Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Зиглин, Аналитическое доказательство неинтегрируемости АВС-течения при $A = B = C$, *Функци. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 3, 77–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa160>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:44:22

означает, что всякое пространство X , интерполяционное относительно нее, представимо в виде $X = (L_\infty, \text{Exp } L^\Phi)_F^{\mathcal{K}}$ для некоторого параметра $\mathcal{K}$ -метода F . Тем самым мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть Φ — функция Орлича. Если X интерполяционно относительно пары $(L_\infty, \text{Exp } L^\Phi)$, то существует параметр $\mathcal{K}$ -метода F , такой, что $X = \mathcal{L}_{\Phi, F}^{\mathcal{K}}$.

Аналогичные результаты справедливы и в двойственной ситуации: для фуктора $\mathcal{L}_{\Phi, G}^{\mathcal{J}}$ и пары $(L_1, \Lambda(\varphi))$.

ТЕОРЕМА 5. Для произвольной функции Орлича Φ и любого параметра $\mathcal{J}$ -метода G $\mathcal{L}_{\Phi, G}^{\mathcal{J}} = (L_1, \Lambda(\varphi))_G^{\mathcal{J}}$ (с эквивалентностью норм).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть Φ — функция Орлича. Если Y интерполяционно относительно пары $(L_1, \Lambda(\varphi))$, то существует параметр $\mathcal{J}$ -метода G , такой, что $Y = \mathcal{L}_{\Phi, G}^{\mathcal{J}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yano S. J. Math. Soc. Japan, **3**, 296–305 (1951).
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. Мир, М., 1965.
3. Jawerth B., Milman M. Extrapolation Spaces with Applications. Mem. Amer. Math. Soc., **89**, No. 44 (1991).
4. Jawerth B., Milman M. In: Israel Math. Conference Proc., Vol. 5, 81–105 (1992).
5. Milman M. Extrapolation and Optimal Decompositions with Applications to Analysis. Lect. Notes in Math., Vol. 1580, Springer-Verlag, 1994.
6. Carro M. J. J. Funct. Anal., **174**, 155–166 (2000).
7. Carro M. J., Martin J. In: Function Spaces, Interpolation Theory and Related Topics. Proc. of the Intern. Conf. in honor of J. Peetre, Lund, Aug. 17–22, 2000, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 2002, pp. 241–248.
8. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. Наука, М., 1978.
9. Рутецкий Я. Б. УМН, **20**, вып. 4, 205–208 (1965).
10. Lorentz G. G. Proc. Amer. Math. Soc., **12**, 127–132 (1961).
11. Bennett C., Rudnick K. Diss. Math., **175**, 5–67 (1980).
12. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. Мир, М., 1980.
13. Brudnyi Yu. A., Krugliak N. Ya. Interpolation Functors and Interpolation Spaces. North Holland Publish., 1991.
14. Cwikel M., Nilsson P. Math. Scand., **56**, 29–42 (1985).

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступило в редакцию
23 октября 2002 г.

УДК 517.913

Аналитическое доказательство неинтегрируемости АВС-течения при $A = B = C$

© 2003. С. Л. Зиглин

В работе продолжается исследование вопроса о существовании (непостоянно-го) первого интеграла у системы

$$\dot{x} = A \sin z + C \cos y, \quad \dot{y} = B \sin x + A \cos z, \quad \dot{z} = C \sin y + B \cos x, \quad (1)$$

описывающей стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости с периодическими граничными условиями и полем скорости, коллинеарным своему ротору, называемое АВС-течением, при $A^2 = B^2 = C^2 \neq 0$. (Подробнее об этой системе и ее связи с магнитной гидродинамикой см. [1–6]).

В [7] было доказано отсутствие у этой системы аналитического первого интеграла при $0 \neq A^2 \neq B^2 \neq 0$ и достаточно малых $C^2 \neq 0$, а в [8] — при $A^2 = B^2 \neq 0$ и всех $C^2 < 2A^2$, кроме не более чем счетного числа явно указанных. Сюда относится и наиболее часто рассматриваемый в литературе случай $A^2 = B^2 = C^2$. В [9] было дано компьютерное доказательство отсутствия в этом случае у системы (1) аналитического первого интеграла. В настоящей работе предлагается аналитическое доказательство этого утверждения.

ТЕОРЕМА. При $A^2 = B^2 = C^2 \neq 0$ система (1) не имеет на трехмерном торе T^3 с координатами $x, y, z \pmod{2\pi}$ вещественно-аналитического первого интеграла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (Ср. [8–10].) Пусть сначала $A^2 = B^2 \neq 0$, а $C^2 \neq 2A^2$ произвольно. Не ограничивая общности, будем считать, что $A = B = 1$ (этого можно добиться заменой времени и сдвигом координат на π). Система (1) имеет частное решение

$$\begin{aligned} y &= \pi/4, \quad z = x + \pi/2, \quad x = \varphi(\tau), \\ \sin \varphi(\tau) &= -\frac{2\sqrt{1-\mu^2}(1-\tau^2)}{(1-\mu)(1-\tau)^2 + (1+\mu)(1+\tau)^2}, \\ \cos \varphi(\tau) &= \frac{(1-\mu)(1-\tau)^2 - (1+\mu)(1+\tau)^2}{(1-\mu)(1-\tau)^2 + (1+\mu)(1+\tau)^2}, \\ \tau &= \exp \sqrt{1-\mu^2} t, \quad \mu = C/\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Его комплексифицированная фазовая кривая Γ в комплексифицированном фазовом пространстве $T_{\mathbb{C}}^3$ — трехмерном комплексном торе с координатами $x, y, z \pmod{2\pi}$ — является комплексифицированной окружностью $S_{\mathbb{C}}^1$ с координатой $x \pmod{2\pi}$, задаваемой формулами (2), с двумя выколотыми точками — положениями равновесия системы (1), определяемыми из уравнения $\cos x = -\mu$.

Так как вдоль фазовой кривой Γ мы имеем $x - z = \text{const}$, $y = \text{const}$, то $\xi = dx - dz$, $\eta = dy$ можно принять в качестве координат в слоях нормального расслоения фазовой кривой Γ в $T_{\mathbb{C}}^3$ и записать систему в нормальных вариациях вдоль Γ в виде

$$\dot{\xi} = \sin \varphi(\tau)\xi - 2\mu\eta, \quad \dot{\eta} = \cos \varphi(\tau)\xi. \quad (3)$$

Пусть $\mu \neq 0$. Тогда система (3) эквивалентна уравнению

$$\ddot{\xi} - \dot{\xi} \sin \varphi(\tau) - \xi \cos \varphi(\tau)(\cos \varphi(\tau) - \mu) = 0.$$

Вводя обозначение $' = d/d\tau$, перепишем его в виде

$$\xi'' + a(\tau)\xi' + b(\tau)\xi = 0, \quad (4)$$

$$a(\tau) = \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{\sin \varphi(\tau)}{\sqrt{1-\mu^2}} \right), \quad b(\tau) = -\frac{\cos \varphi(\tau)(\cos \varphi(\tau) - \mu)}{(1-\mu^2)\tau^2}.$$

Уравнение (4) имеет в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ четыре регулярные особые точки: $\tau_{1,2} = -\mu \pm i\sqrt{1-\mu^2}$, 0 , ∞ .

Тогда

$$a(\tau) = a_0(\tau - \tau_{1,2})^{-1} + O(1), \quad b(\tau) = b_0(\tau - \tau_{1,2})^{-2} + O((\tau - \tau_{1,2})^{-1}), \\ a_0 = -1, \quad b_0 = 1.$$

Определяющее уравнение [11]

$$r(r - 1) + a_0 r + b_0 = 0$$

в точках $\tau_{1,2}$ имеет кратные корни $r_{1,2} = 1$; следовательно [11], нормальные формы матриц преобразований под действием уравнения (4) при обходе этих точек являются жордановыми клетками.

Предположим, что система (1) имеет аналитический первый интеграл в некоторой области D , такой, что фундаментальная группа фазовой кривой Γ в некоторой точке представима петлями, лежащими в D . Тогда, согласно [12, 13], все преобразования группы монодромии уравнения (4) имеют общий собственный вектор.

Далее,

$$a(\tau) = c\tau^{-1} + O(1), \quad b(\tau) = d\tau^{-2} + O(\tau^{-1}), \quad c = 2, \quad d = -2\mu^2/(1 - \mu^2),$$

следовательно, определяющее уравнение в точке $\tau = 0$ имеет корни

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + 7\mu^2}{1 - \mu^2}}.$$

При $C^2 = 1$ имеем $\mu^2 = 1/2$, $s_1 = 1$, $s_2 = -2$. Стандартные вычисления [11] показывают, что нормальная форма матрицы преобразования под действием уравнения (4) при обходе точки $\tau = 0$ также является жордановой клеткой.

Аналогично показывается, что определяющее уравнение в точке $\tau = \infty$ имеет те же корни, а нормальная форма преобразования под действием уравнения (4) при обходе этой точки тоже является жордановой клеткой. (Это следует также из инвариантности уравнения (4) относительно преобразования $\tau \rightarrow \tau^{-1}$ (являющейся следствием инвариантности системы (1) относительно преобразования $(x, y, z, t) \mapsto (-x, y, \pi - z, -t)$.)

Так как большему корню определяющего уравнения в регулярной особой точке линейного дифференциального уравнения второго порядка соответствует собственный вектор преобразования под действием этого уравнения при обходе этой особой точки [11, с. 217], а больший из корней определяющего уравнения в каждой особой точке уравнения (4) натурален, то общему собственному вектору всех преобразований группы монодромии уравнения (4) отвечает непостоянное решение этого уравнения, голоморфное во всех его особых точках, а значит, и во всей расширенной комплексной плоскости, что невозможно.

Таким образом, система (1) не имеет аналитического первого интеграла ни в какой области D , такой, что фундаментальная группа фазовой кривой Γ в некоторой точке представима петлями, лежащими в D . Так как при $C^2 < 2$ выколотые особые точки на фазовой кривой Γ , определяемые из уравнения $\cos x = -\mu = -C/\sqrt{2}$, вещественны, то при этих значениях C фундаментальная группа фазовой кривой Γ в любой вещественной точке представима петлями, лежащими в сколь угодно малой комплексной окрестности замыкания ее вещественной части. Отсюда следует, что при $C = 1$ система (1) не имеет аналитического первого

интеграла ни в какой области, содержащей вещественную часть фазового пространства, а значит, не имеет и вещественно-аналитического первого интеграла, что и требовалось доказать.

Автор благодарен В. И. Арнольду за предложенную задачу и А. И. Нейштадту и рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. Наука, М., 1974.
2. Непом М. C. R. Acad. Sci. Paris, **262**, 312–314 (1966).
3. Арнольд В. И. Вестник МГУ, сер. матем., мех., №6, 50–57 (1982).
4. Арнольд В. И., Коркина Е. И. Вестник МГУ, сер. матем., мех., №3, 43–46 (1983).
5. Арнольд В. И. Об эволюции магнитного поля под действием переноса и диффузии. В сб.: Некоторые вопросы современного анализа. Изд-во МГУ, 1984, с. 8–21.
6. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Усиков У. А., Черников А. А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. Наука, М., 1991.
7. Зиглин С. Л. Изв. АН СССР, сер. матем., **51**, вып. 5, 1088–1103 (1987).
8. Ziglin S. L. Chaos, **8**, No. 1, 272–273 (1998).
9. Зиглин С. Л., Черепенин В. А. Докл. РАН, **369**, №2, 173–174 (1999).
10. Зиглин С. Л. Функц. анализ и его прил., **30**, вып. 2, 80–81 (1996).
11. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М.-Л., 1950.
12. Зиглин С. Л. Функц. анализ и его прил., **16**, вып. 3, 30–41 (1982).
13. Yoshida H., Ramani A., Grammaticos B., Hietarinta J. Phys. A, **144**, 310–321 (1987).

Институт радиотехники и электроники РАН

Поступило в редакцию
1 октября 2001 г.

УДК 517.984

Асимптотика для числа собственных значений трехчастичного оператора Шрёдингера на решетке*

© 2003. С. Н. ЛАКАЕВ, З. Э. МУМИНОВ

Введение. Система трех произвольных квантовых частиц на трехмерной решетке рассматривалась в [1, 2], где установлено существование бесконечного числа собственных значений дискретного трехчастичного оператора Шрёдингера (эффект Ефимова) на физическом уровне строгости.

В [3, 4] доказано существование эффекта Ефимова для гамильтониана системы трех произвольных и одинаковых частиц на трехмерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Отметим, что для непрерывного трехчастичного оператора Шрёдингера наличие эффекта Ефимова доказано в [5–8].

В [9] для разностного трехчастичного оператора Шрёдингера показано, что только при нулевом значении полного квазиимпульса ($K = 0$) и некотором $\mu = \mu_0 > 0$ (где μ — энергия взаимодействия двух частиц) имеет место эффект Ефимова, а при всех малых значениях квазиимпульса и $\mu > 0$ этот оператор имеет лишь конечное число собственных значений.

В [10] изучены местоположение и структура существенного спектра дискретного оператора Шрёдингера, описывающего системы четырех одинаковых частиц

*Работа частично поддерживается Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) и Фондом фундаментальных исследований ГКНТ РУз.