индексам j и k получаем

$$\frac{\partial a_k}{\partial u^j} = \frac{\partial a_j}{\partial u^k}, \quad (5.14)$$

т. е. локально существует функция $h_2(u)$, такая, что

$$a_k(u) = \frac{\partial h_2}{\partial u^k}. \quad (5.15)$$

Таким образом,

$$\sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^j \partial u^k} F_n(u) = \frac{\partial a_k}{\partial u^j} = \frac{\partial^2 h_2}{\partial u^j \partial u^k}. \quad (5.16)$$

Рассмотрим следующее уравнение интегрируемой иерархии (5.3):

$$\begin{aligned}
u_{t_2}^i &= (R^2)_j^i u_x^j \\
&= \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \eta^{ip} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^p \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^j \partial u^s} u_x^s \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ \eta^{jr} \frac{d}{dx} \frac{\delta H_2}{\delta u^r(x)} \\
&= \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \eta^{ip} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^p \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^j \partial u^s} u_x^s \eta^{jr} \frac{\partial h_2}{\partial u^r}. \quad (5.17)
\end{aligned}$$

Докажем, что в нашем случае всегда локально существуют функции $G_n(u)$, $1 \leq n \leq L$, такие, что

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^j \partial u^s} \eta^{jr} \frac{\partial h_2}{\partial u^r} = \frac{\partial G_n}{\partial u^s}. \quad (5.18)$$

Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^p} \left(\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^j \partial u^s} \eta^{jr} \frac{\partial h_2}{\partial u^r} \right) &= \frac{\partial^3 \psi_n}{\partial u^j \partial u^s \partial u^p} \eta^{jr} \frac{\partial h_2}{\partial u^r} + \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^j \partial u^s} \eta^{jr} \frac{\partial^2 h_2}{\partial u^r \partial u^p} \\ &= \frac{\partial^3 \psi_n}{\partial u^j \partial u^s \partial u^p} \eta^{jr} \frac{\partial h_2}{\partial u^r} + \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^j \partial u^s} \eta^{jr} \left(\sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L \mu^{kl} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial u^r \partial u^p} F_l(u) \right) \\ &= \frac{\partial^3 \psi_n}{\partial u^j \partial u^s \partial u^p} \eta^{jr} \frac{\partial h_2}{\partial u^r} + \sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L \mu^{kl} \eta^{jr} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^s \partial u^j} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial u^r \partial u^p} F_l(u) \\ &= \frac{\partial^3 \psi_n}{\partial u^j \partial u^s \partial u^p} \eta^{jr} \frac{\partial h_2}{\partial u^r} + \sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L \mu^{kl} \eta^{jr} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial u^s \partial u^j} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^r \partial u^p} F_l(u) \\ &= \frac{\partial^3 \psi_n}{\partial u^j \partial u^s \partial u^p} \eta^{jr} \frac{\partial h_2}{\partial u^r} + \sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^L \mu^{kl} \eta^{jr} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial u^s \partial u^r} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^j \partial u^p} F_l(u), \end{aligned} \quad (5.19)$$

где использованы соотношение (4.3) и симметричность матрицы η^{jr} . Таким образом, доказано, что рассматриваемое выражение симметрично по индексам p и s , т.е.

$$\frac{\partial}{\partial u^p} \left(\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^j \partial u^s} \eta^{jr} \frac{\partial h_2}{\partial u^r} \right) = \frac{\partial}{\partial u^s} \left(\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^j \partial u^p} \eta^{jr} \frac{\partial h_2}{\partial u^r} \right). \quad (5.20)$$

Следовательно, локально существуют функции $G_n(u)$, $1 \leq n \leq L$, такие, что выполняется соотношение (5.18), и, таким образом, доказано, что второй поток интегрируемой иерархии (5.3) имеет вид локальной системы гидродинамического типа

$$u_{t_2}^i = \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \eta^{ip} G_n(u) \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^p \partial u^k} u_x^k. \quad (5.21)$$

Повторяя в точности приведенные выше рассуждения, доказываем по индукции, что если функции $\psi_n(u)$, $1 \leq n \leq L$, являются решением системы уравнений (4.3), (4.4), то для любого $s \geq 1$ и соответствующей функции $h_s(u(x))$ (начиная с функции $h_1(u(x)) = \frac{1}{2} \eta_{ij} u^i(x) u^j(x)$) всегда локально существуют функции $F_n^{(s)}(u)$, $1 \leq n \leq L$, такие, что

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^j \partial u^p} \eta^{jr} \frac{\partial h_s}{\partial u^r} = \frac{\partial F_n^{(s)}}{\partial u^p}, \quad (5.22)$$

и всегда локально существует функция $h_{s+1}(u(x))$, такая, что

$$\sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^j \partial u^k} F_n^{(s)}(u) = \frac{\partial^2 h_{s+1}}{\partial u^j \partial u^k}. \quad (5.23)$$

Выше мы доказали, что это утверждение верно при $s = 1$ (при этом, в частности, $F_n^{(1)} = F_n$, $F_n^{(2)} = G_n$). Точно так же доказывается, что если это утверждение верно для $s = K \geq 1$, то оно верно и для $s = K + 1$ (см. (5.11)–(5.16) и (5.19), (5.20)). Таким образом, доказано, что для любого $s \geq 1$ соответствующий поток интегрируемой иерархии (5.3) имеет вид локальной системы гидродинамического типа

$$u_{t_s}^i = \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^L \mu^{mn} \eta^{ip} F_n^{(s)}(u) \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u^p \partial u^k} u_x^k. \quad (5.24)$$

Все потоки иерархии (5.3) являются коммутирующими интегрируемыми бигамильтоновыми системами гидродинамического типа с бесконечным семейством локальных интегралов в инволюции относительно обеих скобок Пуассона:

$$u_{t_s}^i = M_1^{ij} \frac{\delta H_s}{\delta u^j(x)} = \{u^i, H_s\}_1, \quad H_s = \int h_s(u(x)) dx, \quad (5.25)$$

$$u_{t_s}^i = M_2^{ij} \frac{\delta H_{s+1}}{\delta u^j(x)} = \{u^i, H_{s+1}\}_2, \quad \{H_p, H_r\}_1 = 0, \quad \{H_p, H_r\}_2 = 0, \quad (5.26)$$

причем плотности гамильтонианов $h_s(u(x))$ связаны рекуррентными соотношениями (5.22), (5.23), которые в нашем случае всегда разрешимы.

Пусть функции $\psi_n(u)$, $1 \leq n \leq L$, являются решением системы уравнений (4.3), (4.4), т. е., в частности, нелокальный оператор M_1^{ij} вида (4.12) является гамильтоновым. Рассмотрим гамильтонову систему

$$u_t^i = M_1^{ij} \frac{\delta H}{\delta u^j(x)}, \quad H = \int h(u(x)) dx, \quad (5.27)$$

с произвольным гамильтонианом гидродинамического типа H . Как доказано Ферапонтовым в [1], гамильтонова система с нелокальным гамильтоновым оператором гидродинамического типа (1.1) и гамильтонианом гидродинамического типа является локальной тогда и только тогда, когда гамильтониан является интегралом структурных потоков гамильтонова оператора. Это утверждение верно и для гамильтоновых операторов вида (2.3), а также вообще для любых слабо нелокальных гамильтоновых операторов (см. [5]). Для построенных в данной работе нелокальных гамильтоновых операторов M_1^{ij} , задаваемых формулой (4.12), этого условия на гамильтонианы достаточно для интегрируемости, т. е. все локальные гамильтоновы системы (5.27) являются интегрируемыми бигамильтоновыми системами.

ЛЕММА 5.1. Система (5.27) является локальной тогда и только тогда, когда плотность гамильтониана $h(u(x))$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^j \partial u^s} \eta^{jr} \frac{\partial^2 h}{\partial u^r \partial u^p} = \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^j \partial u^p} \eta^{jr} \frac{\partial^2 h}{\partial u^r \partial u^s}. \quad (5.28)$$

ТЕОРЕМА 5.1. Если гамильтонова система (5.27) локальна, то она интегрируема.

Нелинейные уравнения вида (4.3) и (5.28) представляют самостоятельный интерес, они имеют важное значение и очень естественную интерпретацию.

ЛЕММА 5.2. *Нелинейные уравнения (4.3) эквивалентны условию, что интегралы*

$$\Psi_n = \int \psi_n(u(x)) dx, \quad 1 \leq n \leq L, \quad (5.29)$$

находятся в инволюции относительно скобки Пуассона, задаваемой постоянным гамильтоновым оператором M_2^{ij} вида (4.13), т. е.

$$\{\Psi_n, \Psi_m\} = 0. \quad (5.30)$$

Аналогично, уравнения (5.28) эквивалентны условию

$$\{\Psi_n, H\} = 0, \quad H = \int h(u(x)) dx. \quad (5.31)$$

Отметим, что уравнения (4.15) эквивалентны условию инволютивности L интегралов относительно произвольной скобки Дубровина–Новикова (невырожденной локальной скобки Пуассона гидродинамического типа).

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Гамильтонова система (5.27) является локальной тогда и только тогда, когда она порождается семейством $L+1$ интегралов в инволюции относительно скобки Пуассона, задаваемой постоянным гамильтоновым оператором M_2^{ij} вида (4.13), а именно*

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \int \psi_n(u(x)) dx, \quad 1 \leq n \leq L, \\ H &= \int h(u(x)) dx, \quad \{\Psi_n, \Psi_m\} = 0, \quad \{\Psi_n, H\} = 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

При этом система (5.27) является интегрируемой бигамильтоновой системой.

Важный специальный класс интегралов в инволюции порождается уравнениями ассоциативности двумерной топологической квантовой теории поля.

ЛЕММА 5.3. *Функция $\Phi(u^1, \dots, u^N)$ порождает семейство*

$$I_n = \int \frac{\partial \Phi}{\partial u^n}(u(x)) dx, \quad \{I_n, I_m\} = 0, \quad 1 \leq n, m \leq N, \quad (5.33)$$

N интегралов в инволюции относительно скобки Пуассона, задаваемой постоянным гамильтоновым оператором M_2^{ij} вида (4.13), тогда и только тогда, когда функция $\Phi(u)$ является решением уравнений ассоциативности двумерной топологической квантовой теории поля

$$\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \eta^{mn} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^i \partial u^j \partial u^m} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^n \partial u^k \partial u^l} = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \eta^{mn} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^i \partial u^k \partial u^m} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^n \partial u^j \partial u^l}. \quad (5.34)$$

§6. Плоские подмногообразия с плоской нормальной связностью, гессианы и нелокальные скобки Пуассона

Нелинейные уравнения (4.3) и (4.4), описывающие все нелокальные гамильтоновы операторы гидродинамического типа с плоскими метриками, в точности эквивалентны условиям, что в $(N+L)$ -мерное псевдоевклидово пространство вложено плоское N -мерное подмногообразие с плоской нормальной связностью,

с первой квадратичной формой $\eta_{ij} du^i du^j$ и вторыми квадратичными формами $\omega_n(u)$, задаваемыми гессианами L функций $\psi_n(u)$, $1 \leq n \leq L$,

$$\omega_n(u) = \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^i \partial u^j} du^i du^j.$$

Уравнения (4.4) являются уравнениями Гаусса для этого случая, а уравнения (4.3) — уравнениями Риччи (уравнения Петерсона–Кодацци–Майнарди выполняются в этом случае автоматически). По теореме Петерсона–Бонне любое решение $\psi_n(u)$, $1 \leq n \leq L$, системы уравнений (4.3) и (4.4) определяет в $(N + L)$ -мерном псевдоевклидовом пространстве единственное с точностью до движений N -мерное подмногообразие с плоской нормальной связностью, с первой квадратичной формой $\eta_{ij} du^i du^j$ и вторыми квадратичными формами $\omega_n(u)$, задаваемыми гессианами функций $\psi_n(u)$.

Рассмотрим произвольное N -мерное плоское подмногообразие с плоской нормальной связностью в $(N + L)$ -мерном псевдоевклидовом пространстве. Пусть $g_{ij}(u) du^i du^j$ — первая квадратичная форма этого плоского подмногообразия, где $g_{ij}(u)$ — плоская метрика. Тогда справедливо такое следствие теории подмногообразий и теоремы Бонне:

ЛЕММА 6.1. *Локально существуют функции $\Phi_n(u)$, $1 \leq n \leq L$, такие, что вторые квадратичные формы рассматриваемого подмногообразия имеют вид*

$$\Omega_n(u) = \nabla_i \nabla_j \Phi_n du^i du^j, \quad (6.1)$$

где ∇_i — ковариантная производная, определяемая связностью Леви-Чивиты метрики $g_{ij}(u)$. При этом функции $\Phi_n(u)$, $1 \leq n \leq L$, удовлетворяют уравнениям Риччи (4.15) и уравнениям Гаусса (4.16) для подмногообразий (уравнения Петерсона–Кодацци–Майнарди выполняются в этом случае автоматически). Любое решение системы уравнений (4.15) и (4.16) определяет в $(N + L)$ -мерном псевдоевклидовом пространстве единственное с точностью до движений N -мерное подмногообразие с плоской нормальной связностью, с первой квадратичной формой $g_{ij}(u) du^i du^j$ и вторыми квадратичными формами $\Omega_n(u)$ вида (6.1).

§7. Уравнения ассоциативности и нелокальные скобки Пуассона

Покажем, что класс нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа с плоскими метриками нетривиален, и опишем богатое и важное семейство операторов этого класса, порождаемое уравнениями ассоциативности двумерной топологической квантовой теории поля.

Соотношения (4.3) и (4.4), хотя и существенно различаются, но очень похожи, и особенно интересен случай естественной редукции, при которой соотношения (4.3) и (4.4) просто совпадают. Такая редукция немедленно приводит к уравнениям ассоциативности двумерной топологической теории поля.

Действительно, соотношения (4.3) и (4.4) совпадают, если $L = N$, $\mu^{mn} = \eta^{mn}$ (или, например, $\mu^{mn} = c\eta^{mn}$, где c — произвольная ненулевая константа) и существует функция $\Phi(u)$, такая, что $\psi_n = \partial\Phi/\partial u^n$ для всех n ; при этом оба соотношения (4.3) и (4.4) совпадают с уравнениями ассоциативности (5.34) двумерной топологической теории поля для потенциала $\Phi(u)$.

Таким образом, любое решение $\Phi(u)$ уравнений ассоциативности (5.34), которые, как известно, совместны, интегрируемы методом обратной задачи рассеяния и обладают богатым множеством нетривиальных решений (см. [6]), определяет нелокальный гамильтонов оператор гидродинамического типа

$$L^{ij} = \eta^{ij} \frac{d}{dx} + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \eta^{mn} \eta^{ip} \eta^{jr} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^p \partial u^m \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^r \partial u^n \partial u^s} u_x^s \quad (7.1)$$

с плоской метрикой и, более того, пучок согласованных гамильтоновых операторов

$$L_{\lambda_1, \lambda_2}^{ij} = \lambda_1 \eta^{ij} \frac{d}{dx} + \lambda_2 \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \eta^{mn} \eta^{ip} \eta^{jr} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^p \partial u^m \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^r \partial u^n \partial u^s} u_x^s, \quad (7.2)$$

где λ_1 и λ_2 — произвольные константы. В частности, если $\Phi(u)$ — произвольное решение уравнений ассоциативности (5.34), то оператор

$$L_{0,1}^{ij} = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \eta^{mn} \eta^{ip} \eta^{jr} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^p \partial u^m \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^r \partial u^n \partial u^s} u_x^s \quad (7.3)$$

является гамильтоновым оператором, согласованным с постоянным гамильтоновым оператором

$$L_{1,0}^{ij} = \eta^{ij} \frac{d}{dx}. \quad (7.4)$$

Таким образом, для любого решения уравнений ассоциативности (5.34) мы получаем соответствующие интегрируемые иерархии (см. §5).

Метрика η^{ij} всегда определяет невырожденную инвариантную симметричную билинейную форму на соответствующих фробениусовых алгебрах — коммутативных ассоциативных алгебрах $A(u)$ в N -мерном векторном пространстве с базисом $e_1, \dots, e_N$ и умножением (см. [6])

$$e_i * e_j = \eta^{ks} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^s \partial u^i \partial u^j} e_k, \quad (7.5)$$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \eta_{ij}, \quad \langle e_i * e_j, e_k \rangle = \langle e_i, e_j * e_k \rangle, \quad (7.6)$$

причем условие ассоциативности

$$(e_i * e_j) * e_k = e_i * (e_j * e_k) \quad (7.7)$$

в алгебрах $A(u)$ эквивалентно уравнениям (5.34). Напомним (см. [6]), что локально на любом фробениусовом многообразии на касательном пространстве в каждой точке имеется структура фробениусовой алгебры (7.5)–(7.7), определяемая некоторым решением уравнений ассоциативности (5.34) и гладко зависящая от точки (при этом на фробениусовых многообразиях требуется еще выполнение дополнительных условий, которые мы здесь не рассматриваем, грубо говоря, требуется наличие единицы и квазиоднородность). Таким образом, с каждым фробениусовым многообразием связаны нелокальные гамильтоновы операторы вида (7.1) и пучки (7.2).

Структурные потоки (см. [1, 5]) нелокального гамильтонова оператора (7.1) имеют вид

$$u_{t_n}^i = \eta^{is} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^s \partial u^n \partial u^k} u_x^k. \quad (7.8)$$

Эти системы являются интегрируемыми бигамильтоновыми системами гидродинамического типа и совпадают с первичной частью иерархии Дубровина, построенной по любому решению уравнений ассоциативности в [6]. Условие коммутации структурных потоков (7.8) эквивалентно опять-таки уравнению ассоциативности (5.34).

Из рассмотрений предыдущего параграфа получаем, что по теореме Петерсона–Бонне любое решение $\Phi(u)$ уравнений ассоциативности (5.34) определяет в $2N$ -мерном псевдоевклидовом пространстве единственное с точностью до движений N -мерное подмногообразие с плоской нормальной связностью, с первой квадратичной формой $\eta_{ij} du^i du^j$ и вторыми квадратичными формами

$$\omega_n(u) = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^n \partial u^i \partial u^j} du^i du^j,$$

задаваемыми потенциалом $\Phi(u)$. При этом сигнатура объемлющего псевдоевклидова пространства полностью определяется сигнатурой метрики η_{ij} . В этом случае уравнение ассоциативности совпадает и с уравнением Гаусса, и с уравнением Риччи вложенного подмногообразия. Таким образом, N -мерным фробениусовым многообразиям локально отвечает специальный класс плоских N -мерных подмногообразий с плоской нормальной связностью в $2N$ -мерном псевдоевклидовом пространстве.

Большое количество конкретных примеров фробениусовых многообразий и решений уравнений ассоциативности приведено в работе Дубровина [6]. Для экономии места мы не будем приводить здесь большого количества примеров и явного вида соответствующих гамильтоновых операторов, плоских подмногообразий и интегрируемых иерархий и рассмотрим в качестве иллюстрации только один простой пример из [6]. Пусть $N = 3$, метрика η_{ij} антидиагональна,

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

а функция $\Phi(u)$ имеет вид

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}(u^1)^2 u^3 + \frac{1}{2} u^1 (u^2)^2 + f(u^2, u^3).$$

В этом случае e_1 является единицей в соответствующей фробениусовой алгебре (7.5)–(7.7), а уравнение ассоциативности (5.34) для функции $\Phi(u)$ эквивалентно замечательному интегрируемому уравнению Дубровина

$$\frac{\partial^3 f}{\partial (u^3)^3} = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial (u^2)^2 \partial u^3} \right)^2 - \frac{\partial^3 f}{\partial (u^2)^3} \frac{\partial^3 f}{\partial u^2 \partial (u^3)^2}, \quad (7.10)$$

для функции $f(u^2, u^3)$, связанному с квантовыми когомологиями проективной плоскости и классическими задачами исчислительной геометрии (см. [7]). Как

показано автором в [8] (см. также [9]), уравнение (7.10) эквивалентно интегрируемой недиагнализуемой однородной системе гидродинамического типа

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{u^3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & 2b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{u^2}, \quad (7.11)$$

$$a = \frac{\partial^3 f}{\partial(u^2)^3}, \quad b = \frac{\partial^3 f}{\partial(u^2)^2 \partial u^3}, \quad c = \frac{\partial^3 f}{\partial u^2 \partial(u^3)^2}. \quad (7.12)$$

В этом случае аффиноры нелокального гамильтонова оператора (7.1) имеют вид

$$(w_1)_j^i(u) = \delta_j^i, \quad (w_2)_j^i(u) = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (w_3)_j^i(u) = \begin{pmatrix} 0 & c & b^2 - ac \\ 0 & b & c \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.13)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ферапонтов Е. В.* Дифференциальная геометрия нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа. Функц. анализ и его прил., **25**, вып. 3, 37–49 (1991).
2. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема. Докл. АН СССР, **270**, №4, 781–785 (1983).
3. *Мохов О. И., Ферапонтов Е. В.* О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с метриками постоянной кривизны. УМН, **45**, вып. 3, 191–192 (1990).
4. *Magri F.* A simple model of the integrable Hamiltonian equation. J. Math. Phys., **19**, No. 5, 1156–1162 (1978).
5. *Maltsev A. Ya., Novikov S. P.* On the local systems Hamiltonian in the weakly nonlocal Poisson brackets. Phys. D, **156**, Nos. 1–2, 53–80 (2001); arXiv: nlin.SI/0006030 (2000).
6. *Dubrovin B.* Geometry of 2D topological field theories. In: Integrable Systems and Quantum groups, Lecture Notes in Math., Vol. 1620, Springer-Verlag, Berlin, 1996, pp. 120–348; arXiv: hep-th/9407018 (1994).
7. *Kontsevich M., Manin Yu. I.* Gromov–Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry. Comm. Math. Phys., **164**, 525–562 (1994).
8. *Mokhov O. I.* Symplectic and Poisson geometry on loop spaces of manifolds and nonlinear equations. In: Topics in Topology and Mathematical Physics (S. P. Novikov, ed.), Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 170, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 121–151; arXiv: hep-th/9503076 (1995).
9. *Мохов О. И.* Симплектическая и пуассонова геометрия на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые уравнения. ИКИ, Москва–Ижевск, 2004.

Центр нелинейных исследований
при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
e-mail: mokhov@mi.ras.ru, mokhov@landau.ac.ru

Поступило в редакцию
10 мая 2004 г.