Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Попов, Теорема Пэли–Винера для обобщенного преобразования Радона на плоскости, *Функц. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 3, 65–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa158>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 17:18:08

Теорема Пэли–Винера для обобщенного преобразования Радона на плоскости

© 2003. Д. А. Попов

Посвящается И. М. Гельфанду

§1. Постановка задачи и формулировка результатов

Рассмотрим функцию $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ с носителем в единичном круге $\mathbb{D}$. Везде ниже запись $u \in L^2(\Omega)$ означает, что $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ и $\text{supp } u \in \Omega$, $x = (x_1, x_2)$ — точка из $\mathbb{R}^2$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $|\cdot|$ — скалярное произведение и норма в $\mathbb{R}^2$. Пусть u — функция из $L^2(\mathbb{D})$ и $I(\varphi, q) = (\mathcal{R}_z u)(\varphi, q)$ — ее обобщенное преобразование Радона (ОПР). По определению (см. [1]) это функция на пространстве прямых, пересекающих $\mathbb{D}$, определенная равенством

$$(\mathcal{R}_z u)(\varphi, q) = \int_{\gamma_z(\varphi, q)} u \, ds_0 \quad (ds_0^2 = dx_1^2 + dx_2^2),$$

в котором кривая $\gamma_z(\varphi, q)$ задается уравнением

$$x = x(\varphi, q, t) \equiv q\eta - t\eta^* + z(\varphi, q, t). \quad (1)$$

В этом уравнении $\eta = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\eta^* = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$, $|q| \leq 1$, $|t| \leq \sqrt{1 - q^2}$ ($q^2 + t^2 \leq 1$) и векторное поле $z(\varphi, q, t)$ на прямой $\gamma_0(\varphi, q)$ ($\langle x, y \rangle = q$) удовлетворяет условиям

$$z(\varphi, q, t) = z(\varphi + \pi, -q, -t), \quad z(\varphi, q, \pm \sqrt{1 - q^2}) = 0. \quad (2)$$

Таким образом, кривая $\gamma_z(\varphi, q)$ имеет те же концы на границе $\partial\mathbb{D}$, что и хорда $\gamma_0(\varphi, q)$, на которой $x \equiv x^0(\varphi, q, t) = q\eta - t\eta^*$. Пространство прямых, пересекающих замкнутый круг $\mathbb{D}$, обозначим через $\mathbb{P}_1$. Если $\tilde{\mathbb{P}}_1 = \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ — цилиндр с координатами (φ, q) , то $\mathbb{P}_1 = \tilde{\mathbb{P}}_1 / [\sim]$ ($(\varphi, q) \sim (\varphi + \pi, -q)$). Таким образом, равенство $I = \mathcal{R}_z u$ задает функцию $I: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{R}$.

В настоящей работе при некоторых дополнительных предположениях относительно функции u и векторных полей $z(\varphi, q, t)$ устанавливаются необходимые и достаточные условия на образ ОПР функции с носителем в круге $\mathbb{D}' \subset \mathbb{D}$. Формула обращения ОПР и необходимые условия на образ ОПР (условия Кавальери) были установлены в [1]. Задача, решаемая ниже, состоит в исследовании достаточности этих условий и установлении теоремы существования для задачи обращения ОПР. Таким образом, ниже доказывается один из возможных вариантов теоремы Пэли–Винера для ОПР.

При $z = 0$ ОПР совпадает с классическим преобразованием Радона. С теоремами Пэли–Винера для преобразования Радона и формулами обращения для него

можно ознакомиться по работам [2–4]. Ниже через $\mathcal{R} = \mathcal{R}_z|_{z=0}$ обозначается оператор Радона, сопоставляющий функции u ее преобразование Радона $\mathcal{R}u$, и $\mathcal{R}^{-1}$ — обратный оператор. Рассмотрим свойства оператора $\mathcal{R}$ на пространстве $L^2(\mathbb{D})$, опираясь на результаты работы [5].

Введем пространство функций $L^2(\mathbb{P}_1, \sqrt{1-q^2})$ ($F: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{C}$) со скалярным произведением

$$(F_1, F_2) = \int_{-1}^1 dq \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{1-q^2} F_1(\varphi, q) \overline{F_2(\varphi, q)},$$

где черта означает комплексное сопряжение. Вслед за работой [5] введем ортогональный базис S_{lj} в этом пространстве. По определению

$$S_{lj}(\varphi, q) = e^{il\varphi} U_j(q), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

и $U_j(q)$ — полином Чебышёва второго рода [6]. Тогда имеет место равенство $(S_{lj}, S_{l'j'}) = \pi^2 \delta_{ll'} \delta_{jj'}$. Здесь и ниже $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в соответствующем функциональном пространстве и $\|\cdot\|$ — норма в нем. Будем говорить, что $I \in \{I\}$, если $I: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ и при этом $I(\varphi, q) = 2\sqrt{1-q^2} F(\varphi, q)$, $F \in L^2(\mathbb{P}_1, \sqrt{1-q^2})$. Тогда

$$F(\varphi, q) = \sum_{l,j} \alpha_{lj} S_{lj}, \quad \alpha_{lj} = \pi^{-2} (F, S_{lj}), \quad \sum_{l,j} |\alpha_{lj}|^2 < \infty,$$

$$\overline{\alpha}_{-l,j} = \alpha_{lj}, \quad \alpha_{lj} = 0, \text{ если } l+j \text{ нечетное.}$$

Последнее равенство следует из условия $F(\varphi+\pi, -q) = F(\varphi, q)$. Подпространство $\{I\}_1 \subset \{I\}$ определяется требованием конечности в нем нормы $\|I\|_1$:

$$\|I\|_1^2 = \sum_{l,j} |\alpha_{lj}|^2 (j+1). \quad (3)$$

В [5] показано, что базис S_{lj} естественно возникает в задаче обращения оператора Радона $\mathcal{R}$ на функциях из пространства $L^2(\mathbb{D})$. В частности, в работе [5] показано, что образ $\text{Im } \mathcal{R}_0 = \{J\}_1 \subset \{I\}_1$ — замкнутое подпространство, выделенное условием $\alpha_{lj} = 0$ при $|l| > j$. Эти условия индуцируют ортогональные разложения

$$\{I\} = \{J\} \oplus \{J^\perp\}, \quad \{I\}_1 = \{J\}_1 \oplus \{J^\perp\}_1,$$

причем $I \in \{J\}$ ($I \in \{J\}_1$), если $\alpha_{lj} = 0$ при $|l| > j$, и $I \in \{J^\perp\}$ ($I \in \{J^\perp\}_1$), если $\alpha_{lj} = 0$ при $|l| \leq j$. Таким образом, определены ортогональные проекторы

$$P: \{I\} \rightarrow \{J\}, \quad P^\perp: \{I\} \rightarrow \{J^\perp\}. \quad (4)$$

Теорему Пэли–Винера для преобразования Радона функций из пространства $L^2(\mathbb{D})$, по существу содержащуюся в работе [5], можно сформулировать в виде диаграммы $L^2(\mathbb{D}) \xrightleftharpoons[\mathcal{R}^{-1}]{\mathcal{R}} \{J\}_1$, и $\|\mathcal{R}\| = \pi^{-1/2}$, если в пространстве $\{J\}_1$ использовать норму (3).

Чтобы описать действие оператора $\mathcal{R}^{-1}$ на пространстве $\{I\}$, введем функции $I_{lj}(\varphi, q) = 2\sqrt{1-q^2} S_{lj}(\varphi, q)$ ($|q| \leq 1$), $I_{lj}(\varphi, q) = 0$ ($|q| > 1$). Тогда определены функции $f_{lj}(x) = (\mathcal{R}^{-1} I_{lj})(x)$. В работе [5] показано, что при $j = |l| + 2s$ ($s = 0, 1, 2, \dots$) $\text{supp } f_{lj} \in \mathbb{D}$ и $f_{lj}(x) = (j+1) P_{lj}(x)$ ($|x| \leq 1$), где $P_{lj}(x)$ — полином степени j (полином Цернике). Эти полиномы образуют базис в $L^2(\mathbb{D})$

и $(P_{lj}, P_{l'j'})_{L^2(\mathbb{D})} = \pi(j+1)^{-1} \delta_{jj'} \delta_{ll'}$. Проще всего полиномы $P_{lj}(x)$ ($j = |l| + 2s$) определить равенством

$$P_{lj}(x) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{il\varphi} U_j(\langle x, \eta \rangle) d\varphi \quad (|x| \leq 1),$$

хотя нам и не удалось найти эту формулу в литературе. В работе [1] показано, что при всех четных $l + j$ имеет место включение $f_{lj}(x) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ и

$$(f_{lj}, f_{l'j'})_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \pi \delta_{ll'} \delta_{jj'}. \quad (5)$$

При этом если $|l| = j + 2s$ ($s \geq 1$), то $\text{supp } f_{lj} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}$.

Будем говорить, что некоторое утверждение справедливо при достаточно малых и достаточно гладких полях $z \equiv z(\varphi, q, t)$, если можно указать m_0, ε_0 , такие, что это утверждение справедливо, если для некоторого $m \geq m_0$ имеет место оценка $\|z\|_m \leq \varepsilon_0$, в которой

$$\|z\|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \max_{\varphi, q, t} (|\partial^\alpha z_1| + |\partial^\alpha z_2|) \quad (z = (z_1, z_2)).$$

В этой формуле максимум берется по области $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $q^2 + t^2 \leq 1$, $\partial^\alpha = \partial_\varphi^{\alpha_1} \partial_q^{\alpha_2} \partial_t^{\alpha_3}$ и $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

В работе [1] показано, что если $u \in L^2(\mathbb{D}')$ ($\mathbb{D}' = \{x \in \mathbb{D} : |x| \leq b < 1\}$), то при достаточно малых и гладких полях z функция u однозначно восстанавливается по проекции $\Pi \mathcal{R}_z u$. При этом явно строится левый обратный оператор к оператору $\Pi \mathcal{R}_z$, и если $I = \mathcal{R}_z u$, то

$$u = B_z \mathcal{R}^{-1} \Pi I, \quad (6)$$

где $B_z: L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{D}')$ — ограниченный оператор. Оператор $B_z \equiv B_z(\mathbb{D}')$ зависит от полей z и выбора области $\mathbb{D}'$, и его явный вид будет указан ниже (см. (23)). Из равенства (6) следуют необходимые условия на образ оператора $\mathcal{R}_z$ (условия Кавальери): если $I = \mathcal{R}_z u$, то

$$\Pi^\perp I = \Pi^\perp \mathcal{R}_z (B_z \mathcal{R}^{-1} \Pi I). \quad (7)$$

В настоящей работе рассматривается вопрос о достаточности этих условий при дополнительном предположении, что

$$z(\varphi, q, t) = 0 \quad \text{при } |q| \geq b \quad (b < 1). \quad (8)$$

Таким образом предполагается, что кривые $\gamma_z(\varphi, q)$, не пересекающие круг $\mathbb{D}'$, совпадают с прямыми $\gamma_0(\varphi, q)$. Сразу заметим, что достаточность условий (7) ниже будет доказана только при более сильном, чем (8), предположении, что $z(\varphi, q, t) = 0$ при $q^2 + t^2 \geq b^2$.

Чтобы сформулировать основной результат, введем, наряду с полями $z(\varphi, q, t)$, новые поля $\tilde{z}(\varphi, q, t)$. Для этого фиксируем число $\tilde{b}$, такое, что $b < \tilde{b} < 1$, $\tilde{b} - b \geq C > 0$, $1 - \tilde{b} \geq C > 0$. Тогда, как будет показано ниже, можно построить поля $\tilde{z}(\varphi, q, t)$, такие, что

$$\tilde{z}(\varphi, q, t) = \begin{cases} z(\varphi, q, t), & q^2 + t^2 \leq b^2 + \delta^2, \\ 0, & q^2 + t^2 > \tilde{b}^2, \end{cases} \quad \mathcal{R}_z u = \mathcal{R} \tilde{z} u, \text{ если } u \in L^2(\mathbb{D}'). \quad (9)$$

Построим по полям $\tilde{z}(\varphi, q, t)$ и области $\tilde{\mathbb{D}} = \{x \in \mathbb{D} : |x| \leq \tilde{b}\}$ оператор $\tilde{B}_{\tilde{z}} \equiv B_{\tilde{z}}(\tilde{\mathbb{D}})$ точно так же, как в работе [1] построен оператор $B_z \equiv B_z(\mathbb{D}')$. Имеет место

ТЕОРЕМА (теорема Пэли–Винера для ОПР). Пусть задана сеть кривых $\gamma_z(\varphi, q)$ и при этом выполняются условия (2), (8). Если поля $z = z(\varphi, q, t)$ достаточно малы и гладки, то функция $I: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ представима в виде $I = \mathcal{R}_z u$, где $u \in L^2(\mathbb{D}')$ ($u(x) = 0$ при $|x| > b$), тогда и только тогда, когда

$$I \in \{I\}_1, \quad (10)$$

$$I(\varphi, q) = 0 \quad \text{при } |q| \geq b \quad (11)$$

и для некоторого $\tilde{b}$, такого, что $b < \tilde{b} < 1$, $\tilde{b} - b \geq C > 0$ и $1 - \tilde{b} \geq C > 0$, выполняются условия Кавальери

$$\Pi^\perp I = \Pi^\perp \mathcal{R}_{\tilde{z}}(\tilde{B}_{\tilde{z}} \mathcal{R}^{-1} \Pi I) \quad \text{при } |q| \leq \tilde{b}. \quad (12)$$

При выполнении этих условий функция u восстанавливается по проекции ΠI :

$$u = \tilde{B}_{\tilde{z}}(\mathcal{R}^{-1} \Pi I) = B_z(\mathcal{R}^{-1} \Pi I), \quad (13)$$

и результат восстановления не зависит от выбора числа $\tilde{b}$ и полей $\tilde{z}(\varphi, q, t)$. Если условие (8) заменить на более сильное условие $z(\varphi, q, t) = 0$ при $q^2 + t^2 \geq b^2$, то в равенстве (12) можно заменить $\tilde{z}$ на z .

Из этой теоремы следует, что при выполнении условий (10), (11) условия (7) следуют из условий (12). Приведенная теорема утверждает, что оператор $B_z \mathcal{R}^{-1}$ является как левым, так и правым обратным к оператору $\Pi \mathcal{R}_z$. Основным примером сети $\gamma_z(\varphi, q)$, удовлетворяющей условиям теоремы, является множество геодезических конформно-плоской метрики $ds^2 = f^2(x) ds_0^2$ при условии, что $f(x) = 1 + v(x)$, причем $v(x) = 0$ при $|x| \geq b$ и функция $v(x)$ мала в подходящей норме пространства $C^m(\mathbb{D})$.

§ 2. Доказательство теоремы

Начнем с построения полей $\tilde{z}(\varphi, q, t)$, удовлетворяющих условиям (9). Без ограничения общности можно считать, что

$$\langle z, \eta^* \rangle = 0, \quad \text{т. е. } z(\varphi, q, t) = h(\varphi, q, t) \eta. \quad (14)$$

Тогда в согласии с определениями (1), (2)

$$(\mathcal{R}_z u)(\varphi, q) = \int_{|t| \leq \sqrt{1-q^2}} u(x(\varphi, q, t)) \sqrt{1 + (\partial_t h(\varphi, q, t))^2} dt.$$

Рассмотрим гладкую четную функцию $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такую, что $\chi(s) = 1$ при $|s| \leq \sqrt{b^2 + \delta^2}$ и $\chi(s) = 0$ при $|s| \geq \tilde{b}$. Определим поля $\tilde{z}(\varphi, q, t)$ равенством $\tilde{z}(\varphi, q, t) = z(\varphi, q, t) \chi(\sqrt{q^2 + t^2})$. Тогда первые два из условий (9) очевидным образом выполняются. Последнее из условий (9) следует из того, что если $q^2 + t^2 \geq b^2 + \delta^2$ и $\delta^2 > 2|h|$, то $|x(\varphi, q, t)| > b$ и $|\tilde{x}(\varphi, q, t)| > b$, где $x(\varphi, q, t)$ определяется равенством (1) и $\tilde{x}(\varphi, q, t) = q\eta - t\eta^* + \tilde{z}(\varphi, q, t)$. Уравнение (1) задает гладко зависящее от φ отображение

$$f_\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_\varphi(q, t) = (x_1, x_2) = x(\varphi, q, t). \quad (15)$$

Предположим, что $z(\varphi, q, t) = 0$ при $q^2 + t^2 = a^2$. Покажем, что тогда, если норма $\|z\|_1$ достаточно мала, отображение f_φ — гладкая биекция внутренности круга $q^2 + t^2 \leq a^2$ на внутренность круга $|x| \leq a$. Отображение f_φ переводит окружность $q^2 + t^2 = a^2$ в окружность $|x| = a$. При $z = h\eta$ якобиан отображения f_φ равен $(-1)(1 + \partial_q h)$. При достаточно малой норме $\|z\|_1$ имеет место неравенство $|f_\varphi(0, 0)| < a$. Далее рассуждаем от противного. Предположим, что $|f_\varphi(q, t)| > a$ для некоторой точки (q, t) , такой, что $q^2 + t^2 < a^2$. Соединим прямой точку $(0, 0)$ с этой точкой (q, t) . Тогда образ этой прямой пересечет окружность $|x| = a$ и, следовательно, на рассматриваемой прямой найдется точка (q', t') , такая, что $(q')^2 + (t')^2 < a^2$ и $|f_\varphi(q', t')| = a$. Но этого не может быть, так как отображение f_φ взаимно однозначно переводит окружность $q^2 + t^2 = a^2$ в окружность $|x| = a$.

Из сказанного выше следует, что отображение f_φ позволяет определить поля $z(x, \varphi)$ равенством $z(x, \varphi) = z(\varphi, q, t)$ ($x = f_\varphi(q, t)$). При этом если $z(\varphi, q, t) = 0$ при $q^2 + t^2 \geq b^2$, то $z(x, \varphi) = 0$ при $|x| \geq b$.

2.1. Необходимость. В работе [1] был введен интегральный оператор Фурье нулевого порядка A_z , действующий по формуле

$$(A_z v)(x) = (4\pi)^{-2} \int d\xi \int dy e^{i\langle y-x-z(\varphi, \eta), \xi \rangle} a(y, \varphi) v(y), \quad (16)$$

$$a(x, \varphi) = (1 + (\partial_t h)^2)^{1/2} (1 + \partial_q h)^{-1}, \quad \xi = |\xi| \eta \in \mathbb{R}^2.$$

При этом считается, что поля $z(x, \varphi)$ гладко продолжены в область $|x| > 1$ таким образом, что $z(x, \varphi) = 0$ при $|x| > 2$. В этой же работе показано, что

$$A_z: L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2) \quad \text{и} \quad \|A_z\| = 1 + O(\|z\|_m).$$

Здесь и везде ниже в оценках предполагается, что $m \geq m_0$, где m_0 определяется из условия достаточной малости и гладкости полей $z(\varphi, q, t)$, которое предполагается выполненным. Для полей $z(x, \varphi)$ это условие формулируется совершенно аналогично. Сопряженный в $L^2(\mathbb{R}^2)$ оператор A_z^T действует по формуле

$$(A_z^T v)(x) = (4\pi)^{-2} \int d\xi \int dy e^{i\langle y-x+z(\varphi, \eta), \xi \rangle} a(x, \varphi) u(y). \quad (17)$$

Связь этих операторов с задачей обращения оператора $\mathcal{R}_z$ следует из доказанных в работе [1] равенств

$$\mathcal{R}_z^{-1} \mathcal{R}_z u = A_z u \quad (u \in L^2(\mathbb{D})), \quad A_z^T A_z = \mathbb{I} + Q_z, \quad (18)$$

где $Q_z: L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ — псевдодифференциальный оператор порядка -1 с малой нормой: $\|Q_z\| \leq C_m \|z\|_m$. Отсюда следует, что левый обратный оператор A_z^{-1} имеет вид

$$A_z^{-1} = (\mathbb{I} + Q_z)^{-1} A_z^T \quad (\|Q_z\| \leq C_m \|z\|_m). \quad (19)$$

Левый обратный оператор $\mathcal{R}_z^{-1}$ определяется формулами

$$\mathcal{R}_z^{-1} = A_z^{-1} \mathcal{R}^{-1}, \quad u = (\mathbb{I} + Q_z)^{-1} A_z^T \mathcal{R}^{-1} I, \quad \text{если } I = \mathcal{R}_z u. \quad (20)$$

Пусть $u \in L^2(\mathbb{D}')$. Тогда $u \in L^2(\widetilde{\mathbb{D}})$, и в силу условий (9) имеет место равенство $\mathcal{R}_z u = \mathcal{R} z u$. Определим функцию $I: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ равенством $I = \mathcal{R}_z u = \mathcal{R} z u$.

Применим оператор $\mathcal{R}_z^{-1}$ к тождеству $\mathcal{R}_z u - \Pi^\perp \mathcal{R}_z u = \Pi I$ и получим, что

$$u - G_z u = \mathcal{R}_z^{-1} \Pi I, \quad G_z = \mathcal{R}_z^{-1} \Pi^\perp \mathcal{R}_z. \quad (21)$$

В работе [1] показано, что G_z — ограниченный оператор, $G_z: L^2(\mathbb{D}') \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ и $\|G_z\| \leq C_m \|z\|_m$. Введем операторы ограничения $\mathcal{D}'$ и $\tilde{\mathcal{D}}$:

$$(\mathcal{D}'u)(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \mathbb{D}', \\ 0, & x \notin \mathbb{D}', \end{cases} \quad (\tilde{\mathcal{D}}u)(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \tilde{\mathbb{D}}, \\ 0, & x \notin \tilde{\mathbb{D}}. \end{cases}$$

Так как $u = \mathcal{D}'u$, то из тождества (21) получим тождество

$$u = B_z \mathcal{R}^{-1} \Pi(\mathcal{R}_z u) \quad (\forall u \in L^2(\mathbb{D}')), \quad (22)$$

в котором оператор B_z определяется равенством

$$B_z = (\mathbb{I} - \mathcal{D}' G_z)^{-1} \mathcal{D}' A_z^{-1}. \quad (23)$$

Так как $\|G_z\| \leq C_m \|z\|_m$, то совершенно аналогично получаем, что

$$u = \tilde{B}_z \mathcal{R}^{-1} \Pi(\mathcal{R}_z u), \quad \tilde{B}_z = (\mathbb{I} - \tilde{\mathcal{D}} G_z)^{-1} \tilde{\mathcal{D}} A_z^{-1}. \quad (24)$$

Таким образом, если $u \in L^2(\mathbb{D}')$ и $I = \mathcal{R}_z u = \mathcal{R}_z u$, то

$$\Pi^\perp I = \Pi^\perp \mathcal{R}_z (B_z \mathcal{R}^{-1} \Pi I), \quad \Pi^\perp I = \Pi^\perp \mathcal{R}_z (\tilde{B}_z \mathcal{R}^{-1} \Pi I). \quad (25)$$

Если не учитывать условия (11), то условия (25) сильнее условия (12). Так как по предположению $u = 0$ при $|x| > b$ и $z(\varphi, q, t) = 0$ при $|q| > b$, то $I = \mathcal{R}_z u = \mathcal{R}u = 0$ при $|q| > b$. Необходимость условий (11), (12) доказана, и остается доказать необходимость условия (10). Из равенства (5) следует, что

$$\|\mathcal{R}^{-1} I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \pi \|I\|_1^2, \quad (26)$$

где величина $\|I\|_1^2$ определена в (3). Так как $A_z A_z^T = \mathbb{I} + Q_z^T$, то из формулы обращения (20) следует, что $\mathcal{R}^{-1} I = (\mathbb{I} + Q_z^T)^{-1} A_z (\mathbb{I} + Q_z) u$ ($I = \mathcal{R}_z u$). Учитывая сказанное выше о нормах операторов A_z , Q_z и равенство (26), получим, что при $I = \mathcal{R}_z u$, $u \in L^2(\mathbb{D})$,

$$\|I\|_1^2 = \pi^{-1} \|\mathcal{R}^{-1} I\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2, \quad (27)$$

и необходимость условия (10) также доказана.

Прежде чем рассматривать вопрос о достаточности условий (10)–(12), докажем следующую лемму.

2.2. Формулировка и доказательство леммы.

ЛЕММА. Пусть z достаточно мало и гладко и $z(\varphi, q, t) = 0$ при $q^2 + t^2 \geq b^2$. Тогда если $I \in \{I\}_1$ и по определению

$$u = B_z \mathcal{R}^{-1} \Pi I, \quad (28)$$

то при $|q| \leq b$ имеет место равенство

$$\Pi \mathcal{R}_z u = \Pi I. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $I \in \{I\}_1$, то $\mathcal{R}^{-1}\Pi I \in L^2(\mathbb{D})$ и $u \in L^2(\mathbb{D}')$. Тогда применимо тождество (22) и, следовательно, $B_z \mathcal{R}^{-1}\Pi \mathcal{R}_z u = B_z \mathcal{R}^{-1}\Pi I$. Учитывая определение (23) оператора B_z , получим, что

$$\mathcal{D}' A_z^{-1} \mathcal{R}^{-1} J = 0, \quad J \stackrel{\text{def}}{=} \Pi(\mathcal{R}_z u - I) \in \{J\}_1. \quad (30)$$

Включение $J \in \{J\}_1$ следует из оценки (27). Как показано выше, в силу свойств (15) отображения f_φ при $|x| > b$ имеет место равенство $z(x, \varphi) = 0$. Отсюда следует, что для символа $a(x, \varphi)$ оператора A_z^T (см. (16)) при $|x| > b$ выполняется равенство $a(x, \varphi) = 1$ и (см. (17)) $(A_z^T v)(x) = v(x)$ ($|x| > b$). Таким образом, оператор A_z^T сохраняет $L^2(\mathbb{D}')$, т.е. $A_z^T: L^2(\mathbb{D}') \rightarrow L^2(\mathbb{D}')$. С другой стороны, прямо из определения (16) вытекает, что $A_z: L^2(\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}') \rightarrow L^2(\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}')$ и на пространстве $L^2(\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}')$ оператор A_z совпадает с тождественным ($A_z = \mathbb{I}$), а следовательно, и

$$A_z^{-1}: L^2(\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}') \rightarrow L^2(\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}').$$

Введем оператор $T: \{J\}_1 \rightarrow \{J\}_1$:

$$(TJ)(\varphi, q) = \begin{cases} J(\varphi, q), & |q| \leq b, \\ 0, & |q| > b. \end{cases} \quad (31)$$

Тогда $\mathcal{R}^{-1}J = \mathcal{R}^{-1}TJ + \mathcal{R}^{-1}(\mathbb{I} - T)J$, и так как $\mathcal{R}^{-1}(\mathbb{I} - T)J \in L^2(\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}')$, то $\mathcal{D}' A_z^{-1} \mathcal{R}^{-1}(\mathbb{I} - T)J = 0$ и

$$\mathcal{D}' A_z^{-1} \mathcal{R}^{-1} J = \mathcal{D}' A_z^{-1} \mathcal{R}^{-1} TJ = 0. \quad (32)$$

Функция $v \equiv \mathcal{R}^{-1}TJ$ принадлежит $L^2(\mathbb{D}')$. Учитывая явный вид оператора A_z^{-1} (см. (19)) получим, что $A_z^{-1}v = A_z^T v + \Delta_z v$, $\|\Delta_z v\| \leq C_m \|z\|_m \|v\|$. С другой стороны, $\|A_z^T v\| \geq C \|v\|$, и так как оператор A_z^T сохраняет пространство $L^2(\mathbb{D}')$, а $v \in L^2(\mathbb{D}')$, то $\|\mathcal{D}' A_z^{-1} v\| \geq C \|v\|$. Таким образом, из равенства (32) получаем, что $v \equiv \mathcal{R}^{-1}TJ = 0$ и, следовательно, $TJ = 0$. Учитывая определение (31) оператора T и определение (30) величины J , получаем нужное равенство (29), и лемма доказана.

2.3. Достаточность и завершение доказательства теоремы. Пусть задана функция $I: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям (10)–(12). Определим функцию $u \in L^2(\mathbb{D})$ равенством $u = \tilde{B}_z \mathcal{R}^{-1}\Pi I$. Так как $\tilde{z}(\varphi, q, t) = 0$ при $q^2 + t^2 \geq \tilde{b}^2$, то, применяя доказанную лемму, получим, что $\Pi I = \Pi \mathcal{R}_z u$ ($|q| \leq \tilde{b}$), и в силу условий Кавальери имеем $I = \mathcal{R}_z u$ ($|q| \leq \tilde{b}$). Рассмотрим область $|q| > \tilde{b}$. Так как в этой области $\tilde{z}(\varphi, q, t) = 0$ и $u(x) = 0$ при $|x| > \tilde{b}$, то $\mathcal{R}_z u = I = 0$ при $|q| > \tilde{b}$. Таким образом, определенная выше функция u является решением уравнения $\mathcal{R}_z u = I$. При этом, так как $\tilde{z}(\varphi, q, t) = 0$ и $I = 0$ при $|q| > b$, то $\mathcal{R}_z u = \mathcal{R} u = 0$ при $|q| > b$. Используя теорему о носителе для преобразования Радона [3], заключаем, что $u(x) = 0$ при $|x| > b$, и, следовательно (см. (9)), имеет место равенство $\mathcal{R}_z u = \mathcal{R} u = I$. Достаточность условий (10)–(12) доказана. В силу единственности решения уравнения $\mathcal{R}_z u = I$ получаем, что имеет место равенство (13).

Докажем последнее утверждение теоремы. Доказательство необходимости условий (7), (10), (11) уже проведено выше. Для доказательства их достаточности в случае, когда $z(\varphi, q, t) = 0$ при $q^2 + t^2 \geq b^2$, надо просто повторить приведенное выше доказательство, определив функцию u равенством $u = B_z \mathcal{R}^{-1} \Pi$. Теорема полностью доказана.

Автор благодарит участников семинара Р. А. Минлоса в ИППИ за интерес к этой работе и Д. В. Сушко за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Д. А. Обобщенное преобразование Радона на плоскости, его обращение и условия Кавальери. Функци. анализ и его прил., **35**, вып. 4, 38–53 (2001).
2. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Избранные задачи интегральной геометрии. Добросвет, М., 2000.
3. Хелгасон С. Преобразование Радона. Мир, М., 1983.
4. Lax P. D., Phillips R. S. The Paley–Wiener Theorem for the Radon Transform. Comm. Pure Appl. Math., **23**, No. 3, 409–424 (1970).
5. Marr R. B. On the reconstruction of a function on a circular domain from a sampling of its line integrals. J. Math. Anal. Appl., **45**, 357–374 (1974).
6. Суэтин П. К. Ортогональные полиномы. Наука, М., 1979.

Московский государственный университет,
Институт физико-химической биологии
им. А. Н. Белозерского

Поступило в редакцию
28 апреля 2003 г.