Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Арнольд, Топология алгебры: комбинаторика операции возведения в квадрат, *Функц. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 3, 20–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa155>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:13:34

УДК 51+515+512+519.1+511+517.938

Топология алгебры: комбинаторика операции возведения в квадрат*

© 2003. В. И. Арнольд

Объектом топологического изучения могут служить не только кривые и поверхности, но и алгебраические формулы. Топологическая структура простейших алгебраических теорий уже нетривиальна. Например, малая теорема Ферма (обобщенная Эйлером) есть утверждение о прямоугольности диаграммы Юнга перестановки взаимно простых с модулем вычетов при умножении их на один из этих вычетов. Ниже доказаны некоторые следствия подобных симметрий простейших алгебраических и теоретико-числовых конструкций, прежде всего — операции возведения элементов групп или колец в квадрат.

Начинается эта теория с комбинаторики итераций любой операции, относящейся к общей теории множеств и логике больше, чем к алгебре.

§1. Алгебра монад и топология их графов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Монадой* называется отображение конечного множества в себя. *Граф монады* имеет вершинами все элементы этого конечного множества, а ориентированные ребра соединяют каждый элемент с его образом.

Иными словами, *граф монады* — это произвольный конечный ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит ровно одно ребро.

Итерации монады приводят любую вершину к циклу-аттрактору, как показывает следующая

ТЕОРЕМА 1. *Каждая связная компонента графа монады представляет собой лес из ориентированных к корням корневых деревьев, корни которых соединены ориентированным циклом (топологически окружностью) из ребер, соединяющих корни деревьев.*

Число вершин цикла может быть равно 1, в этом случае вся компонента — одно корневое дерево (см. примеры A_1 и T_4 ниже).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Траектория выходящего из любой вершины движения вдоль ориентированных ребер самопересекается вследствие конечности графа, поэтому цикл в компоненте есть.

Дерево точки цикла — это подграф, который имеет вершинами те вершины исходного графа, пути из которых впервые выходят на цикл в этой вершине. Этот подграф — дерево. Действительно, если бы в нем был цикл, то этот цикл был бы ориентирован (иначе из одной его вершины выходило бы два ребра).

Но два разных ориентированных цикла не могут лежать в одной компоненте связности графа монады, так как на связывающем их пути должна бы была быть вершина, из которой выходит больше одного ребра (лежащая, быть

*Частично поддержано РФФИ, грант 02-01-00655.

может, на одном из циклов, что тоже невозможно, так как на циклах выходящие ребра направлены вдоль них).

Поэтому построенный подграф — дерево, ориентированное к лежащему на цикле корню, и теорема доказана.

ПРИМЕР. Пусть G — конечная группа, отображение «Фробениуса» $A: G \rightarrow G$ переводит каждый ее элемент g в его квадрат: $A(g) = g^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Это отображение A назовем *монадой группы* G .

Графы монад простейших циклических групп (групп вычетов по модулю $n \leq 8$) изображены ниже. Операция в группе записана аддитивно, как сложение вычетов, надписанных около вершин графов, так что «возведение в квадрат» удваивает вычет. Выписанные справа обозначения графов определены в более общем виде ниже.

Здесь и ниже простейшие ориентированные графы обозначаются, как это указывает

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Символы O_n , A_n , T_m , E_n означают следующие ориентированные графы:

O_n = ориентированный цикл из n вершин;

A_n = связный граф из $2n$ вершин, представляющий собой цикл длины n , оснащенный n односторонними деревьями, входящими по одному в каждую из n вершин цикла;

T_{2^n} = корневое дерево с 2^n вершинами и n этажами кроме корня, ветвящееся бинарно на этажах $1, \dots, n-1$ (в каждую вершину такого этажа приходят ровно два ребра со следующего этажа); корень считается нулевым этажом, и в него тоже входят два ребра: одно — от него самого и одно — от единственной вершины первого этажа;

E_n = корневое дерево с n вершинами, из каждой из которых ребро ведет прямо в корень (так что $E_2 = A_1 = T_2$).

Применим теорему 1 к ситуации обобщенной Эйлером малой теоремы Ферма.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Группой Эйлера* $\Gamma(n)$ (где n — натуральное число) называется мультипликативная группа, образованная всеми взаимно простыми с n остатками от деления на n (вычетами по модулю n), включая формально и тривиальный случай $\Gamma(1) = \{1\}$.

ПРИМЕР. Список нетривиальных групп Эйлера начинается с групп

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= \{1\}, & \Gamma(3) &\approx \mathbb{Z}_2, & \Gamma(4) &\approx \mathbb{Z}_2, & \Gamma(5) &\approx \mathbb{Z}_4, \\ \Gamma(6) &\approx \mathbb{Z}_2, & \Gamma(7) &\approx \mathbb{Z}_6, & \Gamma(8) &\approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.\end{aligned}$$

Описание всех групп Эйлера имеется, например, в школьной лекции [1].

Графы монад простейших групп Эйлера изображены ниже. Цифры у их вершин означают вычеты (элементы групп $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$), но операция — *умножение*, а не сложение вычетов.

$$\Gamma(2): \quad \begin{array}{c} 1 \\ \circlearrowleft \end{array} = O_1;$$

$$\Gamma(3): \quad \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \circlearrowleft \quad \circ \end{array} = A_1;$$

$$\Gamma(4): \quad \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \circlearrowleft \quad \circ \end{array} = A_1;$$

$$\Gamma(5): \quad \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \circlearrowleft \quad \circ \\ \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad 4 \\ \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad 3 \end{array} = T_4;$$

$$\Gamma(6): \quad \begin{array}{c} 1 \quad 5 \\ \circlearrowleft \quad \circ \end{array} = A_1;$$

$$\Gamma(7): \quad \begin{array}{c} 1 \quad 6 \\ \circlearrowleft \quad \circ \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \leftarrow \circ \end{array} = A_1 + A_2;$$

$$\Gamma(8): \quad \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \circlearrowleft \quad \circ \\ \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad \circ \quad \circ \\ \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad \circ \quad \circ \end{array} = D_1.$$

ПРИМЕР. Последний граф с 4 вершинами изображает 4 сравнения

$$1^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad 3^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad 5^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad 7^2 \equiv 1 \pmod{8},$$

а предпоследний содержит сравнение $5^2 \equiv 4 \pmod{7}$ (в своем крайне правом ребре) и еще пять других сравнений по модулю 7: $4^2 \equiv 2$ и т. д.

Здесь использовано обозначение D_n для $4n$ -вершинного графа, состоящего из цикла O_n длины n , оснащенного в каждой своей вершине тремя подходящими к ней ребрами (образующими вместе с этой лежащей на цикле вершиной корневое дерево $D_1 \approx E_4$).

Оснащение цикла O_n этими деревьями является частным случаем следующей общей конструкции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Произведением* $A * B$ монад A и B , действующих на X и на Y соответственно, называется монада, действующая на прямом произведении $X \times Y$ покомпонентно:

$$(A * B)(x, y) = (Ax, By).$$

Число элементов монады-произведения равно произведению чисел элементов монад-сомножителей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Граф монады-произведения мы будем называть *произведением графов* сомножителей и обозначать знаком $*$ операцию умножения и над графами:

$$[\text{граф}(A * B)] = [\text{граф}(A)] * [\text{граф}(B)].$$

ПРИМЕР. Имеют место тождества, разлагающие графы A_n и D_n на множители:

$$A_1 * O_n = A_n, \quad D_1 * O_n = D_n.$$

Это ассоциативное умножение « $*$ » очевидно дистрибутивно относительно несвязного объединения « $+$ » и может, как и объединение, считаться коммутативным (в силу естественных изоморфизмов $A + B \sim B + A$, $A * B \sim B * A$).

Умножение любого корневого дерева X на O_n оснащает n -цикл O_n корневыми деревьями вида X с корнями во всех точках цикла.

Мы исследуем ниже алгебру монад возведения в квадрат в коммутативных группах и, в частности, в группах Эйлера натуральных чисел, а также в симметрических группах.

§2. Описание графов операции возведения в квадрат

Начнем с монад и графов циклических групп, из которых все конечные коммутативные группы и их монады и графы получаются прямым перемножением.

ЛЕММА 1. *Граф операции умножения на 2 (т.е. сложения элемента с самим собой) в аддитивной циклической группе нечетного порядка разбивается на непересекающиеся циклы O_{n_i} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если бы в какую-нибудь вершину вело два ребра, из x и из y , то мы получили бы $2x \equiv 2y \pmod{(2n+1)}$ для циклической группы порядка $2n+1$, т.е. $x \equiv y$ — одна и та же вершина.

Значит, в вершины цикла ведут пути графа только из точек этого же цикла, так что циклы и не пересекаются, и не оснащены лишними корневыми деревьями, что и доказывает лемму.

ЛЕММА 2. *Граф операции умножения на 2 (сложения с собой) в аддитивной циклической группе вычетов по модулю 2^n есть бинарное корневое дерево T_{2^n} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже видели, что это так для $n = 1, 2$ и 3 . В общем случае разделим все 2^n вычетов на две части: подгруппу из 2^{n-1} четных вычетов и остаток из 2^{n-1} нечетных вычетов.

Подгруппа четных вычетов циклическая (образующая — элемент 2). По индукции предполагаем, что граф удвоения в ней есть дерево $T_{2^{n-1}}$ и что верхний этаж в нем образуют 2^{n-2} не делящихся на 4 вычетов.

Докажем, что оставшиеся 2^{n-1} вершин (нечетные вычеты) образуют дополнительный (n -й) этаж дерева T_{2^n} , т.е. что выходящие из них ребра ведут от ровно двух из них в каждую вершину верхнего ($(n-1)$ -го) этажа предыдущего дерева, $T_{2^{n-1}}$.

А именно, этот верхний этаж образуют не делящиеся на 4 четные вычеты по модулю 2^n . Удвоение нечетного вычета именно таково. Если два нечетных вычета x и $y \pmod{2^n}$ имеют общее удвоение, $2x \equiv 2y \pmod{2^n}$, то $x \equiv y \pmod{2^{n-1}}$, т.е. вычет разности $x - y$ по модулю 2^n делится на 2^{n-1} . Значит, он равен либо 0, либо 2^{n-1} , т.е. в вершину верхнего этажа дерева $T_{2^{n-1}}$ ведут два ребра из ровно двух нечетных вычетов по модулю 2^n , что и доказывает лемму.

Коммутативная группа представляет собой прямое произведение циклических групп. Поэтому из лемм 1 и 2 вытекает

ТЕОРЕМА 2. *Монады всех конечных коммутативных групп представляют собой суммы произведений нескольких монад видов O_n и T_{2^m} .*

ПРИМЕР. Монада группы Эйлера $\Gamma(125) \approx \mathbb{Z}_{100}$ есть сумма трех слагаемых:

$$[\text{монада}(\mathbb{Z}_{100})] = T_4 + (T_4 * O_4) + (T_4 * O_{20}).$$

Для получения графа операции возведения в квадрат всех 125 вычетов по модулю 125 нужно прибавить еще одно слагаемое: корневое 25-вершинное дерево с четырьмя приходящими к корню ребрами, два из которых начинаются в общем конце десятка ребер (каждое).

§3. Таблица умножения графов

ЛЕММА 3. *Произведение циклических монад O_m и O_n есть сумма одинаковых циклических монад, а именно*

$$O_m * O_n = dO_c,$$

где число слагаемых $d = (m, n)$ — наибольший общий делитель периодов m и n , а $c = mn/d$ — их наименьшее общее кратное.

Точно так же вычисляется и произведение нескольких циклических монад: это повторенная d раз циклическая монада O_c , где c — наименьшее общее кратное порядков сомножителей, а dc равно произведению этих порядков.

ПРИМЕРЫ. Имеют место тождества $O_2 * O_2 = 2O_2$, $O_3 * O_6 = 3O_6$, $O_6 * O_{15} = 3O_{30}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проекция орбиты каждого элемента-произведения, последовательно возводимого в квадрат t раз, имеют наименьшие периоды $t = m$ для проекции на O_m и $t = n$ для проекции на O_n . Поэтому наименьший общий период в $O_m * O_n$ есть наименьшее общее кратное, c , чисел m и n . А так как число вершин графа $O_m * O_n$ есть mn , то число орбит есть $mn/c = d$.

Полезно отметить, что $O_2 * O_{2k} = 2O_{2k}$, $O_2 * O_{2k+1} = O_{4k+2}$, $O_3 * O_5 = O_{15}$. Для большего числа сомножителей утверждение следует из доказанного выше для двух сомножителей.

СЛЕДСТВИЕ. *Имеют место соотношения*

$$O_m * A_n = dA_c, \quad A_m * A_n = dD_c.$$

Первое следует из леммы 3 ввиду соотношения $A_n = A_1 * O_n$, а второе — еще и из доказанных выше соотношений $D_n = D_1 * O_n$, $A_1 * A_1 = D_1$.

Для вычисления всевозможных произведений графов и монад D_n (на O_m , A_m , D_m) полезно отметить, что A_1^k есть граф E_{2^k} : корневое дерево из 2^k вершин, ребра из каждой из которых сразу ведут к корню (например, $E_2 = A_1$, $E_4 = D_1$).

Действительно, каждый элемент группы $(\mathbb{Z}_2)^k$ становится нулем при сложении с самим собой (которое и есть «возведение в квадрат» при аддитивной записи группы).

Например, имеют место тождества (графов и монад)

$$D_1^2 = A_1 * A_1 * A_1 * A_1 = E_{16}, \quad D_m * D_n = dE_{16}O_c.$$

Вычислим граф группы Эйлера $\Gamma(125)$, равной $\mathbb{Z}_{100} \approx \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25}$. Начнем с вычисления графов для групп-сомножителей.

Граф удвоений элементов циклической группы нечетного порядка $\mathbb{Z}_{25}$ разбивается на циклы длин 20, 1 и 4, так как орбитами удвоения вычетов по модулю 25 являются

$$0, \{1, 2, 4, 8, 16, 7, 14, 3, 6, 12, (24 \sim -1), -2, \dots, (-12 \sim 13)\}, \{5, 10, 20, 15\}.$$

Стало быть, монада удвоений циклической группы $\mathbb{Z}_{25}$ есть сумма трех слагаемых $O_1 + O_4 + O_{20}$. С другой стороны, граф монады удвоений циклической группы $\mathbb{Z}_4$ есть дерево T_4 . Стало быть, для произведения мы получаем представление

$$[\text{граф}(\mathbb{Z}_{100})] = T_4 + (T_4 * O_4) + (T_4 * O_{20}).$$

В явном виде эти три слагаемых (с указанием вычетов вершин) таковы:

Это значит, например, что $26^2 \equiv 51 \pmod{100}$ и т. д. Особенно долго и чревато ошибками вычисление самой большой компоненты графа (топологию которой лучше найти заранее):

Таблицы квадратичных вычетов в учебниках должны бы были выглядеть именно так.

Симметрии всех этих графов являются далекими обобщениями малой теоремы Ферма (эти связи подробно описаны в [1–3]).

Теорема 2 (§2) показывает, что *никаких более сложных узоров, кроме произведений нескольких деревьев $T_{2^{m_i}}$ и циклов O_n , в графах монад коммутативных групп не встречается*: граф конечной коммутативной группы есть несвязное объединение циклов, оснащенных произведениями бинарных деревьев, т. е. объединение графов вида $O_n * \prod T_{2^{m_i}}$. Вычисление числа слагаемых и значений чисел m_i и n через порядки циклических сомножителей требует, однако, исследования периода T операции удвоения (вычетов по фиксированному модулю). Это исследование, начатое Ферма (для простого модуля) и Эйлером (для составного) продолжено в [1–3], но даже средняя асимптотика периода $T(n)$ прогрессии $\{2^t \pmod n\}$ не доказана (эксперименты подсказывают, по-видимому, степенной в среднем рост периода T с модулем n). Не вычислено явно и число компонент графа для операции удвоения в $\Gamma(n)$.

§4. Таблицы графов удвоений в циклических группах

Ниже перечислены графы монад $x \mapsto 2x$ в аддитивных циклических группах $\mathbb{Z}_n$ вычетов по модулю $n \leq 20$.

n	граф удвоений	n	граф удвоений	n	граф удвоений	n	граф удвоений
2	A_1	7	$O_1 + 2O_3$	12	$T_4 + (T_4 * O_2)$	17	$O_1 + 2O_8$
3	$O_1 + O_2$	8	T_8	13	$O_1 + O_{12}$	18	$A_1 + A_2 + A_6$
4	T_4	9	$O_1 + O_2 + O_6$	14	$A_1 + 2A_3$	19	$O_1 + O_{18}$
5	$O_1 + O_4$	10	$A_1 + A_4$	15	$O_1 + O_2 + 3O_4$	20	$T_4 + (T_4 * O_4)$
6	$A_1 + A_2$	11	$O_1 + O_{10}$	16	T_{16}		

Для нечетного простого числа $n = p$ граф удвоений имеет вид $O_1 + NO_{T(p)}$, где $T(p)$ — наименьший период геометрической прогрессии $\{2^t \pmod p\}$.

Доказательства этих фактов изложенными выше методами несложны. Например, $\mathbb{Z}_{15} = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$, поэтому граф (монада) группы $\mathbb{Z}_{15}$ есть произведение графов (монад) сомножителей:

$$[\text{граф}(\mathbb{Z}_{15})] = (O_1 + O_2)(O_1 + O_4) = O_1O_1 + O_1O_4 + O_2O_1 + O_2O_4 \\ = O_1 + O_4 + O_2 + 2O_4 = O_1 + O_2 + 3O_4.$$

Мы использовали, что $O_2O_4 = 2O_4$ по лемме 3 §3 (так как наибольший общий делитель чисел 2 и 4 есть 2, а наименьшее их общее кратное есть 4).

Встречающееся при $n = 12$ и при $n = 20$ произведение $T_4 * O_k$ легко вычисляется: этот связный граф из $4k$ вершин состоит из k корневых деревьев T_4 с соединенными в цикл длины k своими корнями. В примере, вычисляющем граф для $\mathbb{Z}_{12}$, дерево $T_4 * O_2$ имеет следующий вид (с указанием восьми вычетов $\pmod{12}$, являющихся его вершинами):

$$T_4 * O_2 = \begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & & 5 \\ & & \searrow & & \rightarrow & & \swarrow \\ & & 2 & \rightarrow & 4 & \rightleftharpoons & 8 & \leftarrow & 10 & \nwarrow & 11 \\ & & \swarrow & & \nwarrow & & \swarrow & & \nwarrow & & \end{array}$$

Это значит, например, что $7 + 7 \equiv 2 \pmod{12}$, $8 + 8 \equiv 4 \pmod{12}$.

Укажу заодно простейшие графы $T_4 * A_k$: они имеют, как легко сосчитать, вид

с одним циклом длины k , двумя подходящими к каждой точке цикла простыми ребрами и еще одним, оснащающим каждую вершину корневым деревом (имеющим одну вершину на первом этаже и четыре на втором). Умножение деревьев обсуждается ниже в §7.

Вычисления в алгебре графов гораздо проще, чем прямое вычисление квадратов вычетов. Например, для $n = 20$ вычисления таковы:

$$\begin{aligned} [\text{граф удвоений в } \mathbb{Z}_{20}] &= [\text{граф удвоений в } \mathbb{Z}_4] * [\text{граф удвоений в } \mathbb{Z}_5] \\ &= T_4 * (O_1 + O_4) = T_4 + (T_4 * O_4). \end{aligned}$$

Мы использовали тождество $T_4 * O_1 = T_4$ (тривиальный граф O_1 с одной вершиной является единицей нашего умножения).

§5. Графы возведения в квадрат в группах Эйлера

Ниже перечислены графы монад $x \mapsto x^2$ в группах Эйлера $\Gamma(n)$ (мультипликативных группах взаимно простых с n вычетов по модулю n) и в содержащих их кольцах $\mathbb{Z}_n$ (для $n \leq 20$).

Мы воспользуемся сведениями из [1]: циклическостью групп Эйлера $\Gamma(n)$, когда число n простое или степень нечетного простого числа,

$$\Gamma(p^a) \approx \mathbb{Z}_{\varphi(p^a)}, \quad \text{где } \varphi(p^a) = (p-1)p^{a-1},$$

а также соотношением мультипликативности

$$\Gamma(mn) = \Gamma(m) \times \Gamma(n)$$

при взаимно простых сомножителях m и n . Кроме того,

$$\Gamma(2^n) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{n-2}},$$

так что вычисление графа возведения в квадрат в группе Эйлера $\Gamma(n)$ всегда сводится к перемножению графов «удвоения» в циклических сомножителях группы Эйлера, рассматриваемых как аддитивные группы вычетов.

Используя таблицу §4, мы находим следующий список графов операции возведения в квадрат в группах Эйлера $\Gamma(n)$:

n	граф возведения в квадрат	n	граф возведения в квадрат	n	граф возведения в квадрат	n	граф возведения в квадрат
2	O_1	7	$A_1 + A_2$	12	D_1	17	T_{16}
3	A_1	8	D_1	13	$T_4 + (T_4 * O_2)$	18	$A_1 + A_2$
4	A_1	9	$A_1 + A_2$	14	$A_1 + A_2$	19	$A_1 + A_2 + A_6$
5	T_4	10	T_4	15	$T_4 * A_1$	20	$T_4 * A_1$
6	A_1	11	$A_1 + A_4$	16	$T_4 * A_1$		

Например, $\Gamma(15) = \Gamma(3) \times \Gamma(5)$, поэтому граф возведения в квадрат в группе $\Gamma(15)$ есть произведение графов возведения в квадрат в группах $\Gamma(3)$ и $\Gamma(5)$, т.е. графов, равных A_1 и T_4 соответственно. Можно воспользоваться и тем, что $\Gamma(3) \approx \mathbb{Z}_2$, $\Gamma(5) \approx \mathbb{Z}_4$, так что достаточно перемножить графы удвоений в аддитивных группах $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_4$, указанные в таблице §4.

Точно так же, граф возведения в квадрат в циклической группе $\Gamma(13) \approx \mathbb{Z}_{12}$ есть граф операции удвоения в аддитивной группе вычетов по модулю 12, указанный в таблице §4. Все результаты приведенной выше таблицы графов операции возведения в квадрат получаются подобными вычислениями произведений из результатов §4.

§6. Возведение в квадрат в кольце вычетов

«Расширяя» группу Эйлера $\Gamma(n) \subset \mathbb{Z}_n$ до всего кольца вычетов по модулю n (которое уже не является мультипликативной группой), мы можем и здесь рассмотреть операцию возведения вычета в квадрат. Граф этой монады содержит граф возведения в квадрат в группе Эйлера $\Gamma(n)$ в виде поднабора компонент связности, так как квадрат вычета не может быть взаимно простым с модулем, если сам вычет таковым не был (и не может перестать быть взаимно простым с модулем при возведении в квадрат).

Поэтому для описания графа операции возведения в квадрат в кольце вычетов $\mathbb{Z}_n$ достаточно добавить к графу этой операции в группе Эйлера $\Gamma(n)$ еще некоторый (не связанный ребрами с ним) дополнительный граф Δ .

Эта конструкция похожа на формулу Эйлера

$$n = \sum \varphi(d) \quad (d = 1, \dots, n - \text{делитель числа } n),$$

в которой слагаемое $\varphi(n)$ соответствует вкладу графа группы Эйлера $\Gamma(n)$, а остальные слагаемые — вкладу дополнительного графа Δ .

Дополнительные графы Δ для операции возведения в квадрат вычетов по модулю n имеют (при $n \leq 20$) следующий вид:

n	$\Delta(n)$	n	$\Delta(n)$	n	$\Delta(n)$	n	$\Delta(n)$
2	O_1	7	O_1	12	$2A_1 + D_1$	17	O_1
3	O_1	8	T_4	13	O_1	18	$A_1 + A_2 + 2E_3$
4	A_1	9	E_3	14	$2O_1 + A_1 + A_2$	19	O_1
5	O_1	10	$2O_1 + T_4$	15	$O_1 + A_1 + T_4$	20	$2A_1 + (T_4 * A_1)$
6	$2O_1 + A_1$	11	O_1	16	$T_4 * A_1$		

Знаком E_n здесь обозначено корневое дерево с n вершинами, из каждой из которых ведет сразу в корень ребро (так что $E_2 = A_1$, $E_4 = D_1$). Доказательство сформулированной этой таблицей теоремы несложно.

В случае простого значения модуля n группа Эйлера состоит из всех вычетов, кроме нуля, так что к графу возведения в квадрат в группе Эйлера добавляется только одна эта точка O_1 . В нее не ведет ни одно другое ребро, так как квадрат ненулевого вычета по простому модулю — ненулевой вычет.

В других случаях приходится исследовать действие возведения в квадрат на не взаимно простых с модулем вычетах. Например, для модуля 6 мы получаем

граф возведения вычетов в квадрат из четырех компонент (две типа O_1 и две типа A_1):

Группу Эйлера $\Gamma(5) \approx \mathbb{Z}_2$ составляет компонента $A_1 = \{1, 5\}$, а остальные три компоненты доставляют добавочный граф $\Delta = 2O_1 + A_1$.

§7. Произведения корневых деревьев

Произведение монад, графы которых являются корневыми деревьями, также имеет графом корневое дерево, которое мы будем называть *произведением двух исходных деревьев*.

Вершинами произведения являются пары вершин сомножителей, и если в графе X из x выходит ребро, ведущее в a , а из y в графе Y — ведущее в b , то из вершины (x, y) дерева $X * Y$ ребро выходит в (a, b) . Цикл в произведении $X * Y$ проектируется в циклы в X и в Y , поэтому произведение корневых деревьев является корневым деревом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Ранг $r_i(X)$ корневого дерева — это число его вершин i -го этажа, т.е. отстоящих от корня на i ребер. Например, $r_0(X) = 1$, $r_1(A_1) = 1$, $r_1(D_1) = 3$, $r_1(E_m) = m - 1$, $r_i(T_{2^n}) = 2^{i-1}$ при $0 < i \leq n$.

При перемножении корневых деревьев ранги вершин расстояния i ведут себя так:

$$r_k(X * Y) = \sum r_i(X) r_j(Y),$$

где $\max(i, j) = k$.

Это следует из того, что путь, ведущий в корень произведения, проектируется в пару путей, ведущих в корни сомножителей, а пара путей, ведущих в корни сомножителей, всегда является парой проекций определяемого ими пути, ведущего в корень в произведении.

Это соображение позволяет легко перемножать, например, деревья T_{2^n} :

так как таблица произведений рангов, $r_i r_j$, есть

1	1	2
1	1	2
2	2	4

и поэтому $r_k(T_4 * T_4) = (1, 3, 12)$ ($k = 0, 1, 2$) (суммирование по отмеченным углам матрицы произведений рангов).

Точно так же мы получаем ранги других произведений деревьев T_{2^n} .

ТЕОРЕМА 3. Ранги квадрата бинарного корневого дерева суть

$$r_k(T_{2^n} * T_{2^n}) = 3 \cdot 4^{k-1} \quad \text{при } k = 1, \dots, n.$$

Если заменить второй сомножитель бóльшим бинарным деревом, T_{2^m} , где $m > n$, то последовательность рангов продолжится степенями двойки:

$$(r_{n+1}, \dots, r_m) = (4^n, 2 \cdot 4^n, 4 \cdot 4^n, \dots, 2^{m-1}).$$

Произведения $T_8 * T_2$ ($r_i = 1, 3, 4, 8$) и $T_8 * T_4$ ($r_i = 1, 3, 12, 16$) выглядят так:

Число ребер графа-произведения, приходящих в вершину-произведение, равно произведению чисел ребер графов-сомножителей, приводящих в умножаемые вершины в сомножителях. Число R_n (не обязательно бинарных) корневых деревьев с n (не считая корня) вершинами растет с числом вершин так:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
R_n	1	1	2	4	9	20	48	114

Отсюда следует, что большинство корневых деревьев просто (не представляется в виде произведения меньших деревьев). Я не знаю ни как растет число простых корневых деревьев, ни единственно ли разложение корневого дерева на простые множители. Малость R_n по сравнению с факториалом указывает на изобилие автоморфизмов меньших корневых деревьев.

Перечисление корневых деревьев близко к рассматривавшейся, по словам Плутарха, Гиппархом [4] задаче о том, сколько сложных предложений можно составить из n простых (для $n = 10$ число сложных предложений равно 103049) и к теореме Кэли о числе корневых деревьев с n занумерованными некорневыми вершинами (число таких деревьев равно $(n+1)^{n-1}$, степени отображения Ляшко–Лоенги особенности A_n , т. е. 1, 3, 16, 125, ... при $n = 1, 2, \dots$). Сравнение асимптотик этих чисел и чисел R_n доставляет информацию о числе автоморфизмов случайного корневого дерева.

§ 8. Графы возведения в квадрат в симметрических группах

Граф операции возведения в квадрат в группе $S(n)$ перестановок n элементов можно вычислять при помощи диаграмм Юнга перестановок, составляющих эту группу. Диаграмма Юнга перестановки определяет диаграмму Юнга ее квадрата. Ответы получаются следующие (ребра графов ведут от диаграмм Юнга перестановок к диаграммам Юнга их квадратов).

$S(2) \approx \mathbb{Z}_2$, поэтому граф есть

У каждой вершины графа указана диаграмма Юнга той перестановки, которой является эта вершина. Знак минус у диаграммы Юнга указывает на нечетность соответствующей перестановки.

Группа $S(3)$ симметрий треугольника имеет 3 элемента второго порядка и содержит кроме них еще подгруппу вращений $\mathbb{Z}_3$, поэтому граф возведения в ней в квадрат состоит из двух компонент: $D_1 + O_2$,

$$D_1 : \begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \begin{array}{|c|} \hline - \\ \hline \end{array}, \quad O_2 : \boxed{231} + \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \end{array} \boxed{312} +.$$

Группа $S(4)$ разрешима и имеет нормальным делителем подгруппу $S^+(4)$ из 12 четных перестановок. Графы возведения в квадрат в обеих этих группах состоят каждый из пяти компонент связности.

$$[\text{Граф группы } S^+(4)] = D_1 + 4O_2,$$

$$D_1 : \begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline \end{array}, \quad O_2 : \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \end{array} \begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline \end{array}.$$

Граф всей группы $S(4)$ имеет вместо D_1 компоненту, являющуюся корневым деревом с рангами $(1, 9, 6)$:

Группа $S^+(5)$ состоит из 60 четных перестановок пяти элементов. Ее граф состоит из семнадцати компонент,

$$[\text{граф группы } S^+(5)] = 10O_2 + 6O_4 + E_{16},$$

$$O_2 : \begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \begin{array}{|c|} \hline - \\ \hline \end{array}, \quad O_4 : \begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \end{array} \begin{array}{|c|} \hline - \\ \hline \end{array}, \quad E_{16} : \begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \quad \curvearrowright \end{array} \begin{array}{|c|} \hline - \\ \hline \end{array}.$$

Группа $S(5)$ всех 120 перестановок пяти элементов имеет граф тоже из 17 компонент,

$$[\text{граф группы } S(5)] = 10A_2 + 6O_4 + B,$$

где корневое дерево B имеет ранги $(1, 25, 30)$:

Группа $S^+(6)$ состоит из 360 четных перестановок шести элементов. Ее граф состоит из 77 компонент:

$$[\text{граф группы } S^+(6)] = 36O_4 + 40O_2 + C^+,$$

где корневое дерево C^+ имеет ранги (1, 45, 90): диаграммы Юнга вершин этих компонент указаны ниже:

С учетом 360 нечетных перестановок компонент тоже 77:

$$[\text{граф группы } S(6)] = 36O_4 + 40D_2 + C.$$

Половина из сорока компонент вида D_2 образована циклическими перестановками и их квадратами,

а вторая половина — перестановками с циклами длин (3, 2, 1) и их квадратами (длины циклов которых (3, 1, 1, 1)):

Корневое дерево C имеет ранги (1, 75, 180). Диаграммы Юнга перестановок, являющихся его вершинами, таковы:

Группа $S^+(7)$ состоит из 2520 четных перестановок семи элементов. Ее граф имеет 542 связные компоненты, а именно

$$[\text{граф группы } S^+(7)] = 240O_3 + 126O_4 + 140O_2 + 35D_2 + Y,$$

где корневое дерево Y имеет ранги $(1, 105, 630)$. Вид компонент графа:

Полный граф всей группы 5040 перестановок семи элементов имеет тоже 542 компоненты:

$$[\text{граф группы } S(7)] = 240O_3 + 124\tilde{O}_4 + 140\tilde{O}_2 + 35\tilde{D}_2 + \tilde{Y}.$$

Индекс в обозначении указывает порядок цикла, оснащением которого является компонента. Волной обозначены здесь изображенные ниже расширения компонент графа $S^+(7)$. Корневое дерево $\tilde{Y}$ изображено ниже и имеет ранги $(1, 231, 840)$. Имеют место топологические тождества $\tilde{O}_2 \sim D_2$, $\tilde{O}_4 \sim A_4$.

Перечень диаграмм Юнга перестановок, являющихся вершинами расширенных компонент графа операции возведения в квадрат в группе $S(7)$, содержит все 15 диаграмм Юнга площади 7:

Компонента тождественной перестановки имеет вид следующего дерева $\tilde{Y}$:

Например, шесть ребер, ведущих от перестановок с циклами длин $(4, 2, 1)$ к одной из 105 перестановок с циклами длин $(2, 2, 1, 1, 1)$, означают следующие факты. Перестановка с циклами длин $(4, 2, 1)$ может быть записана в виде $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4, 5 \rightarrow 6, 7)$. Квадрат этой перестановки есть перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ с циклами длин $(2, 2, 1, 1, 1)$. Докажем, что *такой же квадрат имеют ровно 6 (из 630) перестановок с циклами длин $(4, 2, 1)$* . В исходной перестановке цикл $(1, 2, 3, 4)$ можно, не меняя квадрата, заменить только на $(1, 4, 3, 2)$, а транспозицию $(5, 6)$ — только на $(5, 7)$ или $(6, 7)$. Два варианта цикла длины 4 и три варианта цикла длины 2 порождают (единственные) $3 \cdot 2 = 6$ комбинаций, имеющих циклы длин $(4, 2, 1)$ и фиксированный квадрат.

Эти шесть перестановок с циклами длин $(4, 2, 1)$ и соединены со своим общим квадратом (с циклами длин $(2, 2, 1, 1, 1)$) на изображении дерева $\tilde{Y}$, в его верхней части.

ТЕОРЕМА 4. *Каждая связная компонента графа возведения в квадрат группы $S(n)$ перестановок n элементов представляет собой однородно оснащенный цикл, т. е. граф вида $O_k * T$, где T — корневое дерево. Это верно и для подгруппы $S^+(n)$ четных перестановок.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если перестановка x принадлежит циклу длины $k > 1$, то она имеет нечетный порядок N , так как k -кратное возведение x в квадрат превращает эту перестановку в свою четную степень x^M , и условие замыкания цикла $x^M = x$ означает нечетность ее порядка $N = M - 1$.

ЛЕММА. *Перестановка нечетной степени сопряжена своему квадрату.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все циклы такой перестановки имеют нечетные длины. Квадрат циклической перестановки z нечетной длины m — тоже циклическая перестановка, так как все элементы $(z^2)^t a$ ($t = 1, \dots, m$) различны, иначе перестановка z имела бы цикл четной длины, меньшей $2m$.

Поэтому циклическая перестановка нечетной длины m сопряжена своему квадрату, а значит, это верно и для любой перестановки нечетной степени, и лемма доказана.

Построенное по перестановке x сопряжение группы $S(n)$ переводит граф операции возведения в квадрат в себя, причем его точка x переходит в x^2 , т. е. сдвигается на одно место вдоль цикла. Компонента этого цикла вся переходит при построенном сопряжении в себя, с поворотом цикла на одно ребро.

Граф любой монады имеет компонентами оснащенные деревьями циклы-аттракторы (см. теорему §1). Построенная симметрия компоненты доказывает однородность этого оснащения (одинаковость оснащающих все вершины цикла деревьев).

Для подгруппы четных перестановок лемма не верна (например, циклические перестановки $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ и $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ степени 3 не сопряжены в ней). Но и теорему, и доказательство, можно перенести на этот случай, используя сопряженность не в группе четных, а в группе всех перестановок (доставляющую не внутренний, а внешний автоморфизм группы S^+). Этот автоморфизм тоже определяет симметрию графа, доказывающую однородность оснащения цикла.

Значения k длин циклов компонент графов и ранги r_i деревьев T , соответствующих этим компонентам, приведены для первых групп перестановок (S) и четных перестановок (S^+) n элементов в следующей таблице.

n	2	3	4	5	6	7
k	1	1 2	1 2	1 2 4	1 2 4	1 2 2 3 4
$r S$	1 1	1 1 3	1 1 9 6	1 1 1 25 1 30	1 1 1 75 3 180	1 1 1 1 1 231 3 9 1 840 6
$r S^+$	1	1 1	1 1 3	1 1 1 1	1 1 1 45 90	1 1 1 1 1 105 630

Однородность оснащения циклов компонент деревьями сохраняется для всех конечных групп.

Было бы интересно исследовать поведение топологии графа группы при косом умножении: как связаны графы операции возведения в квадрат для групп G , E и H точной последовательности $1 \rightarrow H \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1$? Вопрос интересен уже для двулистных накрытий, когда $H = \mathbb{Z}_2$, и для подгрупп индекса 2, когда $G = \mathbb{Z}_2$, как для $S^+ \rightarrow S \rightarrow S/S^+$.

Перекося топологии графа косого произведения групп может геометрически кодировать информацию о степени алгебраической перекошенности «произведения» E групп G и H .

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Группы Эйлера и арифметика геометрических прогрессий. МЦНМО, 2003.
2. Арнольд В. И. Динамическая система Ферма–Эйлера и статистика арифметики геометрических прогрессий. Функц. анализ и его прил., **37**, вып. 1, 1–18 (2003).
3. Arnold V. Ergodic and arithmetic properties of geometrical progression's dynamics and of its orbits. Moscow Mathematical Journal, **4**, 1–20 (2004).
4. Плутарх. Застольные беседы. Перевод Я. М. Боровского. М., 1987, VIII.9, с. 157.
5. Арнольд В. И. Топология и статистика формул арифметики. УМН, **58**, вып. 4 (354), 1–26 (2003).

Математический институт им. В. А. Стеклова,
CEREMADE, Université Paris-Dauphine

Поступило в редакцию
23 октября 2002 г.