Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Тихонов, Спектральные компоненты для операторов со спектром на кривой, *Функц. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 2, 90–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa152>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 17:46:55

Спектральные компоненты для операторов со спектром на кривой

© 2003. А. С. Тихонов

Пусть C — простая замкнутая ориентированная гладкая кривая, G_+ — область, лежащая слева от контура C , а G_- — область, лежащая справа. Пусть $S \in [H]$, причем $\sigma_c(S) \subset C$. Здесь $[H]$ — множество ограниченных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H , и $\sigma_c(S)$ — непрерывный спектр оператора S , состоящий из всех точек спектра, за исключением изолированных собственных значений конечной кратности. Положим

$$\begin{aligned}\tilde{M}(S) &= \{f \in H : \forall g \in H ((S - z)^{-1}f, g)_+ = ((S - z)^{-1}f, g)_-, z \in C\}, \\ \tilde{N}_{\pm}(S) &= \{f \in H : \forall g \in H ((S - z)^{-1}f, g)_{\pm} \in E^2(G_{\pm})\}, \\ \tilde{D}_{\pm}(S) &= \{f \in H : \forall g \in H ((S - z)^{-1}f, g)_{\pm} \in D(G_{\pm})\},\end{aligned}$$

где $((S - z)^{-1}f, g)_{\pm}$ — угловые граничные значения для $((S - z)^{-1}f, g)$ из $G_{\pm}$, $E^2(G_{\pm})$ — класс Харди–Смирнова, $D(G_{\pm}) = \{f : f = \varphi/\delta, \varphi, \delta \in B(G_{\pm}), \delta — внешняя функция\}$ — класс Неванлинны–Смирнова, а $B(G_{\pm})$ — класс ограниченных в $G_{\pm}$ аналитических функций (см. соответствующие определения в [1]).

Рассматриваются различные комбинации этих линейалов: $\tilde{N}(S) = \tilde{N}_+(S) \cap \tilde{N}_-(S)$, $\tilde{NM}_{\pm}(S) = \tilde{N}_{\pm}(S) \cap \tilde{M}(S)$, $\tilde{DM}_{\pm}(S) = \tilde{D}_{\pm}(S) \cap \tilde{M}(S)$, $\tilde{M}_s(S) = \tilde{D}_-(S) \cap \tilde{M}(S) \cap \tilde{D}_+(S)$. Замыкание $X(S) = \text{clos } \tilde{X}(S)$, где $\tilde{X} \in \{\tilde{M}, \tilde{D}_{\pm}, \tilde{DM}_{\pm}, \tilde{N}, \tilde{N}_{\pm}, \tilde{NM}_{\pm}\}$, будем называть (слабой) спектральной компонентой для оператора S . Для сжатий и диссипативных операторов спектральные компоненты рассматривались в [2–4]. Спектральные компоненты в терминах функциональной модели для недиссипативных операторов были введены в [5]. Используемые в данной работе слабые описания спектральных компонент для операторов, близких к унитарным, были найдены несколько позднее [6–8].

Нетрудно установить, что $N(S) \perp M(S^*)$, $N_{\pm}(S) \perp DM_{\mp}(S^*)$, $NM_{\pm}(S) \perp D_{\mp}(S^*)$. В связи с этим возникает вопрос, справедливы ли следующие равенства: $N(S)^{\perp} = M(S^*)$, $N_{\pm}(S)^{\perp} = DM_{\mp}(S^*)$, $NM_{\pm}(S)^{\perp} = D_{\mp}(S^*)$. Почему этот вопрос может быть интересным? На наш взгляд это обуславливается приложениями в следующих двух областях: во-первых, в несамосопряженной теории рассеяния [9, 8, 10] и, во вторых, в теории экстремальных факторизаций для J -сжимающих оператор-функций (J -внешне-внутренняя, A -регулярно-сингулярная) [11, 12], где отправным пунктом при доказательстве теорем существования и единственности экстремальных факторизаций являются приведенные выше соотношения двойственности. В настоящей работе мы даем положительный ответ на этот вопрос в случае, если кривая имеет гладкость $C^{4+\varepsilon}$ и оператор S есть ядерное (класс ядерных операторов обозначается $\mathfrak{S}_1$) возмущение нормального оператора со спектром на этой кривой.

ТЕОРЕМА 1. Пусть C — простая замкнутая кривая гладкости $C^{4+\varepsilon}$, $U, S \in [H]$, $U^*U = UU^*$, $\sigma(U) \subset C$, $S - U \in \mathfrak{S}_1$, $\sigma_c(S) \subset C$. Тогда $N(S)^{\perp} = M(S^*)$, $N_{\pm}(S)^{\perp} = DM_{\mp}(S^*)$ и $NM_{\pm}(S)^{\perp} = D_{\mp}(S^*)$.

СЛЕДСТВИЕ. $(N_+(S) \vee N_-(S))^{\perp} = M_s(S^*)$, $N_{\pm}(S) = NM_{\pm}(S) \vee N(S)$.

При доказательстве теоремы 1 ключевую роль играет

ТЕОРЕМА 2. Пусть C — простая замкнутая кривая гладкости $C^{4+\varepsilon}$, $U, S \in [H]$, $U^*U = UU^*$, $\sigma(U) \subset C$, $S - U \in \mathfrak{S}_1$, $\sigma_c(S) \subset C$. Тогда оператор S допускает представление $S = \varphi(T_0) + N_0\kappa M_0$, где φ — конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на область G_+ , $\mathfrak{A}_0 = \begin{pmatrix} T_0 & N_0 \\ M_0 & L_0 \end{pmatrix} \in [H \oplus \mathfrak{N}]$,

$\mathfrak{A}_0^*\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0^* = I$, $T_0^{-1} \in [H]$, $M_0, N_0 \in \mathfrak{S}_2$, $\kappa \in [\mathfrak{N}]$ и $\mathfrak{N}$ — сепарабельное гильбертово пространство.

Такое представление (неединственное) дает возможность использовать для изучения оператора S функциональную модель. Рассматривается набор $\Pi = (\pi_+, \pi_-)$ из двух операторов $\pi_{\pm} \in [L^2(C, \mathfrak{N}), \mathcal{H}]$, удовлетворяющих следующим условиям: $(\pi_{\pm}^*\pi_{\pm})\psi = \psi(\pi_{\pm}^*\pi_{\pm})$ для любого $\psi \in L^\infty(C, [\mathfrak{N}])$, $(\pi_{\pm}^*\pi_{\pm})^{-1} \in [L^2(C, \mathfrak{N})]$, $z(\pi_-^\dagger\pi_+) = (\pi_-^\dagger\pi_+)z$, $P_-(\pi_-^\dagger\pi_+)P_+ = 0$ и $\text{Ran } \pi_+ \vee \text{Ran } \pi_- = \mathcal{H}$, где $\mathfrak{N}, \mathcal{H}$ — сепарабельные гильбертовы пространства, z — оператор умножения на независимую переменную, $P_{\pm}^2 = P_{\pm} \in [L^2(C, \mathfrak{N})]$, $\text{Ran } P_{\pm} = E^2(G_{\pm}, \mathfrak{N})$, $\text{Ker } P_{\pm} = E^2(G_{\mp}, \mathfrak{N})$, и $A^\dagger$ — оператор, обратный к A в смысле Мура–Пенроуза [13]. Положим $\Theta^\pm = \pi_\mp^\dagger\pi_\pm$, $\Theta_\pm^\pm = P_\pm\Theta^\pm$, $\kappa_-^r = \kappa$, $\kappa_+^r = -(I + \Theta_+^-\kappa)$, $\Theta_\pm^\pm\kappa = -(\kappa_\mp^r + \Theta_\pm^\pm\kappa_\pm^r)$, $\mathcal{H}_\Theta = \{f \in \mathcal{H} : P_+\pi_+^\dagger f = 0, P_-\pi_-^\dagger f = 0\}$. Равенства $U\pi_\pm = \pi_\pm z$ однозначно определяют нормальный оператор $U \in [\mathcal{H}]$, спектр которого абсолютно непрерывен и расположен на кривой C .

ТЕОРЕМА 3. Пусть φ — конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на G_+ , $\mathfrak{A}_0 = \begin{pmatrix} T_0 & N_0 \\ M_0 & L_0 \end{pmatrix} \in [H \oplus \mathfrak{N}]$, $\mathfrak{A}_0^*\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0^* = I$, $T_0^{-1} \in [H]$, T_0 — вполне неунитарное сжатие, $M_0, N_0 \in \mathfrak{S}_2$, $\kappa \in [\mathfrak{N}]$ и $S = \varphi(T_0) + N_0\kappa M_0$. Тогда существуют набор $\Pi = (\pi_+, \pi_-)$ и отображение $W \in [H, \mathcal{H}_\Theta]$, такие, что $W^{-1} \in [\mathcal{H}_\Theta, H]$ и $\hat{S}W = WS$, $\hat{M}W = M_0$, $\hat{N} = WN_0$, где $\hat{S}f_0 = Uf_0 + (\pi_+\kappa_+^r + \pi_-\kappa_-^r)\Theta_\pm^-(\infty)^{-1}\hat{M}f_0$, $\hat{M}f_0 = (2\pi i)^{-1} \int_C (\pi_+^\dagger f_0)(z) dz$, $f_0 \in \mathcal{H}_\Theta$, $\hat{N}m = \pi_-m - \pi_+\Theta_+^-m$, $m \in \mathfrak{N}$.

Отметим, что при $G_+ = \mathbb{D}$, $\pi_\pm^*\pi_\pm = I$ получается модель Набоко [5, 9, 6]. Если же, кроме того, $\kappa = 0$, то получается модель С.-Надя–Фойяша в бескоординатной форме [2, 14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Duren P. L. Theory of H^p Spaces. Academic Press, NY, 1970.
2. Szökefalvi-Nagy B., Foiaş C. Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space. North-Holland, Amsterdam–London, 1970.
3. Павлов Б. С. Изв. АН СССР, сер. матем., **39**, №1, 123–148 (1975).
4. Сахнович Л. А. Труды ММО, **19**, 211–273 (1968).
5. Набоко С. Н. ДАН СССР, **232**, №1, 36–39 (1977).
6. Makarov N. G., Vasjunin V. I. In: Lect. Notes in Math., Vol. 864, 1981, pp. 365–412.
7. Makarov N. G. In: Proc. Alfred Haar memorial conference, Budapest, 1985, pp. 611–621.
8. Тихонов А. С. Абсолютно непрерывный спектр линейного оператора. Деп. УкрНИИТИ, №2471-Ук88, 1988.
9. Набоко С. Н. Труды МИАН, **147**, 86–114 (1980).
10. Тихонов А. С. Алгебра и анализ, **7**, вып. 1, 200–220 (1995).
11. Tikhonov A. S. In: Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 118, 2000, pp. 405–415.
12. Arov D. Z. Lect. Notes in Math., Vol. 1043, 1984, pp. 164–168.
13. Horn R., Johnson C. Matrix Analysis. Cambridge University Press, 1986.
14. Nikolski N. K., Vasjunin V. I. MSRI Publications, **33**, 211–302 (1998).